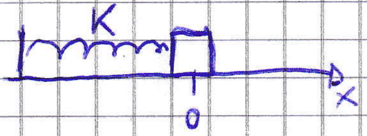
OSCILLATORE ARMONICO

L'esempio più noto di oscillatore armonico è quello di una massa m collegata ad una molla:

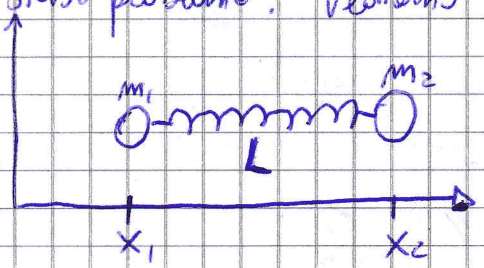


$F = -Kx$, $V(x) = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

definendo $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

Anche due masse m_1 e m_2, collegate da una molla, si possono ricondurre allo stesso problema. Vediamo come:



Sia L la lunghezza a riposo della molla

Per la massa 1 vale: $m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = K(x_2 - x_1 - L)$ (1)

per 2 vale: $m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -K(x_2 - x_1 - L)$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1 + m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 = 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = 0$$

definisco: $M = m_1 + m_2$ $\quad X_M = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$, centro di massa

$$\Longrightarrow \boxed{M \frac{d^2}{dt^2} X_M = 0} \quad (3)$$

Ora, chiamo $x_2 - x_1 - \cancel{L} = X$ divido 1 per m_1 e 2 per m_2 e faccio 2 − 1:

$$\frac{d^2}{dt^2}x_2 - \frac{d^2}{dt^2}x_1 = -\frac{k}{m_2}(x - \cancel{L}) - \frac{k}{m_1}(x - \cancel{L})$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1 - \cancel{L}) = -k\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)X \cancel{L}$$

$\frac{d^2}{dt^2}L = 0$, lo aggiungo $\rightarrow$

$$\frac{d^2}{dt^2}X = -k\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)X$$

definisco

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{massa ridotta}}$$

e ottengo:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}X = -\omega_r^2 X} \quad 4$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

3 e 4 mi descrivono il problema come: 3 il moto uniforme del centro di massa

4 oscillatore armonico di una massa μ

!! Queste considerazioni valgono ogni volta che il potenziale di interazione è funzione solo della distanza tra due masse ($\rightarrow$ quindi sarà valido anche per l'atomo di idrogeno)

OSCILLATORE ARMONICO

Risolviamo quindi il problema di una particella in potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x$$

L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo è

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi} \quad (1)$$

Potremmo risolvere l'equazione "brutalmente" applicando metodi di risoluzione delle equazioni differenziali. Si può fare ma è laborioso e poco utile.

Riscriviamo invece la (1) come:

$$\frac{1}{2m}\left[p^2 + \frac{1}{2} (m\omega x)^2 \right] \psi = E\psi \quad (2)$$

e studiamo i seguenti operatori:

$$\boxed{a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} \left(\mp i p + m \omega x \right)}$$

Valutiamo il prodotto $a_- a_+$

$$a_- a_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega} (ip + m\omega x)(-ip + m\omega x)$$

$$= \frac{1}{2\hbar m\omega} \left(p^2 + (m\omega x)^2 - i m\omega \underbrace{(xp - px)}_{= [x,p] = i\hbar} \right)$$

dalla (2) $\Rightarrow$ $\boxed{a_- a_+ = \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ $H = \hbar\omega \left(a_- a_+ - \frac{1}{2} \right)$ (3)

NOTA: $a_- a_+ \neq a_+ a_-$ perché i due <u>non</u> commutano (si ha $[a_-, a_+] = 1$)

Quindi la (3) può essere scritta anche $H = \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\right)$

Ora, supponiamo di avere un autostato di H, ψ $\quad (H\psi = E\psi)$

Si ha che $a_+\psi$ è anche autostato di H, con autovalore $(E + \hbar\omega)$

Dimostrazione

$$H(a_+\psi) \overset{3}{=} \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right)(a_+\psi) = \hbar\omega\left(a_+a_-a_+ + \frac{1}{2}a_+\right)\psi$$

$$= \hbar\omega\, a_+\left(a_-a_+ + \frac{1}{2}\right)\psi \underset{a_-a_+ = 1 + a_+a_-}{=} a_+\left[\hbar\omega\left(a_+a_- + 1 + \frac{1}{2}\right)\psi\right]$$

$$= a_+\left(H + \hbar\omega\right)\psi = a_+(E + \hbar\omega)\psi = (E + \hbar\omega)\, a_+\psi$$

Allo stesso modo si ha:

$$H(a_-\psi) = (E - \hbar\omega)(a_-\psi)$$

Gli operatori a_+ e a_- sono dei costruttori di soluzioni!!

