Ortogonalizzazione di Gram - Schmidt

V spazio vett. Euclideo $\langle \, , \, \rangle$ $\quad$ $\dim V = n$

$(s \leq n)$

Dato i vettori $\{v_1, \dots, v_s\}$ di V, $v_1, \dots, v_s$ lin. indip. $\rightsquigarrow$

$\{t_1, \dots, t_s\}$ vett. ortogonali di V t.c.

$$\mathrm{Span}(t_1, \dots, t_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k), \ \forall k = 1, \dots, s$$

Procedimento

$$\begin{cases} t_1 = v_1 \\ t_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, t_i \rangle}{\langle t_i, t_i \rangle} t_i & k \geq 1 \end{cases}$$

$$t_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, t_1 \rangle}{\langle t_1, t_1 \rangle} t_1$$

$$\underline{\langle t_2, t_1 \rangle} = \langle v_2, t_1 \rangle - \frac{\langle v_2, t_1 \rangle}{\cancel{\langle t_1, t_1 \rangle}} \cancel{\langle t_1, t_1 \rangle} = 0$$

$$t_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, t_1 \rangle}{\langle t_1, t_1 \rangle} t_1 - \frac{\langle v_3, t_2 \rangle}{\langle t_2, t_2 \rangle} t_2$$

<u>Corollario</u> Ogni spazio vett. Euclideo di dim. finita ammette una base ortonormale.

<u>Dim</u> sia $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

Gram-Schmidt $\rightsquigarrow$ $(t_1, \dots, t_n)$ ortogonali che generano V
(base)

Normalizziamo t_i

$$u_i = \frac{t_i}{\|t_i\|} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\|u_i\| = \frac{\|t_i\|}{\|t_i\|} = 1$$

$\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale

Corollario Sia V sp. vett. Euclideo di dim finita, e siano

$\{u_1, \dots, u_k\}$ vettori ortonormali.

Allora $\exists\ u_{k+1}, \dots, u_n \in V$ t.c.

$\{u_1, \dots, u_n\}$ base ortonormale di V

dove $n = \dim V$.

Dim $U := \mathrm{span}(u_1, \dots, u_k) \subset V$ sottosp. vett. $\rightsquigarrow U^\perp$

$$V = U \oplus U^\perp$$

$U^\perp$ ammette base ortonormale $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$

$\rightsquigarrow (u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale di V.

In pratica per trovare il completamento ortonormale si procede nel modo seguente.

$\{u_1, \dots, u_k\}$ si possono completare ad una base di V

$$\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

Gram - Schmidt (dal $(k+1)$-esimo)

$$t_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_i \rangle u_i$$

t_{k+2}

$\vdots$

t_n

$(\langle u_i, u_i \rangle = 1)$

$$u_j = \frac{t_j}{\|t_j\|} \quad , j = k+1, \dots, n$$

$\longrightarrow (u_1, \dots, u_n)$ ortonormale.

OSS $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ base ortonormale per $U^\perp$

$U = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_k)$

V sp. vett. Euclideo , $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ <u>base ortonormale</u> di V.

$v \in V \rightsquigarrow v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $x_i \in \mathbb{R}$.

$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$

$\langle v, u_i \rangle = x_i \langle u_i, u_i \rangle = x_i$

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i}$$

componente = proiezione (se la base è ortonormale)

$U \subset V \rightsquigarrow p_U : V \to U$ proiezione ortogonale

$p_U(v) = u$

$v \in V \rightsquigarrow \underline{v = u + u'}$ $u \in U$, $u' \in U^\perp$

in modo unico

$$V = U \oplus U^\perp$$

Se $\{u_1, \dots, u_k\}$ è base ortonormale di U allora

$$\boxed{p_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i}$$

Prop. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica e definita positiva. Allora A è congruente alla matrice identica I_n.

Dim. $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad b_A(X, Y) = {}^tX A Y$

b_A è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ $\Longrightarrow \exists\, (u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, b_A)$

La matrice di b_A rispetto alla base ortonormale è I_n

$\Longrightarrow A$ è congruente a I_n $\square$

$$S = (\underbrace{u_1 \; \dots \; u_n}_{\text{vett. colonne}}) = M^{\mathcal{E}}_{u} \rightsquigarrow T = S^{-1} = M^{u}_{\mathcal{E}}$$

$$\boxed{A = {}^tT\, I_n\, T = {}^tT\, T} \quad T \in GL_n(\mathbb{R})$$

Corollario $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica e definita $>0 \implies$

$\det A > 0$.

Dim $A = {}^tT\,T$ per una certa matrice $T \in GL_n(\mathbb{R})$

$\det A = \det({}^tT)\det T = (\det T)^2 > 0$.

OSS non vale il viceversa

Es $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $\det A = 15 > 0$ ma non è def >0

${}^te_1 A e_1 = -4$

Applicazioni simmetriche

$f \in \mathrm{End}\, V$, V sp. vett. Euclideo
$\dim V = n < \infty$

Def $f : V \longrightarrow V$ lineare è detta applicazione simmetrica (o autoaggiunta) se

$$\boxed{\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle}$$

$\forall\, v, w \in V$.

