Soluzione Esercizio 1

I La parte reale di una funzione olomorfa è una funzione armonica, ovvero soddisfa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ . \tag{1}$$

Calcolando le derivate parziali della funzione $u(x,y)$ data troviamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2A\,x \ .$$

Confrontando gli esponenti di x troviamo che per soddisfare (1) deve essere $\alpha = 3$. Poi confrontando i coefficienti di x troviamo che deve essere $A = 3$. Per determinare $v(x,y)$ usiamo le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy \quad \Rightarrow v(x,y) = 3x^2y + C(y) \ ,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow v(x,y) = 3x^2y - y^3 + C \ ,$$

dove C è una costante arbitraria. Dunque troviamo

$$f(x+iy) = 1 + x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + C = 1 + C + (x+iy)^3 \ ,$$

ovvero $f(z) = 1 + C + z^3$. Infine richiedendo $f(0) = 1$ fissiamo $C = 0$.

II Abbiamo

$$F(z) = \frac{z^3 \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{z^3+1} \ .$$

La funzione z^3+1 ha zeri di ordine 1 alle tre radici cubiche di -1, ovvero $\{-1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}}\}$. Nel punto $z=-1$ però anche la funzione al numeratore ha uno zero perché $\sin(-\pi) = 0$, dunque la singolarità in $z=-1$ è rimuovibile, mentre abbiamo poli semplici in $z = e^{\frac{i\pi}{3}}$ e $z = e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Inoltre a causa del fattore $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$ lo sviluppo di Laurent attorno a $z=0$ contiene potenze arbitrariamente negative, dunque $z=0$ è una singolarità essenziale. Infine, a $z=\infty$ la funzione ha uno sviluppo con sole potenze negative, come si vede facilmente riscrivendola come

$$F(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{1+\frac{1}{z^3}} \ , \tag{2}$$

dunque non c'è singolarità a $z=\infty$.

III Usando il teorema esterno dei residui, dobbiamo considerare solo il comportamento a $z=\infty$ perchè come abbiamo visto la funzione non ha nessuna singolarità all'esterno del cammino $\gamma_{(0,2)}$. Usando (2) per espandere attorno a $z=\infty$, abbiamo

$$F(z) = \frac{\pi}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right) \ ,$$

da cui vediamo che il residuo all'infinito è $\mathrm{Res}_F(\infty) = -\pi$. Pertanto il teorema esterno dei residui ci dà

$$\int_{\gamma(0,2)} dz\, F(z) = -2\pi i(-\pi) = 2\pi^2 i \ .$$

Soluzione Esercizio 2

I Dato che la trasformata di Fourier mappa il prodotto ordinario nel prodotto di convoluzione, abbiamo

$$\widehat{f^2}(k) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{f})(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{f}(k-\omega)\hat{f}(\omega) \ .$$

(La prima uguaglianza si ricava facilmente da $\widehat{g * g} = \widehat{g}\,\widehat{g}$ sostituendo $g(\omega) = \hat{f}(\omega)$ e applicando un'anti-trasformata a entrambi i membri). D'altra parte per definizione

$$\widehat{f^2}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)^2\, e^{ikt} \ .$$

Eguagliando le due espressioni per $\widehat{f^2}(k)$ e calcolando a $k = 0$ si ottiene la (1). Per mostrare (1) usando l'identità di Parseval generalizzata, basta notare che

$$(\widehat{f^*}, \hat{f}\,) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \widehat{f^*}^*(\omega)\hat{f}(\omega) \ ,$$

e che vale

$$\widehat{f^*}^*(\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f^*(t)e^{i\omega t}\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)e^{-i\omega t} = \hat{f}(-\omega) \ ,$$

e infine

$$(f^*, f) = \int dt\, f(t)^2 \ .$$

II Applichiamo la relazione (1) separatamente a $\left(\frac{dG(t)}{dt}\right)^2$, che ci dà

