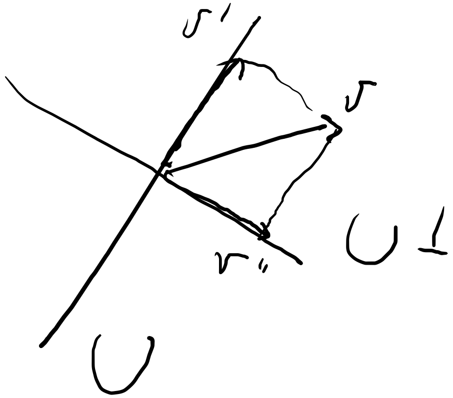
$U \subset V$ $\quad$ V sp. vett. Euclideo

sottosp. vett.

$P_U : V \longrightarrow U \subset V$



$\{u_1, \dots, u_k\}$ base ortonormale di U

$$\boxed{P_U(v) \overset{?}{=} \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k}$$

$P_U(v) = v' \in U$ t.c. $\exists\, v'' \in U^\perp$ con $v = v' + v''$

Posto $v' = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i$ $\qquad$ $\underline{v - v' \in U^\perp}$

$$\langle v - v', u_j \rangle = \langle v, u_j \rangle - \underline{\langle v', u_j \rangle} =$$

$$= \langle v, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \underline{\langle v, u_i \rangle} \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{= \delta_{ij}} = \langle v, u_j \rangle - \langle v, u_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow \underline{v - v'} \in U^{\perp}$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (caso complesso)

Sia V sp. vett. complesso Hermitiano. Allora $\forall\, v, w \in V$ si ha

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\| \qquad \left(\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}\right)$$

(modulo) $\qquad |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

$z = a+ib$

$a, b \in \mathbb{R}$.

Inoltre vale l'uguaglianza $\Longleftrightarrow$ v e w sono linearmente dipendenti.

$(w \neq 0) \qquad (w = 0$ banale$)$

$$\alpha = -\frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\|w\|^2}$$

Dim

$$0 \leq \langle v+\alpha w, v+\alpha w\rangle = \langle v, v\rangle + \alpha\langle v, w\rangle + \bar{\alpha}\langle w, v\rangle + |\alpha|^2\langle w, w\rangle$$

$$= \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2} - \cancel{\frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2}} + \cancel{\frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2}}$$

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$$

Inoltre se vale $=$ $\Longrightarrow$ $v + \alpha w = 0$ $\Longrightarrow$ v, w lin dip.

Viceversa, se v, w lin dip. allora uno dei due è multiplo dell'altro

A meno di scambiare v e w possiamo assumere che

$$\underline{v = \lambda w}$$

$$|\langle v, w\rangle| = |\langle \lambda w, w\rangle| = |\bar{\lambda} \langle w, w\rangle| = \underline{|\lambda| \|w\|^2} \quad (1^\circ \text{ membro})$$

2° membro: $\|v\| \|w\| = \|\lambda w\| \|w\| = \underline{|\lambda| \|w\|^2}$ ✓

Conseguenze 1) disuguaglianza triangolare

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$$

distanza: posto $d(v,w) \overset{\text{def}}{=} \|v-w\|$

si ha $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$

$(*)$

Angolo siano $v, w \neq 0_V$ $\rightsquigarrow \cos \widehat{vw} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\operatorname{Re}\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$

$$\widehat{vw} = \arccos \frac{\operatorname{Re}\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \in [0,\pi]$$

$$|\operatorname{Re}\langle v,w\rangle| \leq |\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$$

Def $v, w \in V$ sono detti vettori ortogonali se

$$\langle v, w \rangle = 0$$

Es $\mathbb{C}^n$ col prod. Hermitiano canonico

$$\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{kj}$$

Def Un insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ di vettori di V è detto

1) ortogonale se $\langle v_h, v_j \rangle = 0 \quad \forall\, h \neq j$

2) ortonormale se $\langle v_h, v_j \rangle = \delta_{hj} \quad \forall\, h, j$.

