Prova esame Dicembre 2020

1) Mostrare che

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1}$$

→ Provo per $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = \overbrace{(1+1)!}^{2!} - 1 = 2 - 1$$

È verificata per $n = 1$

Ipotesi induttiva: Se vale per n provo che è vero per n+1

$$\sum_{k=1}^{\boxed{n+1}} k \cdot k! = ((n+1)+1)! - 1 = \boxed{(n+2)! - 1}$$

$$\underbrace{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + n\cdot n!} + \underbrace{(n+1)\cdot(n+1)!} = ((n+1)+1)! - 1$$

$$\overbrace{(n+1)! - 1} + \overbrace{(n+1)\cdot(n+1)!} = (n+1)!(n+1+1) - 1 =$$

$$= (n+1)!(n+2) - 1 = \boxed{(n+2)! - 1}$$

Vale per n+1 quindi è verificata

$$(n+1)!(n+2) = (n+2)!$$

$$[5!]\cdot 6 = 6!$$

$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$ è dispari?

$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \underbrace{(n+1)!}_{\text{pari}} - 1 \implies$ dispari

$n!$ se $\begin{matrix} n \neq 0 \\ n \neq 1 \end{matrix}$ è sempre pari

es. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \rightarrow$ c'è il 2

$$\left\{ a_n = 7^{n+2} + 8^{2n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$ è un multiplo di 57?

Provo $n=0$

$$a_0 = 7^2 + 8^1 = 49 + 8 = 57 \Rightarrow \text{è multiplo di } 57$$

Ipotesi induttiva: se vale per n provo che è valido per $n+1$

$$a_{n+1} = 7^{(n+1)+2} + 8^{2(n+1)+1} = 7 \cdot 7^{n+2} + \underbrace{8^2}_{57+7=64} \cdot 8^{2n+1}$$

$$= 7(7^{n+2} + 8^{2n+1}) + 57 \cdot 8^{2n+1}$$

$$= 7\underbrace{\left(7^{n+2} + 8^{2n+1}\right)}_{\text{è multiplo di 57 per ipotesi induttiva}} + \underbrace{57 \cdot 8^{2n+1}}_{\text{è multiplo di 57}} \Longrightarrow \text{è multiplo di 57}$$

Ho provato la proposizione per <u>n+1</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{15^n} \overset{\lim_{n\to+\infty}}{=} \frac{7^{n+2}+8^{2n+1}}{15^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7^2\cdot 7^n}{15^n}+\frac{8\cdot 8^{2n}}{15^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[7^2\underbrace{\left(\frac{7}{15}\right)^n}_{\to 0}+8\underbrace{\left(\frac{8^2}{15}\right)^n}_{\to +\infty}\right] = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } a<1 \end{cases}$$

es $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{2^n}_{\to+\infty}} = 0$

2) Relazione di equivalenza ($\sim$)

Caratteristiche che deve soddisfare

- RIFLESSIVA $a \sim a$
- SIMMETRICA $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
- TRANSITIVA $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

$$a-b := \{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{con} \quad a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$\downarrow$

è una successione limitata $\Rightarrow a \sim b$

- RIFLESSIVA OK $\quad a \sim_1 a \Rightarrow a - a = \{a_n - a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$

  è una successione di 0 quindi limitata

- SIMMETRICA OK $\quad a \sim_1 b \Rightarrow b \sim_1 a$

$a-b = \{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ → è limitata

$b-a = \{b_n - a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-(a_n - b_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow$ anche questa successione è limitata

- TRANSITIVA OK $a \sim_1 b \wedge b \sim_1 c \Rightarrow a \sim_1 c$

$$a-c = \{a_n - c_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n + b_n - b_n - c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

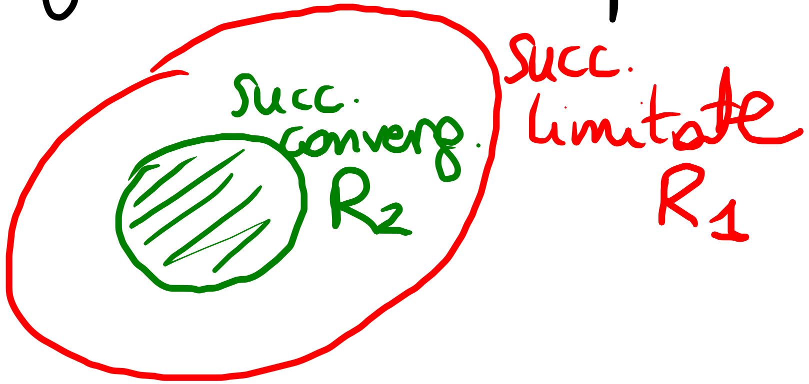
$$= \{\underbrace{(a_n - b_n)}_{\text{è una succ. limitata perchè per ipotesi } a\sim b} + \underbrace{(b_n - c_n)}_{\text{è una succ. limitata perchè } b\sim c}\}_{n\in\mathbb{N}} \Longrightarrow \text{è una succ. limitata quindi } a \sim c$$