Prop. Sia V sp. vett. Euclideo, $n = \dim V$, e sia $f \in End(V)$.

Allora f è simmetrica $\Longleftrightarrow$ la matrice di f rispetto ad una base ortonormale è una matrice simmetrica.

Dim. $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale di V.

$$A = M_{\mathcal{U}}(f) \in M_n(\mathbb{R})$$

$$v \rightsquigarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad w \rightsquigarrow Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$f(v) \rightsquigarrow AX \qquad\qquad f(w) \rightsquigarrow AY$$

$$\langle f(v), w \rangle \overset{f \text{ simmetrica}}{=} \langle v, f(w) \rangle \quad \forall\, v, w \in V$$

$${}^t(AX) I_n Y = {}^tX\, {}^tA\, Y = {}^tX I_n A Y = {}^tX A Y \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n$$

f simmetrica $\Longleftrightarrow$ ${}^t X \, {}^t A \, Y = {}^t X A Y$

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow$ ${}^t A = A$ $\Longleftrightarrow$ A simmetrica

<u>OSS</u> non vale se la base non è ortonormale

Corollario Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice simmetrica reale. Allora

l'applicazione $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$L_A(X) = AX$$

è simmetrica rispetto al prodotto scalare canonico.

(la base canonica è ortonormale e $A = M_{\mathcal{E}}(L_A)$)

$\boxed{\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle}$ se A è simmetrica.

(prodotto scalare canonico)

Caso complesso

V sp. vett. complesso

$v \in V$, $\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \quad \gamma v = \alpha v + i \beta v.$

V può essere riguardato anche come spazio vett. reale.

$v + w$ è la stessa operazione

αv è la moltiplicazione scalare ristretta a $\mathbb{R} \times V$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{C}} V$ dim di V come sp. vett. $/\mathbb{C}$

$\dim_{\mathbb{R}} V$ dim di V come spazio vett. $/\mathbb{R}$

Se $(v_1, \dots, v_n)$ base di V in $\mathbb{C}$

$\rightsquigarrow (v_1, i v_1, \dots, v_n, i v_n)$ base di V $/\mathbb{R}$ $(*)$

$$\Longrightarrow \boxed{\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V}$$

Es $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$

$(z_1, \dots, z_n) \cong (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$

$$\boxed{z_j = x_j + i\, y_j}$$

Sia V sp. vett. complesso

Def Una forma Hermitiana è una funzione

$$h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.c.}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\gamma = \alpha + i\beta$

$\bar{\gamma} = \alpha - i\beta$

1) $h(v_1 + v_2, w) = h(v_1, w) + h(v_2, w)$

2) $h(v, w_1 + w_2) = h(v, w_1) + h(v, w_2)$

3) $h(\gamma v, w) = \bar{\gamma}\, h(v, w)$

4) $h(v, \gamma w) = \gamma\, h(v, w)$

5) $h(v, w) = \overline{h(w, v)}$

(1, 3) h è antilineare nel 1° argomento

(2, 4) h è lineare nel 2° argomento

(5) h è Hermitiana

<u>Es</u> $\mathbb{C}^n$

$$h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$h\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\right) := \bar{z}_1 w_1 + \dots + \bar{z}_n w_n =$$

$$= {}^t\bar{z}\, w$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$h(w, z) = {}^t\bar{w}\, z = \overline{\overline{{}^t({}^t\bar{w}\, z)}} = \overline{\overline{({}^t z \cdot \bar{w})}} =$$

$$= \overline{({}^t\bar{z}\, w)} = \overline{h(z, w)}$$

h è una forma Hermitiana su V $\Longrightarrow$

- $h(v,v) = \overline{h(v,v)}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{h(v,v) \in \mathbb{R}}$ $\forall v \in V$.

- $h(0_V, w) = h(w, 0_V) = 0$ $\forall w \in V$ (*)

Def Sia $h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma Hermitiana.

Diciamo che h è definita positiva se

$$h(v,v) > 0 \quad \forall v \neq 0_V$$

Una forma Hermitiana definita positiva è detta prodotto Hermitiano

(analogo complesso del prodotto scalare)

$$\boxed{h(v,w) =: \langle v, w \rangle}$$ se h è un prodotto Hermitiano

Es La forma Hermitiana canonica su $\mathbb{C}^n$

$$\langle X, Y \rangle = {}^t\bar{X}\, Y$$

è def. > 0

Infatti $\langle X, X \rangle = {}^t\bar{X}\, X = \bar{x}_1 x_1 + \cdots + \bar{x}_n x_n =$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \qquad = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \geq 0$$

$$\left(|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \right)$$

$$\boxed{\langle X, X \rangle > 0 \quad \forall X \in \mathbb{C}^n - \{0\}}$$

Vale $= \iff X = 0$