Prop. Se $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ sono ortogonali e non nulli allora sono linearmente indipendenti. $\otimes$

Def $U, W \subset V$ sottosp. vett. U, W sono sotto. ortogonali

se $\langle u, w \rangle = 0 \quad \forall u \in U, \ \forall w \in W$.

Def $U \subset V$ sottosp. vett. $\rightsquigarrow U^{\perp} \stackrel{def}{=} \{ v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U \}$

Prop. $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$ (se $\dim V < \infty$)

e $\boxed{V = U \oplus U^{\perp}}$

Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (caso complesso)

(uguale al caso reale)

$v_1, \dots, v_k \in V$ vettori lin. indip. $\rightsquigarrow$ $u_1, \dots, u_k$ ortonormali

$$t_1 = v_1$$

$$t_h = v_h - \sum_{j=1}^{h-1} \frac{\overline{\langle v_h , t_j \rangle}}{\langle t_j , t_j \rangle} t_j \quad , \quad h \geq 2$$

$t_1, \dots, t_k$ ortogonali e $\neq 0$ $\rightsquigarrow$ $u_h = \dfrac{t_h}{\| t_h \|}$

Corollario: Ogni spazio vett. Hermitiano di dim finita ammette base ortonormale.

OSS: Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ è base ortonormale di V allora $\forall\, v \in V$ si scrive come

$$v = \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle v, u_j \rangle}\, u_j$$

$P_U : V \longrightarrow U \subset V$ proiez. ortogonale

Def Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è detta matrice Hermitiana se $\boxed{{}^t\bar{A} = A}$ (analoga delle matrici simmetriche reali)

OSS $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica $\Rightarrow$ A Hermitiana.

Notazione spesso si usa la notazione

$$\boxed{A^* := {}^t\bar{A}}$$

Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ è Hermitiana allora

$$b_A : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$b_A(X, Y) = {}^t\bar{X} A Y$$

è una forma Hermitiana (*)

ES

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Hermitiana def. > 0 (*)

OSS A Hermitiana $\Rightarrow$ $a_{jj} \in \mathbb{R}$ $\forall j$

<u>Def</u> $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrice Hermitiana. Allora A è definita positiva se $b_A : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ è def. > 0.

${}^t\bar{Z} A Z > 0 \quad \forall Z \neq 0$ (prodotto Hermitiano su $\mathbb{C}^n$)

Prop. Sia $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ forma Hermitiana, e sia

$\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V. Allora posto

$$A = (a_{kj}) \quad \text{con } a_{kj} = \langle v_k, v_j \rangle$$

si ha

$$b(v, w) = {}^t\bar{X} A Y$$

con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ coord. di v

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ coord di w

$\Big\}$ rispetto alla base $\mathcal{V}$.

Inoltre A è una matrice Hermitiana $\circledast$

Cambio di base

$\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$
$\mathcal{V}' = (v_1', \dots, v_n')$ basi di V

$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ forma Hermitiana

$\rightsquigarrow$ A matrice di b rispetto a $\mathcal{V}$ $\quad a_{kj} = \langle v_k, v_j \rangle$

A' " " " " " $\mathcal{V}'$ $\quad a'_{kj} = \langle v_k', v_j' \rangle$

Sia $S \in GL_n(\mathbb{C})$ matrice del cambiamento di base da $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{V}$

$v \rightsquigarrow \begin{cases} X & \text{rispetto a } \mathcal{V} \\ X' & \text{" " } \mathcal{V}' \end{cases}$

$w \rightsquigarrow \begin{cases} Y & \text{rispetto a } \mathcal{V} \\ Y' & \text{rispetto a } \mathcal{V}' \end{cases}$

$\underline{X = S X'}$, $\underline{Y = S Y'}$

$b(v,w) = {}^t\overline{X} A Y = {}^t\overline{(S X')} A S Y' =$

$\underbrace{{}^t\overline{X'} A' Y'}_{\shortparallel} = = {}^t\overline{X'} \, {}^t\overline{S} A S \, Y'$ $\quad \forall X', Y' \in \mathbb{C}^n$

$$\boxed{A' = {}^t\bar{S} A S}$$

Congruenza complessa

relazione d'equivalenza

$S \in GL_n(\mathbb{C})$

<u>Corollario</u> Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ Hermitiana definita positiva.

