venerdì 15 gennaio 2021 17:29

SPAZIO DUALE

V sp. vettoriale di dim n su $\mathbb{K}$

$V^* = \{ f : V \to \mathbb{K} \text{ lineari} \}$.

$e_1, \dots, e_n$ base di V

$\rightsquigarrow$ $e_1^*, \dots, e_n^*$ base di V^*.

$e_i^*(v) = e_i^*(v_1 e_1 + \dots + v_n e_n) = v_i$

$f \in V^* \to$ CI BASTA OSSERVARE $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

$\to f = \sum f(e_i)\, e_i^*$.

$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

(1) V SP. VETT. EUCLIDEO : $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$v \in V$ $\begin{cases} \varphi_v : V \to \mathbb{R} \\ w \mapsto \langle v, w \rangle \end{cases}$

(1) φ_v è lineare $(\Leftrightarrow \varphi_v \in V^*)$?

$\varphi_v(\lambda w + \mu w') = \langle v, \lambda w + \mu w' \rangle$

$= \lambda \langle v, w \rangle + \mu \langle v, w' \rangle = \lambda \varphi_v(w) + \mu \varphi_v(w')$

(2) $\begin{cases} \varphi : V \to V^* \\ v \mapsto \varphi_v \end{cases}$

$\varphi(\lambda v + \mu v') = \lambda \varphi(v) + \mu \varphi(v')$

$\langle \lambda v + \mu v', \bullet \rangle = \lambda \langle v, \bullet \rangle + \mu \langle v', \bullet \rangle$

$\Leftrightarrow$

$\forall w$ $\langle \lambda v + \mu v', w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \mu \langle v', w \rangle$ ✓.

φ INIETTIVA?

v, v' t.c. $\varphi_v = \varphi_{v'}$ ($\varphi(v)$, $\varphi(v')$) $\Rightarrow v = v'$.

$\forall w$ $\varphi_v(w) = \varphi_{v'}(w)$

$\forall w$ $\langle v, w \rangle = \langle v', w \rangle$.

$\forall w$ $\langle v, w \rangle - \langle v', w \rangle = 0$

$\forall w$ $\langle v - v', w \rangle = 0$

$\Rightarrow v - v' = 0 \quad v = v'$.

$\langle v - v', v - v' \rangle = 0$

$\| v - v' \| = 0 \Rightarrow v = v'$ ✓

$\varphi(v) = 0 \in V^*$

$\forall w \ \langle v, w \rangle = 0$

$\Rightarrow v = 0$ ✓.

$\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$

$\dim V^*$

$V \to V^*$

$v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$

(2) $W = \left(\text{SOL. DI } \begin{cases} x_1 = -x_3 + 3x_4 \\ x_2 = 2x_3 - 3x_4 \end{cases} \right)$

$W = \{ (-x_3 + 3x_4, 2x_3 - 3x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$

$= \langle (-1, 2, 1, 0), (3, -3, 0, 1) \rangle$.

BASE DI W. B_W

(1) ORTONORM. B_W (2) TROVARE $W^\perp$, $B_{W^\perp}$, ORTONORM. $B_{W^\perp}$

(1) COME FARE SE DIMENTICHIAMO G.S.?

$v_1 = (-1, 2, 1, 0)$, $v_2 = (3, -3, 0, 1)$

$\begin{cases} v_2' \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) \to v_2' = a v_1 + b v_2 \\ v_2' \perp v_1 \to \langle v_2', v_1 \rangle = 0. \quad \|v_2'\| = 1. \end{cases}$

$v_2' = (-a + 3b, 2a - 3b, a, b)$

$\begin{cases} \langle v_2', v_1 \rangle = 0 \\ \langle v_2', v_2' \rangle = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a - 3b + 4a - 6b + a = 0 \\ (-a+3b)^2 + (2a-3b)^2 + a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$

$\to \begin{cases} 6a = 9b \\ \dots \end{cases}$ OPPURE!

$6a = 9b$

$a = 3 \to 18 = 9b \to b = 2$

$\to v_2' = (-3, 0, 3, 2)$

$v_2'' = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} \to$ 2° VETT. DELLA BASE ORTONORMALE.

$\rightsquigarrow \left\{ v_1'' = \frac{v_1}{\|v_1\|}, v_2'' = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} \right\}$.

$v_1' = v_1$ ✓.

$\begin{cases} v_2' \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) = \operatorname{Span}(v_1, v_2') \\ v_2' \perp v_1 \ (o\ v_1') : \langle v_2', v_1 \rangle = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} v_3' \in \operatorname{Span}(v_1, v_2, v_3) \rightsquigarrow a, b, c \\ v_3' \perp v_1' (o\ v_1) \quad v_3' \perp v_2' \ (o\ v_2) \end{cases}$

$\begin{cases} v_n' \in \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_n) \\ v_n' \perp v_1, v_n' \perp v_2, \dots, v_n' \perp v_{n-1}. \end{cases}$

E POI SI NORMALIZZA TUTTO

$v_j'' = \frac{v_j'}{\|v_j'\|} \quad \forall j$.

$\to \{ v_j'' \}$ BASE O.N. ✓✓✓.

$W^\perp = \{ v \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W \} = \left(\text{SOL. DI } \begin{cases} \langle v, v_1 \rangle = 0 \\ \langle v, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \right)$

(3) (a) $\|x_0\|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = \langle x_1 e_1 + e_3, x_1 e_1 + e_3 \rangle =$ ($x_1 = 1 + \sqrt{2}$)

$= \langle x_1 e_1, x_1 e_1 \rangle + \langle x_1 e_1, e_3 \rangle + \langle e_3, x_1 e_1 \rangle + \langle e_3, e_3 \rangle$

$= x_1^2 \langle e_1, e_1 \rangle + 2 x_1 \langle e_1, e_3 \rangle + \langle e_3, e_3 \rangle = (*)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$

$(*) = x_1^2 \, 1 + 2 x_1 (-1) + 3$.

$v_1 \rightsquigarrow v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} \to \langle v_1, v_1 \rangle$.

$v_2 \rightsquigarrow \begin{cases} v_2' \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) \\ \langle v_2', v_1 \rangle = 0 \end{cases}$

$v_0 = e_1 + 2e_2 \rightsquigarrow$ COORD?

$v_0 = \sum \langle v_0, v_i'' \rangle v_i''$

(4) PUÒ ESISTERE $\langle \cdot, \cdot \rangle$ PROD. SCALARE SU $\mathbb{R}^2$ t.c.

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 5$, $\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$?

$\left\langle 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 \cdot (-2) \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= -8 \cdot 5 = -40$ ✗.