Caso complesso

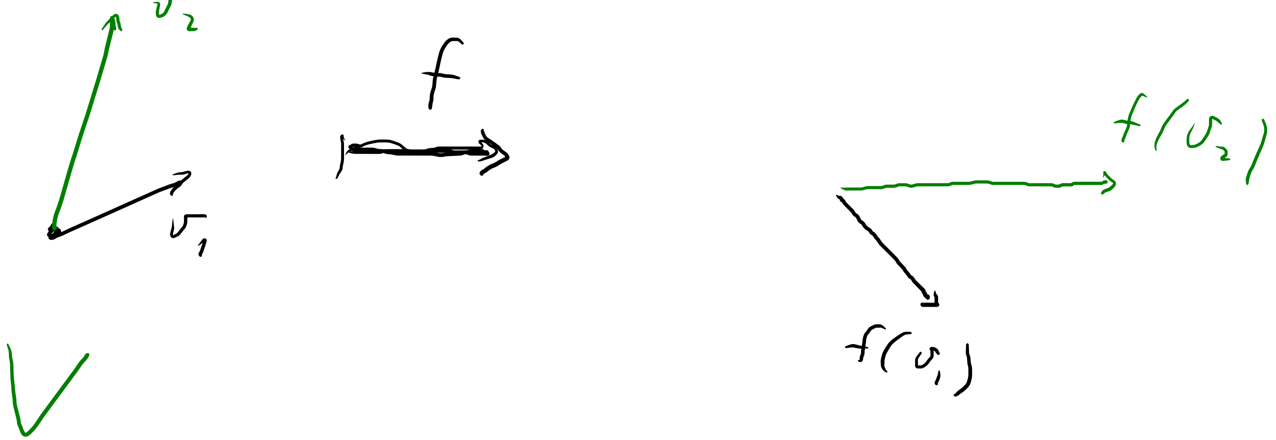
V sp. vett. / $\mathbb{C}$ Hermitiano

Def V, W sp. vett. / $\mathbb{C}$ Hermitiani, $f : V \to W$ lineare.

Diciamo che f è un'applicazione unitaria se

$$\langle f(v_1), f(v_2) \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V$$

$\forall \; v_1, v_2 \in V$.



Prop. Sia $f: V \longrightarrow W$ applicazione unitaria. Allora

1) $\| f(v) \|_W = \| v \|_V \quad \forall v \in V$ $\quad (*)$

2) f iniettiva

Def Sia $f: V \longrightarrow W$ isomorfismo di spazi vett. complessi.
Diciamo che f è isomorfismo unitario se f è unitaria.

OSS $f: V \longrightarrow W$ appl. lineare. Allora f è isomorfismo unitario $\Longleftrightarrow$ f appl. unitaria suriettiva.

Prop. Sia $f : V \longrightarrow W$ isomorfismo. Allora le seguenti sono equivalenti:

1) $\forall$ base ortonormale di V V viene mandata da f in una base ortonormale di W

2) $\exists$ base ortonormale di V che va in una base ortonormale di W

3) $\|f(v)\| = \|v\| \quad \forall \; v \in V$

4) f unitaria

(dim x esercizio)

Cenno della dim $\underline{(3)} \Rightarrow (4)$

$$\|f(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2 \Rightarrow Re\langle f(u), f(v)\rangle = Re\langle u, v\rangle$$

$$\cdot \; \|f(iu+v)\|^2 = \|iu+v\|^2 \Rightarrow Im\langle --- \rangle = Im\langle -\,-\,- \rangle$$

Teorema V sp. vett. Hermitiano, $n = \dim V$. Allora $\exists$

$$f : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

($\mathbb{C}^n$ col prod Hermitiano canonico)

isomorfismo unitario

Dim Sia $(v_1, \dots, v_n)$ base ortonormale di V. Consideriamo l'appl. lineare

$$f : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

(teorema di det. di appl. lin. mediante base)

t.c. $f(v_j) = e_j$ $\quad (e_1, \dots, e_n)$ base canonica di $\mathbb{C}^n$

$\Longrightarrow$ f isomorfismo

Matrice Unitaria (analogo complesso delle matrici ortogonali)

