PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 3
Anno accademico 2020/2021 – CdL MATEMATICA
Terza simulazione – 08.01.2021

1. Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(t) - 4u'(t) + u(t) = e^{-t} \\ \\ u(0) = 0\,, \quad u(1) = 1\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$\begin{aligned} E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 4, \} \cap \\ \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 4\}\,. \end{aligned}$$

3. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 \leq 1 - y,\ -1 \leq z \leq 1\right\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

4. Sia $\omega : \mathbb{R}^3 \to \Omega_1(\mathbb{R}^3)$ la 2-forma differenziale definita da

$$\omega(x, y, z) = xy\, dy \wedge dz - 2yz\, dz \wedge dx + (z^2 - yz)\, dx \wedge dy\,.$$

a) Dimostrare ω che è chiusa.
b) Trovare una 1-forma differenziale $\widetilde{\omega}$ tale che $d\widetilde{\omega} = \omega$.
c) Calcolare $\int_\sigma \omega$, in due modi diversi, dove $\sigma : [-1, 0] \times [1, 2] \to \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u, v) = (uv, u + v, uv)\,.$$