domenica 10 gennaio 2021 15:53

FOGLIO 10

① $\begin{cases} b: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) \longmapsto 2\,\mathrm{Re}(z_1 z_2). \end{cases}$

(i) b bilineare e simmetrica su $\mathbb{C}$ visto come sp. vett. su $\mathbb{R}$?

! $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ $\Rightarrow$ $z_1 z_2 = (a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$.

$\Rightarrow b(z_1, z_2) = 2a_1a_2 - 2b_1b_2$.

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$b(z_1, z_2) = 2\,\mathrm{Re}(z_1 z_2) = 2\,\mathrm{Re}(z_2 z_1) = b(z_2, z_1)$ ✓ (b SIMMETRICA).

- $\forall x, z, w \in \mathbb{C}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$b(\lambda x + \mu z, w) = 2\,\mathrm{Re}(\lambda x w + \mu z w) = 2\lambda\,\mathrm{Re}(xw) + 2\mu\,\mathrm{Re}(zw) = \lambda b(x,w) + \mu b(z,w)$.

$b(x, \lambda z + \mu w) = 2\,\mathrm{Re}(\lambda x z + \mu x w) = 2\lambda\,\mathrm{Re}(xz) + 2\mu\,\mathrm{Re}(xw) = \lambda b(x,z) + \mu b(x,w)$.

$\rightsquigarrow$ b bilineare ✓.

(ii) $\mathcal{B} = (1, i)$ base di $\mathbb{C}$ come sp. vett. reale. $M_{\mathcal{B}}(b)$?

$$M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} b(1,1) & b(1,i) \\ b(i,1) & b(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{Re}(1) & 2\,\mathrm{Re}(i) \\ 2\,\mathrm{Re}(i) & 2\,\mathrm{Re}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(iii) $\mathcal{C} = (z_1, z_2)$ base di $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\det(M_{\mathcal{C}}(b)) = \left(\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar z_1 & \bar z_2 \end{pmatrix}\right)^2$?

$$\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar z_1 & \bar z_2 \end{pmatrix} = z_1\bar z_2 - \bar z_1 z_2 = z_1\bar z_2 - \overline{z_1\bar z_2} = 2i\,\mathrm{Im}(z_1\bar z_2).$$

$z_1\bar z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2)$

$$\Rightarrow \left(\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar z_1 & \bar z_2 \end{pmatrix}\right)^2 = -4(a_2b_1 - a_1b_2)^2.$$

$$\det(M_{\mathcal{C}}(b)) = \det\begin{pmatrix} b(z_1,z_1) & b(z_1,z_2) \\ b(z_2,z_1) & b(z_2,z_2) \end{pmatrix}.$$

DAL ! ALL'INIZIO $\Rightarrow$ $b(z_1,z_1) = 2(a_1^2 - b_1^2)$
$b(z_1,z_2) = 2a_1a_2 - 2b_1b_2$
$b(z_2,z_2) = 2(a_2^2 - b_2^2)$

$$\Rightarrow \det(M_{\mathcal{C}}(b)) = \begin{vmatrix} 2(a_1^2 - b_1^2) & 2a_1a_2 - 2b_1b_2 \\ 2a_1a_2 - 2b_1b_2 & 2(a_2^2 - b_2^2) \end{vmatrix} = 4(a_1^2a_2^2 - a_1^2b_2^2 - a_2^2b_1^2 + b_1^2b_2^2) -$$
$$- 4(a_1a_2 - b_1b_2)^2 = (\text{CALCOLI}\dots) = -4(a_2b_1 - a_1b_2)^2 \checkmark\checkmark\checkmark.$$

② $A \in M(2\times2, \mathbb{R})$ simmetrica $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile (su autovalori reali).

