Geometria 1 per Matematica e IADA

Foglio di esercizi 12

10 gennaio 2021

1) Siano $v_1 = {}^t(1, 0, -1, 2)$, $v_2 = {}^t(0, 2, 2, 1)$ vettori di $\mathbb{R}^4$. Mostrare che sono ortogonali, e dopo averli normalizzati completarli ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$. Scrivere le componenti di $w = (1, 1, 1, 1)$ rispetto a tale base. Posto $U = \mathrm{span}(v_1, v_2)$, scrivere la matrice della proiezione ortogonale $p_U : V \to V$ su $U \subset V$, rispetto alla base canonica.

2) Dimostrare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

è definita positiva e considerare il prodotto scalare determinato da A su $\mathbb{R}^3$. Trovare una base ortonormale rispetto a questo prodotto scalare. Trovare una matrice invertibile S tale che $A = {}^tSS$. Scrivere la proiezione ortogonale su $\mathrm{span}(e_1, e_2)$.

3) Siano $A, P \in M_n(\mathbb{R})$ con A simmetrica e definita positiva. Dimostrare che l'applicazione lineare $L_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $L_P(X) = PX$, è simmetrica rispetto al prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ determinato dalla matrice A se e solo se AP è una matrice simmetrica.