Teorema spettrale (Caso reale)

Sia V spazio vett. Euclideo reale con $\dim V < \infty$, e sia $f: V \to V$ lineare simmetrica. Allora che esiste una base ortonormale di V che diagonalizza f.

Dim induzione su $n = \dim V$

base dell'induzione: $\boxed{n = 1}$ ✓

$v \in V - \{0\} \rightsquigarrow u = \dfrac{v}{\|v\|}$

$\{u\}$ è base ortonormale di V

$f(u) = \lambda u \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

diagonalizzante.

<u>Ipotesi induttiva</u>: Supponiamo che l'enunciato sia vero per $\dim V = n-1$ e dimostriamolo per $\dim V = n \geq 2$.

1) $\exists$ $\underline{\lambda \in \mathbb{R} \text{ autovalore di } f}$, infatti $M_{\mathcal{V}}(f)$ è una matrice simmetrica se $\mathcal{V}$ è base ortonormale di V (tutte le matrici reali simmetriche hanno autovalori reali)

$\rightsquigarrow$ $v \in V - \{0\}$ autovettore relativo a λ

possiamo assumere $\|v\| = 1$

$$\boxed{f(v) = \lambda v} \rightsquigarrow U = v^{\perp} \subset V$$

$\dim U = n-1$ e $V = U \oplus \operatorname{span}(v)$

Mostriamo che $f(U) \subset U$

Sia $u \in U \rightsquigarrow \langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle = \langle u, \lambda v \rangle =$

f simm.

$= \lambda \langle u, v \rangle = 0 \qquad (U = v^\perp)$

$\Rightarrow \quad f(u) \in v^\perp = U$

Possiamo quindi considerare la restrizione

$$f|U : U \longrightarrow U$$

U spazio vett. Euclideo col prodotto scalare indotto da V

$f|U$ è simmetrica. Ipotesi induttiva. $\Rightarrow \exists\, (u_1, \dots, u_{n-1})$ base ortonormale di U che diagonalizza $f|U$

Allora posto $u_n = v$ si ha che i vettori

$(u_1, \dots, u_n)$ sono autovettori di norma 1

e ortogonali $\Rightarrow$ lin. indip.

$\Rightarrow (u_1, \dots, u_n)$ è base ortonormale di V.

che diagonalizza f.

Teorema spettrale (caso complesso)

Sia V spazio vett. complesso Hermitiano (unitario), $\dim V < \infty$, e sia $f : V \to V$ lineare autoaggiunta. Allora esiste una base ortonormale di V che diagonalizza f. Inoltre gli autovalori di f sono tutti reali.

Dim: induzione su $n = \dim V$.

$n=1$: $v \in V - \{0\} \rightsquigarrow u = \dfrac{v}{\|v\|}$

u è base ortonormale di V

e $f(u) = \lambda u$ per un certo $\lambda \in \mathbb{C}$ (in realtà $\lambda \in \mathbb{R}$)

Ipotesi induttiva: Supponiamo l'enunciato vero in dim $n-1$ e dimostriamolo in dim $n \geq 2$.

OSS: la matrice di f rispetto ad una base ortonormale di V è Hermitiana $\Rightarrow$ tutti gli autovalori sono reali

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di f e sia $v \in V - \{0\}$ autovettore relativo a λ. Possiamo assumere $\|v\| = 1$.

$U := v^{\perp} \subset V$ $\quad$ $\dim U = n-1$ $\quad$ e

$$V = U \oplus \operatorname{Span}(v).$$

Mostriamo che $f(U) \subset U$

Sia $\underline{u \in U}$ $\rightsquigarrow$ $\underline{\langle f(u), v \rangle} = \langle u, f(v) \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$

f autoaggiunta

$= \lambda \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow f(u) \in U = v^{\perp}$

Possiamo considerare la restrizione

$$f_{|U} : U \longrightarrow U$$

$U \subset V$ è spazio vett. complesso Hermitiano, col prodotto Hermitiano indotto da V. $\Longrightarrow$ $f_{|U} : U \to U$ autoaggiunta

Ip. indutt. $\Longrightarrow$ $\exists$ $(u_1, \dots, u_{n-1})$ base ortonormale di U

che diagonalizza $f|U$

Posto $u_n = v$, i vettori $(u_1, \dots, u_n)$ formano una

base di V (perché ortonormali e in numero $= \dim V$)

ortonormale che diagonalizza f.