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{dG(t)}{dt}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \widehat{\frac{dG(t)}{dt}}(-\omega)\widehat{\frac{dG(t)}{dt}}(\omega) = \int d\omega\, \omega^2 \hat{G}(-\omega)\hat{G}(\omega) \ ,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato che $\widehat{\frac{dG(t)}{dt}}(\omega) = -i\omega\hat{G}(\omega)$, e a $\frac{1}{T^2}(G(t))^2$ che ci dà semplicemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{1}{T^2}(G(t))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{1}{T^2}\hat{G}(-\omega)\hat{G}(\omega) \ .$$

Sommando i due contributi troviamo l'espressione desiderata (2) per $S[G]$.

III Applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri dell'equazione per G, troviamo

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{T^2}\right) \hat{G}(\omega) = 1 \ ,$$

da cui segue $\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{T^2}}$. Sostituendo nell'espressione (2) per $S[G]$ troviamo dunque

$$S[G] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{T^2}} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = \frac{T}{2} \ . \tag{3}$$

Soluzione Esercizio 3

I Abbiamo

$$||T_n(f)||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\phi(x)^2}{n} \left| f\left(\frac{x}{n}\right) \right|^2 \ .$$

Cambiando variabile da x a $y = \frac{x}{n}$ abbiamo

$$||T_n(f)||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dy \, \phi(ny)^2 \, |f\,(y)|^2 \leq ||f||_2^2 \ . \tag{4}$$

Nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato che $\phi(ny)^2 \leq 1$. Visto che la disuguaglianza è valida per una generica $f \in L^2(\mathbb{R})$ questo ci dice che $||T_n|| \leq 1$. D'altra parte $\phi(ny) = 1$ nell'intervallo $y \in [-1/n, 1/n]$, quindi se la funzione f è supportata in questo intervallo si ha un'uguaglianza in (4). Pertanto $||T_n|| = 1$.

II L'operatore aggiunto è definito da

$$(g, T_n(f)) = (T_n^\dagger(g), f) \ .$$

Dunque date g, f generiche in $L^2(\mathbb{R})$, calcoliamo

$$\begin{aligned}(g, T_n(f)) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, g^*(x) \frac{\phi(x)}{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \, g^*(ny) \sqrt{n} \phi(ny) \, f\,(y) \ .\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo cambiato variabile da x a $y = \frac{x}{n}$. Quindi abbiamo ottenuto che

$$T_n^\dagger(g)(x) = \sqrt{n}\phi(nx) g(nx) \ .$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}||T_n^\dagger(g)||_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, n\phi(nx)^2 \, |g(nx)|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \, \phi(y)^2 \, |g(y)|^2 \\ &\leq ||g||_2^2 \ .\end{aligned}$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo cambiato variabile da x a $y = nx$, e nella disuguaglianza abbiamo usato $\phi(y)^2 \leq 1$. Analogamente al punto I, la disuguaglianza diventa un'uguaglianza per g con supporto in $y \in [-1, 1]$. Quindi $||T_n^\dagger|| = 1$.

III Abbiamo calcolato $||T_n(f)||_2^2$ in (4). Notiamo che $\phi(ny)^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, dunque abbiamo che $||T_n(f)||_2^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ se si può portare il limite dentro l'integrale. Questo si può fare grazie al teorema della convergenza dominata, perché la funzione integranda è sempre minore di $|f(y)|^2$, che è integrabile. Pertanto $||T_n(f)||_2^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ per una qualsiasi $f \in L^2(\mathbb{R})$, ovvero T_n tende a 0 in senso forte. Infine notiamo che date g, f generiche in $L^2(\mathbb{R})$, si ha per definizione

$$(f, T_n^\dagger(g)) = (T_n(f), g) \ . \tag{5}$$

Per quanto mostrato sopra il vettore $T_n(f)$ tende a 0 in norma $L^2(\mathbb{R})$, di conseguenza anche il suo prodotto scalare con un vettore generico tende a 0. Dunque $T_n^\dagger$ tende a 0 in senso debole.