

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 3
Anno accademico 2020/2021 – CdL MATEMATICA
Seconda simulazione – 02.01.2021

1. Trovare tutte le soluzioni 2π -periodiche dell'equazione differenziale

$$u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = \sin t.$$

2. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = y^2 - 1 \\ y' = 1 - x^2. \end{cases}$$

Provare a disegnare le orbite nel piano delle fasi.

3. Calcolare il volume del solido

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \geq 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

4. Sia $\omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Omega_1(\mathbb{R}^3)$ la 1-forma differenziale definita da

$$\omega(x, y, z) = yz(9x^2 - 2y^2 + z^2) dx + xz(3x^2 - 6y^2 + z^2) dy + xy(3x^2 - 2y^2 + 3z^2) dz,$$

e sia $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\gamma(t) = (t^2, 1 - t, 3t).$$

- a) Dimostrare che ω è chiusa.
b) Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $df = \omega$.
c) Facendo uso del Teorema di Stokes–Cartan, calcolare $\int_{\gamma} \omega$ in due modi diversi.