PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 3
Anno accademico 2020/2021 – CdL MATEMATICA
Seconda simulazione – 02.01.2021

1. Trovare tutte le soluzioni 2π-periodiche dell'equazione differenziale

$$u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = \sin t\,.$$

Svolgimento. L'equazione caratteristica $\lambda^2+2\lambda+2 = 0$ ha soluzioni $\lambda = -1\pm i$, pertanto le soluzioni dell'equazione autonoma associata sono del tipo

$$u(t) = e^{-t}(a\cos t + b\sin t)\,.$$

Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo per simiglianza. Se $u(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t$, facendo i conti vediamo che

$$u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = (\alpha + 2\beta)\cos t + (\beta - 2\alpha)\sin t\,,$$

per cui tale $u(t)$ sarà soluzione della nostra equazione se

$$\alpha + 2\beta = 0\,, \qquad \beta - 2\alpha = 1\,.$$

Risolvendo il sistema, si trova che deve essere

$$\alpha = -\frac{2}{5}\,, \qquad \beta = \frac{1}{5}\,.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è pertanto

$$u(t) = e^{-t}(a\cos t + b\sin t) - \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\,.$$

Questa funzione è periodica se e solo se $a = b = 0$. Si vede pertanto che l'*unica* soluzione periodica della nostra equazione differenziale è

$$u(t) = -\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\,,$$

ed essa è effettivamente 2π-periodica.

2. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = y^2 - 1 \\ y' = 1 - x^2\,. \end{cases}$$

Provare a disegnare le orbite nel piano delle fasi.

Svolgimento. Ci sono quattro punti di equilibrio: $(\pm 1, \pm 1)$. La matrice jacobiana di $f(x, y) = (y^2 - 1, 1 - x^2)$ è

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ -2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamone gli autovalori nei punti $(\pm 1, \pm 1)$:

$$\begin{aligned}
Jf(-1,-1) &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2i\,, \\
Jf(-1,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2\,, \\
Jf(1,-1) &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2\,, \\
Jf(1,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2i\,.
\end{aligned}$$

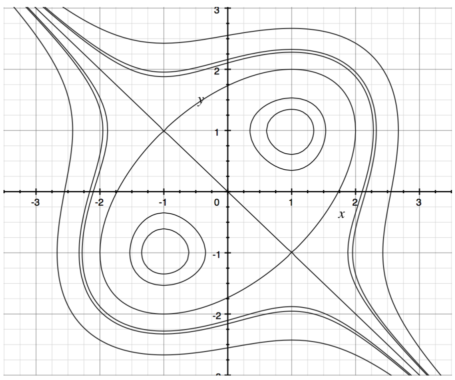
Pertanto, i due equilibri $(-1, 1)$ e $(1, -1)$ sono instabili, mentre per gli altri due non si può ancora conludere. Facciamo allora ricorso alla funzione hamiltoniana

$$H(x,y) = \tfrac{1}{3}x^3 - x + \tfrac{1}{3}y^3 - y\,.$$

La sua matrice hessiana è

$$H''(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

e vediamo che in $(1, 1)$ è definita positiva, mentre in $(-1, -1)$ è definita negativa. La funzione hamiltoniana ha pertanto in $(1, 1)$ un punto di minimo, ed è strettamente convessa in un intorno di tale punto. Essa ha invece in $(-1, -1)$ un punto di massimo, ed è strettamente concava in un intorno di tale punto. In entrambi i casi, le sue linee di livello in un intorno di $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ sono curve chiuse, per cui questi punti sono equilibri stabili.



3. Calcolare il volume del solido

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 25\,,\ z \ge 1 - \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

<u>Svolgimento</u>. Passiamo a coordinate cilindriche usando la funzione

$$\begin{aligned} &\varphi : [0,+\infty[\,\times[0,2\pi]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\\ &\varphi(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,. \end{aligned}$$

