Equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

$\psi(x,t)$ f. d'onda

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0546 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$|\psi(x,t)|^2$ è la densità di probabilità di trovare la particella in x al tempo t

normalizzazione $\Longrightarrow$ $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 1}$

!! L'eq. di Schröedinger preserva la normalizzazione nel tempo, ovvero, se $\psi(x,t_1)$ è soluzione, normalizzata, lo è anche $\psi(x,t)$

Dim

$$\frac{d}{dt}\int |\psi(x,t)|^2 \, dx = \int \frac{\partial}{\partial t} |\psi(x,t)|^2 \, dx$$

Ma: $$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi$$

Per l'eq. di Schrödinger: $$\cancel{\frac{\partial \psi^{(*)}}{\partial t} = (-)\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi^{(*)}}{\partial x^2} \,{}^{-}_{(+)}\, \frac{i}{\hbar} V \psi^{(*)}}$$

Eq di Schrodinger $\quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V \psi$

e facendo il complesso coniugato:

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} V \psi^*$$

quindi:

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}\psi\right)$$

$$* \quad = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\psi\right)\right]$$

Perciò:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\psi\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

M $\psi(\infty, t)$ e $\psi^*(\infty, t)$ devono essere 0 o ψ non sarebbe mai normalizzabile.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 0}$$

$*$ Uso: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \underline{\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}$

e $\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \underline{\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}}$

per sostituire nell'equazione