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 \underset{\text{COMPLETIAMO IL QUADRATO}}{=} \lambda^2 - (a+c)\lambda + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + ac - b^2 =$

$= \left(\lambda - \frac{a+c}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4} - \frac{ac}{2} + ac - b^2.$

$\Rightarrow p_A(\lambda) = 0 \iff \left(\lambda - \frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + c^2 + 4b^2 - 2ac}{4} = \frac{(a-c)^2 + 4b^2}{4}$

$\iff \lambda = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{(a-c)^2 + 4b^2}{4}}_{\geq 0}}$ $\rightsquigarrow$ A HA DUE AUTOVALORI REALI λ_+, λ_- A SECONDA DEL SEGNO.

$\lambda_+ = \lambda_- \iff \frac{(a-c)^2 + 4b^2}{4} = 0 \iff (a-c)^2 = -4b^2 \iff \begin{cases} a - c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = c \\ b = 0 \end{cases} \iff A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ DIAGONALE ✓.

ALTRIMENTI, A È 2x2 E HA DUE AUTOVALORI DISTINTI $\Rightarrow$ È DIAGONALIZZABILE ✓✓✓.

③ $A = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ k & 0 & k \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$, $h, k \in \mathbb{R}$ PARAMETRI. DETERMINARE GLI AUTOVALORI DI A;

PER QUALI VALORI DI h E K A È DIAGONALIZZABILE? IN QUESTI CASI, DETERMINARE LE DIMENSIONI DEGLI AUTOSPAZI.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & h & 0 \\ k & -\lambda & k \\ 0 & h & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & k \\ h & -\lambda \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} k & k \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$= -\lambda(\lambda^2 - hk) - h(-\lambda k + 0) = -\lambda^3 + 2\lambda hk = -\lambda(\lambda^2 - 2hk) \Rightarrow$ A HA SICURAMENTE AUTOVALORE 0. (DATO DAL FATTORE $-\lambda$). ALTRI?

3 CASI

- $h \cdot k < 0 \Rightarrow 2hk < 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2hk > 0\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ A HA SOLO L'AUTOVALORE 0 E NON È DIAGONALIZZABILE
- $h \cdot k > 0 \Rightarrow 2hk > 0 \Rightarrow \left[\lambda^2 - 2hk = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{2hk}\right] \Rightarrow$ A HA 3 AUTOVALORI DISTINTI $\rightarrow$ È DIAGONALIZZABILE, E TUTTI GLI AUTOSPAZI HANNO DIM. 1 ✓
- $hk = 0 \Rightarrow p_A(\lambda) = -\lambda^3 \Rightarrow \left[A \text{ DIAGONALIZZABILE} \iff \dim\begin{pmatrix}\text{AUTOSP.} \\ \text{DI } 0\end{pmatrix} = 3 \iff A = 0\right]$

$\Rightarrow$ Nel terzo caso, [A è diag. $\iff h = k = 0$] E IL SUO UNICO AUTOSPAZIO HA DIM. 3 ✓✓✓.

④ $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ endomorfismo con autovalori 1 e −3, e con autospazi

$\mathrm{Aut}(1) = \langle e_1 + e_3, e_2 - e_4 \rangle$, $\mathrm{Aut}(3) = \langle e_1 - e_3, 2e_1 + e_2 + e_4 \rangle$.

- $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T)$, con $\mathcal{C}$ la base canonica? • T diagonalizzabile?

RISPONDIAMO PRIMA ALLA SECONDA DOMANDA: Se $\mathcal{B} = \{e_1 + e_3, e_2 - e_4, e_1 - e_3, 2e_1 + e_2 + e_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, allora T è diag., con $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -3 & \\ 0 & & & -3 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{B}$ base $\underset{\text{E SCRIVIAMO IN COMPONENTI RISPETTO ALLA BASE CANONICA}}{\iff}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono l.i. $\iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{SVILUPPO 1ª RIGA}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{SVILUPPO 2ª RIGA}}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \checkmark.$$

TROVIAMO ORA $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T)$.

SCRIVIAMO e_1, e_2, e_3, e_4 IN FUNZIONE DI
$\mathcal{B} = \{e_1 + e_3, e_2 - e_4, e_1 - e_3, 2e_1 + e_2 + e_4\}$.