Otteniamo l'insieme

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(E) = &\left\{(\rho,\theta,z) : z \in [-3,1]\,,\ 1-z \le \rho \le \sqrt{25-z^2}\right\} \cup \\ &\cup \left\{(\rho,\theta,z) : z \in [1,5]\,,\ 0 \le \rho \le \sqrt{25-z^2}\right\}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} |E| &= \int_{\varphi^{-1}(E)} \rho\,d\rho\,d\theta\,dz \\ &= \int_0^{2\pi}\Big(\int_{-3}^{1}\Big(\int_{1-z}^{\sqrt{25-z^2}} \rho\,d\rho\Big)dz\Big)d\theta + \int_0^{2\pi}\Big(\int_1^5\Big(\int_0^{\sqrt{25-z^2}} \rho\,d\rho\Big)dz\Big)d\theta \\ &= \pi\int_{-3}^{1}[(25-z^2)-(1-z)^2]\,dz + \pi\int_1^5 (25-z^2)\,dz \\ &= \pi\left([25z-\tfrac{1}{3}z^3]_{-3}^{5} + [\tfrac{1}{3}(1-z)^3]_{-3}^{1}\right) \\ &= 128\,\pi\,. \end{aligned}$$

4. Sia $\omega : \mathbb{R}^3 \to \Omega_1(\mathbb{R}^3)$ la 1-forma differenziale definita da

$$\omega(x,y,z) = yz(9x^2-2y^2+z^2)\,dx + xz(3x^2-6y^2+z^2)\,dy + xy(3x^2-2y^2+3z^2)\,dz\,,$$

e sia $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\gamma(t) = (t^2, 1-t, 3t)\,.$$

a) Dimostrare che ω è chiusa.

b) Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $df = \omega$.

c) Facendo uso del Teorema di Stokes–Cartan, calcolare $\int_\gamma \omega$ in due modi diversi.

<u>Svolgimento</u>. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo di vettori associato a ω, dato da

$$F(x,y,z) = \Big(yz(9x^2-2y^2+z^2)\,,\ xz(3x^2-6y^2+z^2)\,,\ xy(3x^2-2y^2+3z^2)\Big).$$

Calcoliamo $\mathrm{rot}F(x,y,z)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}[xy(3x^2-2y^2+3z^2)] - \frac{\partial}{\partial z}[xz(3x^2-6y^2+z^2)] = 0\,,\\ &\frac{\partial}{\partial z}[yz(9x^2-2y^2+z^2)] - \frac{\partial}{\partial x}[xy(3x^2-2y^2+3z^2)] = 0\,,\\ &\frac{\partial}{\partial x}[xz(3x^2-6y^2+z^2)] - \frac{\partial}{\partial y}[yz(9x^2-2y^2+z^2)] = 0\,, \end{aligned}$$

per cui $\mathrm{rot}F(x,y,z) = (0,0,0)$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Il campo F è pertanto irrotazionale, ossia ω è chiusa. Per il Teorema di Poincaré, essendo il dominio stellato, esiste una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{grad}f = F$, ossia $df = \omega$. Facendo uso della formula vista a lezione, troviamo

$$
\begin{aligned}
&f(x,y,z) = \int_0^1 F(tx,ty,tz)\cdot(x,y,z)\,dt\\
&= \int_0^1 t^4[yz(9x^2-2y^2+z^2)x + xz(3x^2-6y^2+z^2)y + xy(3x^2-2y^2+3z^2)z]\,dt\\
&= \tfrac{1}{5}\,xyz(9x^2-2y^2+z^2+3x^2-6y^2+z^2+3x^2-2y^2+3z^2)\\
&= 3x^3yz - 2xy^3z + xyz^3.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo ora $\int_\gamma \omega$ in due modi diversi. Per via diretta: essendo

$$
\begin{aligned}
F(\gamma(t)) = (\; &-27t^6+27t^5-21t^4+9t^3+18t^2-6t,\\
&9t^7+9t^5+36t^4-18t^3,\\
&-3t^7+3t^6-25t^5+21t^4+6t^3-2t^2)\,,
\end{aligned}
$$

e

$$
\gamma'(t) = (2t,-1,3)\,,
$$

si trova

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_{-1}^1 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\
&= \int_{-1}^1 (-72t^7+63t^6-126t^5+45t^4+72t^3-18t^2)\,dt\\
&= 2\int_0^1 (63t^6+45t^4-18t^2)\,dt\\
&= 2\,[9t^7+9t^5-6t^3]_0^1 = 2\cdot 12 = 24\,.
\end{aligned}
$$

D'altra parte, facendo uso della formula di Stokes–Cartan,

$$
\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(-1)) = f(1,0,3) - f(1,2,-3) = 0-(-24) = 24\,.
$$