$\sim_1$ è una relazione di equivalenza

Esempio: $a_n = \{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata

non è convergente (oscilla tra +1 e -1)

La convergenza a un valore (cioè esiste $\lim_{n \to \infty} a_n$) è più stringente rispetto a essere limitata



$$R_2 \subset R_1$$

3) $f(x) = \sqrt{\ln(2-x) - \ln(x+1)}$

Dominio

$$\begin{cases} 2-x>0 \\ x+1>0 \\ \ln(2-x)-\ln(x+1) \geq 0 \end{cases}$$

~~$(2-x)-(x+1) \geq 0$~~ SBAGLIATO

mettere a sistema
cioè le condizioni devono essere valide contemporaneamente

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$$\begin{cases} x<2 \\ x>-1 \\ \ln\left(\frac{2-x}{x+1}\right) \geq 0 \end{cases}$$

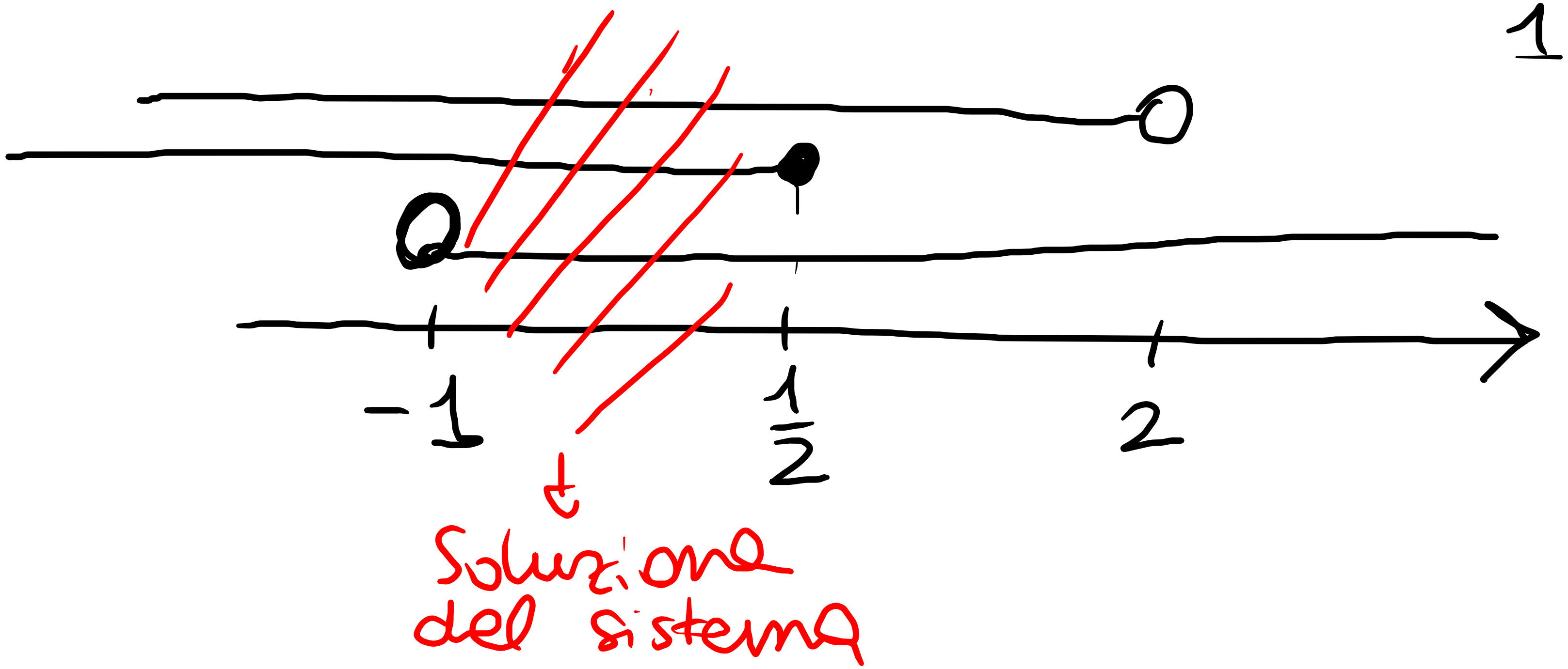
$\ln 1$

$$\begin{cases} x<2 \\ x>-1 \\ \ln(2-x) \geq \ln(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<2 \\ x>-1 \\ 2-x \geq x+1 \end{cases}$$

$$1 \geq 2x$$

$$\begin{cases} x<2 \\ x>-1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$



$D: \quad -1 < x \leq \frac{1}{2}$

$D = \left]-1, \frac{1}{2}\right]$