Isometrie (caso reale)

Def Siano V, W spazi vett. reali Euclidei. Un'applicazione lineare

$$f : V \longrightarrow W$$

è detta applicazione isometrica se

$$\langle f(v_1), f(v_2) \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V$$

$\forall \; v_1, v_2 \in V$.

Prop. Sia $f : V \to W$ applicazione isometrica. Allora:

1) f iniettiva

2) $\| f(v) \|_W = \| v \|_V \quad \forall v \in V$

3) $\widehat{f(v_1)\, f(v_2)} = \widehat{v_1 v_2} \quad \forall v_1, v_2 \in V - \{0\}$ ⊛

4) $d_W(f(v_1), f(v_2)) = d_V(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V.$ ⊛

Dim 1) $f(v) = 0_W \Rightarrow \| v \|_V^2 = \underline{\langle v, v \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle_W} = \langle 0, 0 \rangle = 0$

$\Rightarrow v = 0_V$ Quindi $\operatorname{Ker} f = 0$. ✓

2) $\underline{\| f(v) \|}_W^2 = \langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \underline{\| v \|_V^2}$ ✓

Def Sia $f : V \to W$ applicazione isometrica. Diciamo che f è una <u>isometria</u> se f è suriettiva.

OSS Se $f : V \to W$ isometria allora f isomorfismo..

$f : V \to W$ isometria $\Rightarrow$ $f^{-1} : W \to V$ isometria $\circledast$

Si pone $\mathrm{Isom}(V, W) := \{ f : V \to W \mid f \text{ isometria} \}$.

$$\mathrm{Isom}(V) = \{ f : V \to V \mid f \text{ isometria} \} \subset \mathrm{Aut}(V)$$

OSS $\mathrm{Isom}(V)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(V)$ $\left(= GL(V) \right)$

Teorema $f: V \to W$ applicazione lineare suriettiva. Allora le seguenti sono equivalenti:

1) f manda $\forall$ base ortonormale di V in una base ortonormale di W

2) $\exists$ base ortonormale di V che viene mandata da f in una base ortonormale di W

3) $\| f(v) \| = \| v \| \quad \forall \; v \in V$

4) f è una isometria,

Dim $(1) \Rightarrow (2)$ ovvio

$(2) \Rightarrow (3)$ $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base ortonormale di V

che viene mandata in una base ortonormale di W

$\boxed{w_i = f(v_i)} \rightsquigarrow \mathcal{W} = (w_1, \dots, w_n)$ ortonormale in W

Sia $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, $x_i \in \mathbb{R}$

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$$

$\|v\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $\|f(v)\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|v\|^2$.

(Se $(v_1, \dots, v_n)$ base ortonormale di V allora $\left.\begin{array}{l} v = \sum_i x_i v_i \\ w = \sum_j y_j v_j \end{array}\right\}$ $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$)

$(3) \Rightarrow (4)$

$u, v \in V$

$$\|f(v+u)\|^2 = \|f(v)+f(u)\|^2 = \|f(v)\|^2 + 2\langle f(v), f(u)\rangle + \|f(u)\|^2 =$$

$$= \|v\|^2 + 2\boxed{\langle f(v), f(u)\rangle} + \|u\|^2.$$

$$\|$$

$$= \|v+u\|^2 = \|v\|^2 + 2\boxed{\langle v, u\rangle} + \|u\|^2$$

$$\langle f(v), f(u)\rangle = \langle v, u\rangle \quad \forall\, v, u \in V$$

$\Rightarrow f$ isometria.

