giovedì 14 gennaio 2021 13:21

(1) $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. $V_1 \perp V_2$?

NORMALIZZARE E COMPLETARE $\{V_1, V_2\}$ A UNA BASE ON DI $\mathbb{R}^4$. COMPONENTI DI $\omega = (1,1,1,1)$?

$U = \langle V_1, V_2 \rangle$. SCRIVERE LE COMPONENTI DI $P_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ PROIEZIONE ORTOGONALE SU U RISPETTO ALLA BASE CANONICA.

$V_1 \perp V_2$? $\iff \langle V_1, V_2 \rangle = 0$.

$\langle V_1, V_2 \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0$ ✓.

BASE O.N. GENERATA DA $\{V_1, V_2\}$?

$V_3, V_4 \in \{V_1, V_2\}^\perp \rightsquigarrow$ TROVIAMO $\{V_1, V_2\}^\perp$.

$X \in \{V_1, V_2\}^\perp \iff \begin{cases} \langle X, V_1 \rangle = 0 \\ \langle X, V_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightsquigarrow \begin{cases} \langle X, V_1 \rangle = x_1 - x_3 + 2x_4 \\ \langle X, V_2 \rangle = 2x_2 + 2x_3 + x_4 \end{cases}$

$\Rightarrow \{V_1, V_2\}^\perp = \left(\text{SOLUZIONI DI } \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right) = \left(\text{SOL. DI } \begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 - \frac{1}{2} x_4 \end{cases} \right)$

RISOLVIAMO IL SISTEMA $\rightsquigarrow \{V_1, V_2\}^\perp = \text{Span}\left((1, -1, 1, 0), (-2, -\frac{1}{2}, 0, 1) \right)$

$\longrightarrow$ POSSIAMO PRENDERE $V_3 = \frac{(1,-1,1,0)}{\|(1,-1,1,0)\|}$;

PER V_4 POSSIAMO RISOLVERE $\langle (1,-1,1,0), a(1,-1,1,0) + b(-2, -\frac{1}{2}, 0, 1) \rangle = 0$

E PRENDERE LA SOLUZIONE CON NORMA 1.

(PERCHÉ IN QUESTO MODO $V_2 \in V_1^\perp$, $V_3 \in \{V_1, V_2\}^\perp$, $\left.\begin{matrix} V_4 \in \{V_1, V_2\}^\perp \\ V_4 \perp V_3 \end{matrix}\right] \to V_4 \in \{V_1, V_2, V_3\}^\perp$

$\Rightarrow$ BASE ORTOGONALE, E POI SI NORMALIZZA TUTTO.)

$\langle (1, -1, 1, 0), (a - 2b, -a - \frac{1}{2} b, a, b) \rangle = 0$

$\iff 1(a - 2b) + (-1)(-a - \frac{1}{2} b) + 1 \cdot a + 0 \cdot b = 0$

$\iff a - 2b + a + \frac{1}{2} b + a = 0 \iff 3a = \frac{3}{2} b$

$\iff a = \frac{1}{2} b$. PER SEMPLICITÁ PONIAMO $b = 2$, E CI PREOCCUPIAMO DOPO DI NORMALIZZARE.

$\Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow V_4 = (a - 2b, -a - \frac{1}{2} b, a, b) = (-3, -2, 1, 2)$.

$\rightsquigarrow \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ BASE ORTOGONALE DI $\mathbb{R}^4$.

$\|V_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$, $\|V_2\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$\|V_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3}$ $\|V_4\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ V_1' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 0 \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, V_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, V_3' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, V_4' = \begin{pmatrix} -3/3\sqrt{2} \\ -2/3\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} \\ 2/3\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^4$ ///.

• COMPONENTI DI $\omega = (1\ 1\ 1\ 1)$ RISPETTO A $\mathcal{B}$?

$\mathcal{B}$ O.N. $\Rightarrow \omega = \sum_{i=1}^{4} \langle \omega, V_i' \rangle V_i' \rightsquigarrow$ COMPONENTE i-ESIMA É $\langle \omega, V_i' \rangle$.

$\langle \omega, V_1' \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \leftarrow 1^a$ COMPONENTE.

$\langle \omega, V_2' \rangle = 0 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \leftarrow 2^a$ COMPONENTE

$\langle \omega, V_3' \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \leftarrow 3^a$ COMPONENTE

$\langle \omega, V_4' \rangle = -\frac{3}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}} = -\frac{2}{3\sqrt{2}} \leftarrow 4^a$ COMPONENTE.

• $U = \text{span}(V_1, V_2) = \text{span}(\underbrace{V_1', V_2'}_{\text{BASE O.N. DI } U!})$. MATRICE DI P_U?

$P_U(x) = P_U\left(\sum_{i=1}^{4} \langle x, V_i' \rangle V_i' \right) \underset{V_3', V_4' \in U^\perp}{=} \langle x, V_1' \rangle V_1' + \langle x, V_2' \rangle V_2'$.

(! $\langle e_i, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \rangle = x_i \ \forall i$.)

$\rightsquigarrow P_U(e_1) = \langle e_1, V_1' \rangle V_1' + \langle e_1, V_2' \rangle V_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} V_1' + 0 V_2' = (\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \frac{2}{6})$

$P_U(e_2) = \langle e_2, V_1' \rangle V_1' + \langle e_2, V_2' \rangle V_2' = 0 V_1' + \frac{2}{3} V_2' = (0, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9})$.

