Soluzione Esercizio 1

I La funzione $\alpha^{-z} = e^{-z\log(\alpha)}$ è intera, con una singolarità essenziale a $z = \infty$. Quindi per la funzione $f_\alpha(z)$ le uniche singolarità a z finito sono dovute ai poli semplici della funzione Γ, che si accumulano a $z = \infty$, per cui $z = \infty$ non è una singolarità isolata per $f_\alpha(z)$. I residui sono semplicemente ottenuti moltiplicando il valore della funzione α^{-z} al polo, per il residuo della funzione Γ, dunque abbiamo

$$\mathrm{Res}_{f_\alpha}(-k) = \frac{(-1)^k \alpha^k}{k!} \ .$$

II L'integrale non dipende da $c > 0$ perché la funzione f_α non ha singolarità nel semipiano $\mathrm{Re}(z) > 0$ e quindi possiamo liberamente deformare il cammino di integrazione, cambiando il valore dell'ascissa c, senza cambiare il valore dell'integrale.

Equivalentemente, possiamo considerare l'integrale di f_α su un cammino rettangolare costituito da due lati verticali con ascisse $c, c' > 0$ e due lati orizzontali a ordinate y_1, y_2 con $y_1 > y_2$. L'integrale su questo cammino è nullo perché non contiene alcuna singolarità di f_α. Prendendo il limite $y_1 \to +\infty$ e $y_2 \to -\infty$ il contributo dei segmenti orizzontali va a zero perché la funzione Γ decresce esponenzialmente, e nel limite otteniamo che $I(\alpha)$ calcolato all'ascissa c è uguale a $I(\alpha)$ calcolato all'ascissa c'.

Prendendo la derivata rispetto ad α troviamo

$$\int_{\gamma(c)} \frac{dz}{2\pi i}(-z)\alpha^{-z-1}\Gamma(z) = -\int_{\gamma(c)} \frac{dz}{2\pi i}\alpha^{-z-1}\Gamma(z+1) \ .$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato che $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$. Infine notiamo che

$$\int_{\gamma(c)} \frac{dz}{2\pi i}\alpha^{-z-1}\Gamma(z+1) = \int_{\gamma(c+1)} \frac{dz}{2\pi i}\alpha^{-z}\Gamma(z) \ ,$$

e siccome $I(\alpha)$ non dipende dalla scelta di $c > 0$, abbiamo ottenuto l'equazione desiderata per $I(\alpha)$.

III Prendendo $c + N < R < c + N + 1$, dove N è un numero naturale arbitrario, abbiamo che i poli contenuti in $\gamma(c, R)$ sono quelli a $z = -k$ con k naturale e $0 \le k \le N$. Dunque l'integrale su $\gamma(c, R)$ per questa scelta di R dà

$$\int_{\gamma(c,R)} \frac{dz}{2\pi i} f_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k \alpha^k}{k!} \ .$$

Prendendo il limite $R \to \infty$ anche $N \to \infty$ e la somma converge a $e^{-\alpha}$. Quindi assumendo che l'integrale sull'arco tenda a 0 nel limite abbiamo ottenuto che $I(\alpha) = e^{-\alpha}$ e la costante arbitraria è $C = 1$.

Soluzione Esercizio 2

I Dato che la norma L^2 di $F_T(t)$ diverge nel limite $T \to \infty$, il limite non può esistere in $L^2(\mathbb{R})$. Per controllare il limite nel senso delle distribuzioni invece consideriamo l'integrale con una qualsiasi funzione test $\phi(t)$. Abbiamo

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, F_T(t)\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \phi(t) \ .$$

Possiamo passare al limite sotto il segno dell'integrale grazie al teorema della convergenza dominata, perché la funzione integranda è limitata per ogni T da $|\phi(t)|$ che è sommabile. Questo limite vale per qualsiasi ϕ e dunque mostra che $\lim_{T\to\infty} F_T(t) = 1$ nel senso delle distribuzioni.