Def $S \in M_n(\mathbb{C})$ è detta matrice unitaria se

$${}^t\bar{S}\, S = I_n \qquad \left(\iff S^{-1} = {}^t\bar{S} \right)$$

(oss $S \in O(n) \Longrightarrow S$ unitaria)

$$\det({}^t\bar{S}\, S) = \det \bar{S} \det S = \overline{\det S} \det S = |\det S|^2 = 1$$

$$U(n) := \{ S \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{S}\, S = I_n \} \subset GL_n(\mathbb{C})$$

gruppo unitario

⊛

$SU(n) \subset U(n)$ sottogruppo

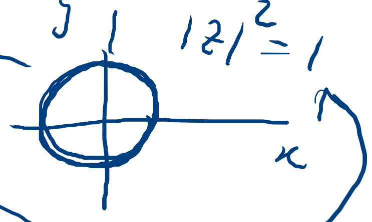
gruppo unitario speciale

$$SU(n) = \{ S \in U(n) \mid \det S = 1 \} = \operatorname{Ker} \det$$

$$\det : U(n) \longrightarrow U(1)$$

omomorfismo di gruppi

$U(1)$



$|z|^2 = 1$

$\boxed{\bar{z} z = 1}$

OSS $\det : \underline{U(n) \longrightarrow U(1)}$ è suriettiva

$$S = \begin{pmatrix} z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad |z| = 1$$

$$S \in U(n) \qquad {}^t\bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = S^{-1}$$

$$\det S = z \qquad \forall z \in U(1).$$

Prop $S \in U(n) \iff$ le colonne (righe) di S sono una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ (col prod Hermitiano canonico)

Dim come nel caso reale $\circledast$

$$ {}^t\bar{S}\, S = I_n \quad \text{(colonne)} $$

$$ S\, {}^t\bar{S} = I_n \quad \text{(righe)} $$

Prop. $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ basi di V, con $\mathcal{V}$ ortonormale. Allora

$\mathcal{V}'$ è ortonormale $\iff M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'} \in U(n)$. (*)

Prop. Siano $\mathcal{V}$ base ortonormale di V, $\mathcal{W}$ base ortonormale di W, $f : V \to W$ lineare. Allora f è isomorfismo unitario

$\iff M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f) \in U(n)$.

OSS $O(n) \subset U(n)$, $\quad SO(n) \subset SU(n)$

sottogruppi

Teorema Sia $f: V \to V$ endomorfismo unitario, con $\dim V < \infty$.

(spettrale per endomorfismo unitario) Allora $\exists$ una base ortonormale di V che diagonalizza f.

Dim Induzione su $n = \dim V$.

base dell'induzione $n = 1$: immediato ⊗

supponiamo vero l'enunciato per $n-1$ e dimostriamolo per n. $\boxed{\|v\| = 1}$

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore, e sia $v \in V - \{0\}$ un corrispondente autovettore

$(f(v) = \lambda v)$

$$\|f(v)\|^2 = \langle f(v), f(v) \rangle \underset{\text{unitario}}{=} \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

$\|$ auto.vett.

$$\langle \lambda v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \lambda \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2 \underset{\|v\| \neq 0}{\Longrightarrow} \boxed{|\lambda| = 1}$$

$\Downarrow$

$\lambda \neq 0$

Sia $U = v^{\perp} \subset V$ $\quad \dim U = n-1$

$$V = U \oplus \operatorname{span}(v)$$

Mostriamo $f(U) = U$ $\quad (\lambda \neq 0)$

Sia $u \in U$ $\quad \lambda \langle f(u), v \rangle = \langle f(u), \lambda v \rangle \underset{\text{autovett.}}{=}$

$= \langle f(u), f(v) \rangle \underset{\text{unitaria}}{=} \langle u, v \rangle = 0$

$\Rightarrow \lambda \langle f(u), v \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(u), v \rangle = 0$ $\quad (\lambda \neq 0)$

$\Rightarrow f(U) \subset U$. Ma $\dim f(U) = n-1$ perché f automorfismo. $\Rightarrow f(U) = U$.

Ora consideriamo U come sp vett. $/ \mathbb{C}$ Hermitiano col prod. Hermitiano indotto da V

$$f|_U : U \longrightarrow U$$

è unitario e suriettiva $\Rightarrow$ automorfismo unitario di U

Ipotesi induttiva : $\exists$ base ortonormale $(u_1, \dots, u_{n-1})$ di U che diagonalizza $f|_U$ $\rightsquigarrow u_n = \frac{v}{\|v\|}$

$(u_1, \dots, u_n)$ ortonormale $\Rightarrow$ lin. indip. $\Rightarrow$ base ortonormale di V che diagonalizza f.