$e_1 = \frac{1}{2}[(e_1 + e_3) + (e_1 - e_3)] = \frac{1}{2}(e_1 + e_3) + \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$

$e_2 = \frac{1}{2}[(2e_1 + e_2 + e_4) + (e_2 - e_4) - 2e_1] = \frac{1}{2}[(2e_1 + e_2 + e_4) + (e_2 - e_4) - [(e_1 + e_3) + (e_1 - e_3)]]$

$\rightsquigarrow e_2 = -\frac{1}{2}(e_1 + e_3) + \frac{1}{2}(e_2 - e_4) - \frac{1}{2}(e_1 - e_3) + \frac{1}{2}(2e_1 + e_2 + e_4)$;

$e_3 = \frac{1}{2}(e_1 + e_3) - \frac{1}{2}(e_1 - e_3)$

$e_4 = -(e_2 - e_4) + e_2 = -\frac{1}{2}(e_1 + e_3) - \frac{1}{2}(e_2 - e_4) - \frac{1}{2}(e_1 - e_3) + \frac{1}{2}(2e_1 + e_2 + e_4)$.

ORA, PER LINEARITÀ DI f E SAPENDO CHE
$f(e_1 + e_3) = e_1 + e_3$, $f(e_2 - e_4) = e_2 - e_4$ (DATO CHE APPARTENGONO A Aut(1))
$f(e_1 - e_3) = -3(e_1 - e_3)$, $f(e_1 + e_2 + 2e_4) = -3(e_1 + e_2 + 2e_4)$ (VISTO CHE APPARTENGONO A Aut(3))

$\Rightarrow f(e_1) = \frac{1}{2} f((e_1 + e_3)) + \frac{1}{2} f((e_1 - e_3)) =$
$= \frac{1}{2}(e_1 + e_3) + \frac{1}{2}(-3e_1 + 3e_3) = -e_1 + 2e_3$;

$f(e_2) = -\frac{1}{2}(e_1 + e_3) + \frac{1}{2}(e_2 - e_4) + \frac{3}{2}(e_1 - e_3) - \frac{3}{2}(2e_1 + e_2 + e_4) =$
$= -2e_1 - e_2 - 2e_3 - 2e_4$

$f(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3) + \frac{3}{2}(e_1 - e_3) = 2e_1 - e_3$

$f(e_4) = -\frac{1}{2}(e_1 + e_3) - \frac{1}{2}(e_2 - e_4) + \frac{3}{2}(e_1 - e_3) - \frac{3}{2}(2e_1 + e_2 + e_4) =$
$= -2e_1 - 2e_2 - 2e_3 - e_4.$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \checkmark\checkmark\checkmark$$

⑤ ⓐ STABILIRE QUALI DELLE SEGUENTI FORME

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ SONO SESQUILIN. HERMITIANE,

E SE LO SONO DIRE SE SONO PROD. SCALARI E SCRIVERE LE LORO MATRICI RISPETTO ALLA BASE CANONICA DI $\mathbb{C}^2$.

- $\langle z, w \rangle = z_1 w_1 - i z_1 w_2 + i z_2 w_1$.

$\langle \lambda z + \mu z', w \rangle = (\lambda z_1 + \mu z_1')w_1 - i(\lambda z_1 + \mu z_1')w_2 + i(\lambda z_2 + \mu z_2')w_1 =$
$= \lambda \langle z, w \rangle + \mu \langle z', w \rangle$. $(\forall z, z' \in \mathbb{C}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C})$

$\langle w, z \rangle = w_1 z_1 - i w_1 z_2 + i w_2 z_1$.

$\overline{\langle z, w \rangle} = \bar z_1 \bar w_1 + i \bar z_1 \bar w_2 - i \bar z_2 \bar w_1 \Rightarrow \langle w, z \rangle \neq \overline{\langle z, w \rangle}$.