II Dato che la trasformata di Fourier è un funzionale continuo rispetto alla convergenza delle distribuzioni, abbiamo che

$$\lim_{T\to\infty} \hat{F_T}(\omega) = \hat{1}(\omega) = 2\pi\delta(\omega) \ .$$

III Dobbiamo calcolare

$$\int_{-T}^{+T} dt \left(1 - \left|\frac{t}{T}\right|\right) e^{i\omega t} \ .$$

L'integrale per t positivi dà

$$\begin{aligned}\int_0^{+T} dt \left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{1}{i\omega}\frac{d}{dt} e^{i\omega t} &= \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\frac{1}{i\omega} e^{i\omega t}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{i\omega T}\int_0^T dt\, e^{i\omega t} \\ &= -\frac{1}{i\omega} - \frac{e^{i\omega T} - 1}{\omega^2 T} \ .\end{aligned}$$

L'integrale per t negativi dà

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{0} dt \left(1 + \frac{t}{T}\right) \frac{1}{i\omega}\frac{d}{dt} e^{i\omega t} &= \left[\left(1 + \frac{t}{T}\right)\frac{1}{i\omega} e^{i\omega t}\right]\Bigg|_{t=-T}^{t=0} - \frac{1}{i\omega T}\int_{-T}^0 dt\, e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{i\omega} + \frac{1 - e^{-i\omega T}}{\omega^2 T} \ .\end{aligned}$$

Sommando troviamo

$$\hat{F_T}(\omega) = 2\,\frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega^2 T} = 4\,\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})^2}{\omega^2 T} \ .$$

Applicando questa distribuzione a una funzione test $\rho(\omega)$ abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, 2\,\frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega^2 T}\rho(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \frac{2(1 - \cos(y))}{y^2}\rho\left(\frac{y}{T}\right) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 2\pi\rho(0) \ .$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il teorema della convergenza dominata per passare al limite sotto il segno di integrale (la funzione sommabile che domina la funzione integranda è $\frac{2(1-\cos(y))}{y^2}\sup_{\omega\in\mathbb{R}}|\rho(\omega)|$) e abbiamo infine utilizzato l'integrale fornito per ottenere il fattore di 2π. Dato che questo limite è valido per qualsiasi funzione test, e che il risultato finale coincide con l'applicazione di $2\pi\delta(\omega)$ alla funzione test, abbiamo verificato il limite ottenuto al punto II.

Soluzione Esercizio 3

I La funzione estesa con legge dispari ha coefficienti di Fourier non nulli solo con i seni. Quindi troviamo che la funzione $g^{\text{ext}}(x)$ ha la seguente serie nel s.o.c.

$$g^{\text{ext}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right) . \tag{1}$$

Restringendo x a $[0, L]$ nell'equazione (1), abbiamo cosí dimostrato che una qualsiasi funzione in $L^2([0, L])$ si può scrivere come limite di una serie nel sistema $\left\{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi y}{L}\right)\right\}_{k\geq 1}$, $y \in [0, L]$, dimostrando che questo sistema è completo. Riscalando di un fattore $\sqrt{2}$ abbiamo anche assicurato che questo sistema sia ortornomale su $L^2([0, L])$ perché

$$\begin{aligned}\delta_{kn} &= \int_{-L}^{+L} \frac{1}{L} \sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right) \\ &= \int_{0}^{+L} dy \frac{2}{L} \sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi y}{L}\right) .\end{aligned}$$

Infine sostituendo $y = \frac{x+L}{2}$ troviamo il s.o.c. richiesto su $L^2([0, L])$. Applicando la derivata seconda troviamo

$$-\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi(x+L)}{2L}\right) = \left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{2L}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi(x+L)}{2L}\right)$$

che mostra che questo sistema è fatto di autofunzioni della derivata seconda. Infine tutte queste funzioni sono 0 in $-L$ perchè l'argomento del seno si annulla, mentre la derivata in $x = L$ è proporzionale a $\cos\left((k-\frac{1}{2})\pi\right)$ che è nullo per k intero.

II I coefficienti di Fourier della costante sono

$$b_k = \int_{-L}^{+L} dx \,\frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi(x+L)}{2L}\right) c = -\frac{4\sqrt{L}\,c}{(2k-1)\pi}\left[\cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\right) - 1\right] = \frac{4\sqrt{L}\,c}{(2k-1)\pi} .$$

Dall'identità di Parseval abbiamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \int_{-L}^{+L} dx\, |c|^2 = 2L|c|^2 \ ,$$

da cui segue l'identità richiesta.

III Denotanto con a_k i coefficienti di Fourier di $f(x)$ nel s.o.c. e sostituendo nell'equazione, troviamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{2L} \right)^2 a_k \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi(x+L)}{2L} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi(x+L)}{2L} \right) \ ,$$

dove i b_k sono i coefficienti di Fourier della costante calcolati al punto precedente. Pertanto troviamo

$$a_k = \frac{64L^2\sqrt{L}\, c}{(2k-1)^3\pi^3} \ .$$