Si chiamano: "ladder operators"

operatori di spostamento

operatori di costruzione/distruzione

OSCILLATORE ARMONICO

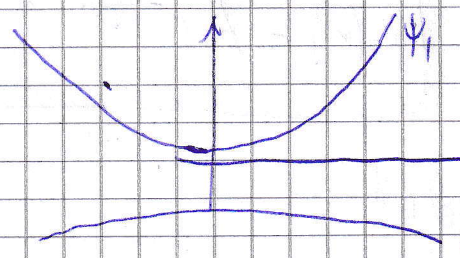
Prima di procedere nel trovare le soluzioni dell'oscillatore armonico, dimostriamo una proprietà generale:

- Per ogni soluzione $\psi(x)$ dell'equazione di Schrodinger non dipendente dal tempo, l'autovalore E corrispondente deve essere maggiore del valore minimo di $V(x)$

Si vede scrivendo l'eq. come: $$\frac{d^2}{dx^2}\psi = \frac{2m}{\hbar}\left[V(x) - E\right]\psi$$

Se $E < V(x)_{min}$, allora $\frac{d^2}{dt^2}\psi$ e ψ hanno sempre lo stesso segno

Non appena ψ assume valori $\neq 0$ in una o l'altra direzione, dovrà mantenerli e aumentare la sua velocità di allontanamento da 0 (perché $\frac{d^2}{dt^2}(\ )$ mi dà la curvatura) Avrò situazioni del tipo:



che non sono normalizzabili

Questo ci insegna che per l'oscillatore armonico avrò solo autovalori $E > 0$

Ma quindi non posso applicare a_- all'infinito.
Dovrà esserci uno stato (stato fondamentale) al di sotto del quale non posso andare (~ il gradino più basso della scala)

Se chiamo questo stato ψ_0, devo imporre che:

$$a_- \psi_0 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x\right)\psi_0 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dx}\psi_0 = -\frac{m\omega}{\hbar} x \psi_0$$

$$\int\left(\frac{d\psi_0}{\psi_0}\right) = \int\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x\,dx\right)$$

$$\downarrow$$

$$\ln\psi_0 = -\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\psi_0(x) = A e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}$$

Vogliamo che sia normalizzato:

$$1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \Longrightarrow A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\psi_0 &= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\ E_0 &= \frac{1}{2}\hbar\omega\end{aligned}}$$

$$\longrightarrow H\psi_0 = \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right)\psi_0 = \hbar\omega\left(\underbrace{\cancel{a_+a_-\psi_0}}_{=0} + \frac{1}{2}\psi_0\right)$$

Applicando iterativamente a_+ su ψ_0 si ottengono tutti gli stati:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_+)^n \psi_0$$

Si trova, sia in questo modo sia applicando la soluzione brutale dell'eq. di Sch. senza usare a_+ e a_- che gli stati sono:

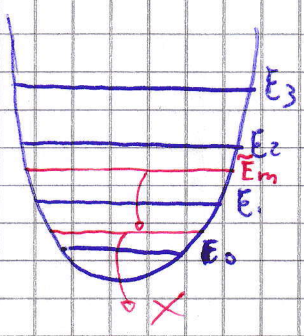
$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi)\, e^{-\xi^2/2}$$

con $\xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$ e $H_n(\xi)$ i polinomi di Hermite:

$$H_0 = 1$$
$$H_1 = 2\xi$$
$$H_2 = 4\xi^2 - 2$$
$$\vdots$$

NOTA: Quando applichiamo $(a_+)^n \psi_0$ per trovare gli autostati, siamo sicuri di trovarli tutti?

SI, infatti supponiamo che ce ne siano altri, che ci sia un autostato con autovalore $\tilde{E}_m$ in mezzo a quelli che ho trovato.



Ma allora, $a_-(\tilde{\psi}_m)$ deve darmi un autostato con energia $\tilde{E}_m - \hbar\omega$. Ma anche in questa nuova serie di autostati, l'ultimo dovrà essere mandato in $\underline{\underline{0}}$ da a_- $\Rightarrow$ ma allora non potrà che essere ψ_0, perché dovrà essere soluzione della stessa equazione.