Allora $\exists\, S \in GL_n(\mathbb{C})$ t.c. $A = {}^t\bar{S}\, S$.

In particolare $\det A > 0$.

Dim $b_A : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ è un prodotto Hermitiano

$$b_A(X,Y) = {}^t\bar{X} A Y$$

$\Longrightarrow \exists$ base ortonormale di $(\mathbb{C}^n, b_A)$

$\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$

$T = (u_1 \dots u_n)$ vett. colonne

$S = T^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$ matrice del cambio di base da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{U}$

La matrice di b_A rispetto a $\mathcal{U}$ è I_n $\Longrightarrow A = {}^t\bar{S} I_n S = {}^t\bar{S} S$. $\det A = \det {}^t\bar{S} \det S = \overline{\det S} \det S = |\det S|^2 > 0$

Def Sia V sp. vett. complesso Hermitiano, sia

$$f : V \longrightarrow V \quad \text{endomorfismo}$$

Diciamo che f è autoaggiunta se

$$\boxed{\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle}$$

$\forall\, v, w \in V$.

OSS Sono gli analoghi complessi delle applicazioni simmetriche.

Prop. $f : V \to V$ endomorfismo. Allora f è auto-aggiunta se e solo se $M_{\mathcal{V}}(f) \in M_n(\mathbb{C})$ è matrice Hermitiana rispetto a $\mathcal{V}$ base ortonormale.

Dim $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base ortonormale $A = M_{\mathcal{V}}(f)$

$v \rightsquigarrow X$, $w \rightsquigarrow Y$ $\qquad f(v) \rightsquigarrow AX$, $f(w) \rightsquigarrow AY$

$$\langle f(v), w \rangle = {}^t\overline{(AX)}\, Y = {}^t\overline{X}\, {}^t\overline{A}\, Y$$

f autoagg. $\Longleftrightarrow$ $\qquad \| \qquad \forall X, Y \in \mathbb{C}^n$

$$\langle v, f(w) \rangle = {}^t\overline{X}\, A\, Y$$

$\Rightarrow$ f autoagg. $\Longleftrightarrow A = {}^t\overline{A}$

Corollario. Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ è Hermitiana allora

si ha in $\mathbb{C}^n$ rispetto al prodotto Hermitiano canonico

$$\underline{\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle} \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}^n$$

$$L_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \quad \text{è } \underline{\text{autoaggiunta}}$$

$$X \longmapsto AX$$

Proposizione Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrice Hermitiana. Allora gli autovalori di A sono tutti reali.

Dim Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\left(P_A(\lambda) = 0 \right)$

$P_A(x) = \det(A - x I_n)$

sia $X \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ autovettore relativo a λ

$AX = \lambda X$

$\|X\| \neq 0$

$$\langle AX, X \rangle = \langle \lambda X, X \rangle = \bar{\lambda} \langle X, X \rangle = \bar{\lambda} \|X\|^2$$

(prod Hermitiano canonico di $\mathbb{C}^n$)

Hermitiana

$$= \langle X, AX \rangle = \langle X, \lambda X \rangle = \lambda \|X\|^2$$

$$\Longrightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \in \mathbb{R}.$$

Corollario $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice simmetrica $\Longrightarrow$

tutti gli autovalori (su $\mathbb{C}$) di A sono reali.

$$ {}^t\bar{A} = A $$