Geometria 1 per Matematica e IADA

Foglio di esercizi 13

15 gennaio 2021

1) Sia $U \subset \mathbb{C}^3$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base ortonormale di U ed estenderla ad una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$.

2) Determinare il complemento ortogonale di $T = \mathrm{span}(t_1, t_2) \subset \mathbb{C}^4$, dove

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ -1+2i \end{pmatrix}.$$

e scrivere esplicitamente la proiezione ortogonale $p_{T^\perp} \colon \mathbb{C}^4 \to T^\perp$.

3) Trovare $S \in \mathrm{SO}(2)$ tale che ${}^tSAS$ sia diagonale, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Trovare $T \in \mathrm{SO}(3)$ tale che ${}^tTBT$ sia diagonale, con

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5) Trovare $S \in \mathrm{SU}(2)$ tale che ${}^t\bar{S}AS$ sia diagonale, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Verificare che l'applicazione lineare $L_S \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ di matrice

$$S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3i & 4 \\ 4 & 3i \end{pmatrix}$$

è unitaria rispetto al prodotto Hermitiano canonico. Trovare una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che diagonalizza L_S, e scrivere la matrice di L_S rispetto a tale base.

7) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che diagonalizzi la matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

8) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizzi la matrice

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

9) Dimostrare che $\mathrm{O}(2)$ è costituito dalle matrici del tipo R_θ e S_θ degli esercizi precedenti, e che $\mathrm{SO}(2)$ è costituito dalle matrici R_θ, con $\theta \in [0, 2\pi]$. (R_θ è la matrice di rotazione di angolo θ, mentre S_θ è la matrice di una simmetria assiale).