$P_U(e_3) = -\frac{1}{\sqrt{6}} V_1' + \frac{2}{3} V_2' = (-\frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9} + \frac{1}{6}, \frac{2}{9} - \frac{2}{6}) = (-\frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{11}{18}, -\frac{2}{18})$

$P_U(e_4) = \frac{2}{\sqrt{6}} V_1' + \frac{1}{3} V_2' = (\frac{2}{6}, 0, -\frac{2}{6}, \frac{4}{6}) + (0, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{7}{9})$.

$\Rightarrow M_e^e(P_U) = \left(P_U(e_1) \middle| P_U(e_2) \middle| P_U(e_3) \middle| P_U(e_4) \right) = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 2/9 \\ -1/6 & 4/9 & 11/18 & -1/9 \\ 2/6 & 2/9 & -2/18 & 7/9 \end{pmatrix}$. ///.

---

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ DEF. POSITIVA? BASE O.N. PER IL PRODOTTO SCALARE DI A?

S INVERTIBILE t.c. $A = {}^tSS = {}^tSIS$? PROJ. ORTOGONALE SU $\text{span}(e_1, e_2)$?

• $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{R_3 + R_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix} \text{SVILUPPIAMO} \\ \text{L'ULTIMA RIGA} \end{matrix} \right) =$

$= -(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \left(\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right) =$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 1 - \lambda + 1 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$

$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \iff \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} \Rightarrow 2$ RADICI POSITIVE ✓.

$\Rightarrow$ A HA TRE AUTOVALORI POSITIVI $\Downarrow$ A É DEFINITA POSITIVA ✓//.

• BASE ON PER IL PRODOTTO SCALARE DI A? (PER SEMPLICITÁ DENOTIAMO QUESTO PROD. SCALARE $\langle \cdot, \cdot \rangle$.)

IL METODO PIÚ SEMPLICE CHE ABBIAMO É GRAHAM-SCHMIDT SU UNA BASE PRE-ESISTENTE.

$\rightsquigarrow$ ORTONORMALIZZIAMO $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$e_1' = e_1$, $e_2' = e_2 - \frac{\langle e_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1$, $e_3' = e_3 - \frac{\langle e_3, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle e_3, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2$.

$\rightsquigarrow \{e_1', e_2', e_3'\}$ BASE ORTOGONALE; $e_i'' = \frac{e_i'}{\sqrt{\langle e_i', e_i' \rangle}} \to \{e_1'', e_2'', e_3''\}$ BASE ORTONORMALE ✓.

(! $\langle e_i, e_j \rangle = A_{ij}$)

$\Rightarrow e_1' = e_1$, $e_2' = e_2 - \frac{-1}{1} e_1 = e_1 + e_2$, $e_3' = e_3 - \frac{1}{1} e_1 - \frac{-1}{2} e_2 = e_3 - e_1 + \frac{1}{2} e_2$

$\Rightarrow e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\langle e_1', e_1' \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = 1 \longrightarrow$ GIÁ NORMALE ✓.

$\langle e_2', e_2' \rangle = (1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \to$ GIÁ NORMALE ✓

$\langle e_3', e_3' \rangle = (-1\ \frac{1}{2}\ 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-\frac{1}{2}\ 1\ \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow e_1'' = e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2'' = e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3'' = e_3' / \sqrt{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

• S t.c. $A = {}^tSS = {}^tSIS$?

CONSIDERIAMO LA BASE $\mathcal{B} = \{e_1'', e_2'', e_3''\}$ ORTONORMALE RISPETTO A $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$\Rightarrow$ LA MATRICE DI $\langle \cdot, \cdot \rangle$ RISPETTO A $\mathcal{B}$ É $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

$\Rightarrow A = {}^t(M_C^{\mathcal{B}}) B M_C^{\mathcal{B}}$, CON $\mathcal{C}$ LA BASE CANONICA.

$S = M_e^{\mathcal{B}} \Rightarrow A = {}^tS B S \underset{B = I}{=} {}^tS S$

$\Rightarrow S = (M_{\mathcal{B}}^C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1}$.

• PROIEZIONE ORTOGONALE SU $U = \text{span}(e_1, e_2) = \text{span}(e_1'', e_2'')$.

$P_U(x) = \langle x, e_1'' \rangle e_1'' + \langle x, e_2'' \rangle e_2''$.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle x, \underset{e_1''}{e_1} \rangle = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 + x_3$

$\langle x, e_2'' \rangle = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2$

$\Rightarrow P_U((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

---

(3) $A, P \in M_n(\mathbb{R})$ con A simm. e def. pos.

L_P SIMM. RISPETTO AL PROD. SCALARE INDOTTO DA $A \iff AP$ É SIMM.?

INDICHIAMO CON $\langle \cdot, \cdot \rangle$ IL PRODOTTO SCALARE DI A.

L_P SIMM. RISPETTO $\langle \cdot, \cdot \rangle \iff \forall x, y \ \langle L_P x, y \rangle = \langle x, L_P y \rangle$

$\overset{\forall x, y}{\iff} \langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle \iff {}^tx\, {}^tPAy = {}^tx APy.\ \forall x, y.$ ⊛

A SIMMETRICA $\Rightarrow A = {}^tA \Rightarrow {}^tPA = {}^tP\, {}^tA = {}^t(AP)$.

QUINDI, ⊛ É VALIDO $\iff {}^tPA = AP \iff {}^t(AP) = AP \iff AP$ SIMMETRICA ✓//.

[QUESTO É VERO PERCHÉ SCEGLIENDO $X = e_i$, $Y = e_j$ OTTENIAMO ${}^tx({}^tPA)y = ({}^tPA)_{ij}$, ${}^tx(AP)y = (AP)_{ij}$. QUINDI ⊛ É SUFFICIENTE PER DIRE ${}^tPA = AP$. ✓//]