ESERCIZI DI GEOMETRIA, FOGLIO 11

Trieste, 11 gennaio 2021

1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Fissato $v \in V$, si definisca $\varphi_v : V \to \mathbb{R}$ l'applicazione $\varphi_v(w) = \langle v, w \rangle$, per ogni $w \in V$.
   (i) Dimostrare che φ_v è lineare, e quindi $\varphi_v \in V^*$;
   (ii) dimostrare che $\varphi : V \to V$ definita da $\varphi(v) = \varphi_v$ è lineare;
   (iii) dimostrare che φ è iniettiva. Se la dimensione di V è finita allora è anche suriettiva e quindi un isomorfismo.

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si fissi il prodotto scalare standard. Si consideri il sottospazio vettoriale
$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_3 - 3x_4 = x_1 + x_2 - x_3 = 0\};$$
si calcoli una base ortonormale di W e la si completi a una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

3. a) Dati $x_0 = (1 + \sqrt{2})e_1 + e_3, y_0 = -e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^3$, calcolare la norma di x_0 e l'angolo convesso fra x_0 e y_0 rispetto al prodotto scalare
$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 3x_3y_3.$$
   b) Rispetto allo stesso prodotto scalare, trovare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ con $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (3, 1, 1)$, completarla a una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$, e calcolare le coordinate di $v_0 = e_1 + 2e_2$ rispetto a $\mathcal{B}$.

4. Può esistere un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $\mathbb{R}^2$ tale che
$$\langle (1, -1), (2, 3) \rangle = 5, \ \langle (4, -4), (-4, -6) \rangle = -1?$$