$(4) \Rightarrow (1)$ f isometria $\Rightarrow f$ preserva $\|\cdot\|$ e $\langle\, ,\, \rangle$ $\Rightarrow$ preserva l'ortogonalità.

Matrici ortogonali

Def $M \in M_n(\mathbb{R})$ è detta matrice ortogonale se

$$\boxed{{}^tM\, M = I_n}$$

OSS M ortogonale $\iff M^{-1} = {}^tM$

$$\det({}^tM\, M) = 1$$

$$\shortparallel$$

$$(\det {}^tM)(\det M) = (\det M)^2 = 1 \implies \boxed{\det M = \pm 1}$$

Si pone $O(n) := \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ è ortogonale} \} \subset GL_n(\mathbb{R})$

OSS $I_n \in O(n)$

gruppo ortogonale (di ordine n)

$\boxed{O(1) = \{-1, 1\}}$ $a \in \mathbb{R}$ t.c. $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

$O(n)$ è ∞ per $n \geq 2$.

$A := \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \in O(n)$ $\det A = -1$.

$\det : O(n) \to \{1, -1\}$ è omomorfismo

$\Rightarrow \ker \det \subset O(n)$ è sottogruppo

$\ker \det = SO(n)$

$SO(n) = \{ M \in O(n) \mid \det M = 1 \}$

gruppo ortogonale speciale

Prop. $M \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale $\iff$ le colonne (righe) di M formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ col prod. scalare canonico.

Dim

$$({}^tAA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = \langle A_{(i)}, A_{(j)} \rangle = \delta_{ij} \iff$$

$(A_{(1)}, \dots, A_{(n)})$ base ortonormale.

$A = (a_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} & a_{1i} & & a_{1j} & \\ \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ & a_{ni} & & a_{nj} & \end{pmatrix}$$

$${}^tAA = I_n \iff \boxed{A\,{}^tA = I_n} \circledast \Rightarrow \text{righe ortonormali.}$$

Prop. Sia V sp. vett. Euclideo e siano $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$,

$\mathcal{V}' = (v_1', \dots, v_n')$ basi di V, con $\mathcal{V}$ ortonormale.

Allora $\mathcal{V}'$ è ortonormale $\iff M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'} \in O(n)$.

matrice del cambiamento di base $\mathcal{V}' \rightsquigarrow \mathcal{V}$

Dim. $\langle v_i', v_j' \rangle_V \overset{\boxed{\mathcal{V} \text{ è ortonormale}}}{=} \langle S^{(i)}, S^{(j)} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} \iff S \in O(n)$.

$$S = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'} = \left(S^{(1)} \ \dots \ S^{(n)} \right) \qquad \boxed{S^{(i)\,\mathcal{V}} = v_i'}$$

$$v_i' = \sum_{j=1}^{n} s_{ji} v_j$$

Prop $f: V \to W$ lineare, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base ortonormale di V e $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_n)$ base ortonormale di W. Allora

$$f \in \mathrm{Isom}(V, W) \iff M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f) \in O(n).$$

Dim $f \in \mathrm{Isom}(V, W) \iff \mathcal{U} = (u_1 = f(v_1), \dots, u_n = f(v_n))$ base ortonormale di W

$$\iff \underset{\underset{\displaystyle M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f)}{\shortparallel}}{M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{U}}(\mathrm{id}_W)} \in O(n)$$

Teorema Sia V spazio vett. Euclideo, con $\dim V = n$.

Allora $\exists\ f : V \to \mathbb{R}^n$ isometria, con $\mathbb{R}^n$ munito del prod. scal. standard.

Dim Sia $(v_1, \dots, v_n)$ base ortonormale di V

$\leadsto\ f : V \to \mathbb{R}^n$ lineare t.c.

$f(v_i) = e_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

(Teorema di determinazione di un'appl. lin. mediante una base)

$\Longrightarrow f$ isometria