Interpretazione matriciale del teorema spettrale

1) T. spettr. <u>reale</u> ($\forall$ endomorfismo simmetrico $V \to V$ è diagonalizzabile mediante base ortonormale)

<u>Corollario</u> Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice simmetrica reale. Allora $\exists$

$$S \in SO(n) \text{ t.c. } \boxed{D = {}^tS\, A\, S} \text{ è diagonale.} \qquad (S^{-1} = {}^tS)$$

<u>Dim</u> $\mathbb{R}^n$ col prod. scalare canonico

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad A = M_{\mathcal{E}}(L_A) \Rightarrow L_A \text{ simmetrica}$$

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ diagonalizzante

$$S = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}}_{\text{colonne}} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}} \in O(n)$$

Se $S \notin SO(n)$ sostituiamo v_1 con $-v_1$ $\rightsquigarrow$ <u>$\det S = 1$</u> $\Rightarrow S \in SO(n)$

2) T. spettrale caso Hermitiano ($f : V \to V$ Hermitiana $\Rightarrow \exists$ base ortonormale diagonal.)

<u>Corollario</u> Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrice Hermitiana $\Rightarrow \exists\, S \in \underline{SU(n)}$

t.c. $D = {}^t\underline{\bar{S}} A S$ è diagonale e reale

<u>Dim</u> $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è Hermitiana $\Rightarrow \exists\, V = (v_1, \dots, v_n)$

base ortonormale diagonalizzante. Sia $\delta = \det \underset{\text{colonne}}{\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}}$

$\boxed{\begin{gathered}\|u_1\| = |\delta^{-1}|\|v_1\| \\ = 1\end{gathered}}$ $\underline{u_1 = \delta^{-1} v_1}$, $\underline{u_j = v_j}$ $\forall j = 2, \dots, n$ $\underline{\underline{|\delta| = 1}}$ $\delta^{-1} = \bar{\delta}$

$U = (u_1, \dots, u_n)$ è ortonormale $S = (u_1 \dots u_n) \in SU(n)$

($\det S = 1$)

$D = \underline{\underline{S^{-1}}} A S = {}^t\underline{\bar{S}} A S$ $S^{-1} = {}^t\bar{S}$

diagonale

3) T. spettrale unitario $\left(f : V \to V \text{ unitario} \Rightarrow \exists \text{ base ortonormale diagonalizzante} \right)$

Corollario Se $A \in U(n) \Rightarrow \exists\, S \in SU(n)$ t.c.

$$D = {}^t\bar{S} A S \text{ è diagonale e unitaria}$$

$$\left(D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad |\lambda_j| = 1 \right)$$

Dim $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è unitaria

$\rightsquigarrow$ base ortonormale di autovettori $\rightsquigarrow \boxed{\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)}$

$\boxed{u_1 = \delta^{-1} v_1}$, $u_j = v_j \;\; \forall j > 1$, $\delta = \det(v_1 \dots v_n) \in \mathbb{C}$

$|\delta| = 1 \quad \delta^{-1} = \bar{\delta}$

$\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n) \qquad S = (u_1 \dots u_n) \qquad \left(S^{-1} = {}^t\bar{S} \right)$

$$D = S^{-1} A S = {}^t\bar{S} A S$$

Prodotto Vettoriale in $\mathbb{R}^3$

$X, Y \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow X \times Y \;(= X \wedge Y) \in \mathbb{R}^3$

wedge

$$X \times Y := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

Laplace rispetto a 1ª riga

e_i base canonica di $\mathbb{R}^3$

$X = (x_1, x_2, x_3)$

$Y = (y_1, y_2, y_3)$

Proprietà

1) $Y \times X = -X \times Y$

2) $X \times Y = 0_{\mathbb{R}^3} \iff X, Y$ lin. dip. ⊛

3) $\langle X, X \times Y \rangle = \langle Y, X \times Y \rangle = 0$ ($X \times Y$ è ortogonale a X e Y)

4) $\boxed{\|X \times Y\|^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$

$\cos \widehat{XY} = \dfrac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \, \|Y\|}$ se $X, Y \neq 0$ $\implies \langle X, Y \rangle = \|X\| \, \|Y\| \cos \widehat{XY}$

$\sin \widehat{XY} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{XY}} \geq 0$

⊛ $\implies \boxed{\|X \times Y\| = \|X\| \, \|Y\| \sin \widehat{XY}}$

X, Y lin. indep.

$\Rightarrow X \times Y \neq 0$