$\Rightarrow$ Questo non è sesquilineare hermitiano. In effetti non è nemmeno sesquilineare (perché è lineare in z.)

- $\langle z, w \rangle = \bar z_1 w_1 - i \bar z_1 w_2 - i \bar z_2 w_1$.

$\left.\begin{array}{l} \langle w, z \rangle = \bar w_1 z_1 - i \bar w_1 z_2 - i \bar w_2 z_1 \\ \overline{\langle z, w \rangle} = z_1 \bar w_1 + i z_1 \bar w_2 + i z_2 \bar w_1 \end{array}\right] \rightarrow \langle w, z \rangle \neq \overline{\langle z, w \rangle}$.

SI VERIFICA $\langle \lambda z + \mu z', w \rangle = \bar\lambda \langle z, w \rangle + \bar\mu \langle z', w \rangle\ \forall z, z' \in \mathbb{C}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$
$\langle z, \lambda w + \mu w' \rangle = \lambda \langle z, w \rangle + \mu \langle z, w' \rangle\ \forall w, w' \in \mathbb{C}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ è sesquilineare ma non Hermitiano.

- $\langle z, w \rangle = \bar z_1 w_1 - i \bar z_1 w_2 + i \bar z_2 w_1$.

SI VERIFICA LA SESQUILINEARITÀ ✓. (ANTILINEARITÀ IN z + LINEARITÀ IN w).

$\overline{\langle z, w \rangle} = z_1 \bar w_1 + i z_1 \bar w_2 - i z_2 \bar w_1 = \langle w, z \rangle$ ✓.

$\Rightarrow$ SESQUILINEARE HERMITIANO.

PROD. SCALARE $\iff \langle z, z \rangle \geq 0\ \forall z \in \mathbb{C}^2$, e $\langle z, z \rangle = 0 \iff z = 0$.

$\langle z, z \rangle = z_1 \bar z_1 + i z_1 \bar z_2 - i z_2 \bar z_1 = |z_1|^2 + i(z_1 \bar z_2 - \overline{z_1 \bar z_2}) =$
$= |z_1|^2 + i(2i\,\mathrm{Im}(z_1 \bar z_2)) = |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Im}(z_1 \bar z_2)$.

PONIAMO $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$. ALLORA:

$\langle z, z \rangle = a^2 + b^2 - 2\,\mathrm{Im}((a+ib)(c-id)) = a^2 + b^2 - 2(bc - ad)$.

PONIAMO $a = 0$, $b = c = d = 1 \Rightarrow \langle z, z \rangle = 0 + 1 - 2(1\cdot1 - 0\cdot1) = 1 - 2 = -1 < 0$

$\Rightarrow$ NON È UN PRODOTTO SCALARE.

(Se lo fosse stato, la matrice associata alla base canonica $\{(1,0), (0,1)\}$ di $\mathbb{C}^2$ sarebbe stata $\begin{pmatrix} \langle (1,0), (1,0) \rangle & \langle (1,0), (0,1) \rangle \\ \langle (0,1), (1,0) \rangle & \langle (0,1), (0,1) \rangle \end{pmatrix}$.)

ⓑ CONSIDERIAMO LE SEGUENTI FORME $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

SONO SIMMETRICHE E BILINEARI? PRODOTTI SCALARI?

- $\langle x, y \rangle = x_1^2 + x_2 y_2 - 2y_3^2$. NON È LINEARE IN X NÉ IN Y, E NON È SIMMETRICA.

- $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 4x_3y_3$.

È CHIARAMENTE SIMMETRICA, E SI DIMOSTRA FACILMENTE ESSERE LINEARE IN X E Y ($\langle \lambda x + \mu x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x', y \rangle$ E $\langle x, \lambda y + \mu y' \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, y' \rangle$ $\forall x, x', y, y' \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ TRAMITE SEMPLICI CONTI.)

- $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_3$.

SI VERIFICA ESSERE BILINEARE MA NON SIMMETRICA (IL PROBLEMA STA IN "$+x_1y_2 - x_2y_1$").