Evoluzione temporale di un operatore

L'equazione di Schrödinger, in notazione bra e ket, può essere scritta come:

$$i\hbar|\dot{\psi}\rangle = H\,|\psi\rangle$$

L'equazione corrispondente nello spazio dei bra diventa (H è hermitiano):

$$-i\hbar\,\langle\dot{\psi}| = \langle\psi|H$$

Queste considerazioni ci servono per dimostrare agevolmente il seguente teorema:

Consideriamo un operatore A non dipendente intrinsecamente dal tempo ($\frac{\partial A}{\partial t} = 0$), si ha che:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\,\langle[H,A]\rangle$$

Dimostrazione:

Per definizione di valore di aspettazione:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi|A|\psi\rangle$$

deriviamo: $= \langle\dot{\psi}|A|\psi\rangle + \langle\psi|A|\dot{\psi}\rangle$

usiamo le (1) e (2) per sostituire le derivate: $= -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|HA|\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|AH|\psi\rangle$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|HA - AH|\psi\rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar}\,\langle[H,A]\rangle$$

Se volete, potete provare a "tradurre" passo passo questa derivazione usando la forma integrale anzichè i bra e ket, vi renderete conto dell'utilità di questi ultimi.

Teorema di Ehrenfest

La relazione che abbiamo trovato ha un'utilita in diversi aspetti dello studio dell'evoluzione temporale dei sistemi quantistici[1]. Noi non ce ne occuperemo di fatto. Guardiamo però il caso in cui $A = p$ ovvero l'operatore momento. Facciamolo nel caso di particella che si muove solo lungo x per semplicità, ma il risultato è valido in generale.

$[H, p_x] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x), -i\hbar\frac{d}{dx}\right] = \left[V(x),\ -i\hbar\frac{d}{dx}\right]$, perchè le derivate commutano.

Facendo agire il commutatore su una generica funzione f(x):

$$[H, p_x]\, f(x) = -i\hbar\left(V(x)\frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}(V(x)f(x))\right)$$

$$= -i\hbar\left(V(x)\frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}\big(V(x)\big)f(x) - V(x)\,\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

$$= i\hbar\,\frac{d}{dx}\big(V(x)\big)f(x)$$

Si ha quindi, usando la relazione trovata prima:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\langle p_x\rangle = \langle -\frac{d}{dx}V(x)\rangle}$$

Questo risultato è noto come il **teorema di Ehrenfest**. Dice in sostanza che per il valore di aspettazione di p vale la stessa relazione che abbiamo in meccanica classica (ricordo che $\mathrm{F} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{V}$ in meccanica classica, quindi qui abbiamo di fatto trovato F=ma ...) Quindi, se volete, riassumendo, la meccanica quantistica dà il dettaglio di quello che, guardando i valori medi, diventa meccanica classica.

[1] Nella forma più generale in cui A dipende dal tempo la relazione diventa: $\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\,\langle[H, A]\rangle + \langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle$