PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 3
Anno accademico 2020/2021 – CdL MATEMATICA
Terza simulazione – 08.01.2021

1. Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(t) - 4u'(t) + u(t) = e^{-t} \\ \\ u(0) = 0\,, \quad u(1) = 1\,. \end{cases}$$

Svolgimento. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ ha soluzioni

$$\lambda = 2 - \sqrt{3}\,, \qquad \lambda = 2 + \sqrt{3}\,,$$

per cui le soluzioni dell'equazione autonoma associata sono del tipo

$$ae^{(2-\sqrt{3})t} + be^{(2+\sqrt{3})t}.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione differenziale, con il metodo di simiglianza, del tipo $u(t) = ce^{-t}$. Sostituendo, si trova che deve essere $c = \frac{1}{6}$. Quindi, le soluzioni dell'equazione differenziale sono del tipo

$$ae^{(2-\sqrt{3})t} + be^{(2+\sqrt{3})t} + \tfrac{1}{6}\,e^{-t}.$$

Imponiamo le condizioni ai limiti:

$$a + b + \tfrac{1}{6} = 0\,, \qquad ae^{2-\sqrt{3}} + be^{2+\sqrt{3}} + \tfrac{1}{6}\,e^{-1} = 1\,.$$

Risolvendo il sistema, troviamo

$$a = \frac{1 - 6e - e^{3+\sqrt{3}}}{6(e^{3+\sqrt{3}} - e^{3-\sqrt{3}})}\,, \qquad b = \frac{6e - 1 + e^{3-\sqrt{3}}}{6(e^{3+\sqrt{3}} - e^{3-\sqrt{3}})}\,.$$

In conclusione, il problema dato ha un'unica soluzione:

$$u(t) = \frac{1 - 6e - e^{3+\sqrt{3}}}{6(e^{3+\sqrt{3}} - e^{3-\sqrt{3}})}e^{(2-\sqrt{3})t} + \frac{6e - 1 + e^{3-\sqrt{3}}}{6(e^{3+\sqrt{3}} - e^{3-\sqrt{3}})}e^{(2+\sqrt{3})t} + \tfrac{1}{6}\,e^{-t}.$$

2. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$\begin{aligned} E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 4, \} \cap \\ \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 4\}\,. \end{aligned}$$

Svolgimento. Utilizziamo le coordinate cilindriche: ponendo

$$x = \rho\cos\theta\,, \quad y = \rho\sin\theta\,,$$

vediamo che

$$(z-1)^2 \leq 4-\rho^2\,, \qquad (z+1)^2 \leq 4-\rho^2\,,$$

ossia

$$1-\sqrt{4-\rho^2} \leq z \leq 1+\sqrt{4-\rho^2}\,, \quad -1-\sqrt{4-\rho^2} \leq z \leq -1+\sqrt{4-\rho^2}\,.$$

Ne segue che deve essere

$$1-\sqrt{4-\rho^2} \leq -1+\sqrt{4-\rho^2}\,,$$

per cui $0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$, e

$$1-\sqrt{4-\rho^2} \leq z \leq -1+\sqrt{4-\rho^2}\,.$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}
|E| &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{1-\sqrt{4-\rho^2}}^{-1+\sqrt{4-\rho^2}} \rho\, dz \right) d\rho \right) d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\,(2\sqrt{4-\rho^2}-2)\, d\rho \\
&= 2\pi \left[-\frac{(4-\rho^2)^{3/2}}{3/2} - \rho^2 \right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{10}{3}\pi\,.
\end{aligned}$$

3. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 \leq 1-y,\ -1 \leq z \leq 1 \right\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

Svolgimento. Dalla disuguaglianza $y^2 \leq 1-y$ vediamo che dovrà essere

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Parametrizziamo M con la funzione $\sigma : [\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u,v) = (u^2, u, v)\,.$$

Calcoliamo

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = (2u,1,0)\,, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (0,0,1)\,,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (1,-2u,0)\,.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}
\iota_2(\sigma) &= \int_{[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}]\times[-1,1]} \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv \\
&= \int_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{1+4u^2}\, dv \right) du \\
&= 2\int_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{1+4u^2}\, du\,.
\end{aligned}$$

Essendo

$$\int \sqrt{1+4u^2}\, du = \frac{1}{4}\Big(\sinh^{-1}(2u) + 2u\sqrt{1+4u^2} \Big) + c\,,$$

troviamo che

$$\begin{aligned}
\iota_2(\sigma) &= \frac{1}{2}\left[\sinh^{-1}(2u) + 2u\sqrt{1+4u^2} \right]_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sinh^{-1}(\sqrt{5}-1) + \sinh^{-1}(\sqrt{5}+1) \Big) + \\
&\quad +(\sqrt{5}-1)\sqrt{7-2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}+1)\sqrt{7+2\sqrt{5}}\,.
\end{aligned}$$

4. Sia $\omega : \mathbb{R}^3 \to \Omega_1(\mathbb{R}^3)$ la 2-forma differenziale definita da

$$\omega(x,y,z) = xy\, dy \wedge dz - 2yz\, dz \wedge dx + (z^2 - yz)\, dx \wedge dy\,.$$

a) Dimostrare ω che è chiusa.
b) Trovare una 1-forma differenziale $\widetilde{\omega}$ tale che $d\widetilde{\omega} = \omega$.
c) Calcolare $\int_\sigma \omega$, in due modi diversi, dove $\sigma : [-1,0] \times [1,2] \to \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u,v) = (uv, u+v, uv)\,.$$

<u>Svolgimento</u>. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo di vettori associato a ω:

$$F(x,y,z) = (xy, -2yz, z^2 - yz)\,.$$

Verifichiamo che

$$\mathrm{div}F(x,y,z) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(xy) + \frac{\partial\sigma}{\partial y}(-2yz) + \frac{\partial\sigma}{\partial z}(z^2 - yz) = y - 2z + (2z - y) = 0\,.$$

Pertanto, F è solenoidale, ossia ω è chiusa.

Troviamo un potenziale vettore di F, ossia un campo di vettori $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{rot}V = F$. Usando la formula vista a lezione,

$$\begin{aligned}
V(x,y,z) &= \int_0^1 tF(tx,ty,tz) \times (x,y,z)\, dt \\
&= \int_0^1 t^3(xy, -2yz, z^2 - yz) \times (x,y,z)\, dt \\
&= \tfrac{1}{4}(y^2 z - 3yz^2, xz^2 - 2xyz, xy^2 + 2xyz)\,,
\end{aligned}$$

per cui

$$\widetilde{\omega} = \tfrac{1}{4}(y^2z - 3yz^2)\,dx + \tfrac{1}{4}(xz^2 - 2xyz)\,dy + \tfrac{1}{4}(xy^2 + 2xyz)\,dz\,.$$

Calcoliamo ora $\int_\sigma \omega$. Abbiamo che

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = (v,1,v)\,, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (u,1,u)\,,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (u-v,0,v-u)\,.$$

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \omega &= \int_{[-1,0]\times[1,2]} F(\sigma(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right)du\,dv\\
&= \int_{-1}^{0}\left(\int_1^2 (u^2v+uv^2, -2u^2v-2uv^2, u^2v^2-u^2v-uv^2)\cdot(u-v,0,v-u)\,dv\right)du\\
&= \int_{-1}^{0}\left(\int_1^2 (2u^3v - u^3v^2 + u^2v^3 - 2uv^3)\,dv\right)du\\
&= \int_{-1}^{0}\left[u^3v^2 - \frac{1}{3}u^3v^3 + \frac{1}{4}u^2v^4 - \frac{1}{2}uv^4\right]_{v=1}^{v=2}du\\
&= \int_{-1}^{0}\left(\frac{2}{3}u^3 + \frac{15}{4}u^2 - \frac{15}{2}u\right)du\\
&= \left[\frac{1}{6}u^4 + \frac{5}{4}u^3 - \frac{15}{4}u^2\right]_{-1}^{0}\\
&= \frac{29}{6}\,.
\end{aligned}$$

Adesso calcoliamo

$$\int_{\partial\omega}\widetilde{\omega} = \int_{\sigma\circ\alpha_1^-}\widetilde{\omega} + \int_{\sigma\circ\beta_1^+}\widetilde{\omega} + \int_{\sigma\circ\alpha_2^+}\widetilde{\omega} + \int_{\sigma\circ\beta_2^-}\widetilde{\omega}\,.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^- : [1,2]\to\mathbb{R}^2\,, && \alpha_1^-(v) = (-1, 3-v)\,,\\
&\beta_1^+ : [1,2]\to\mathbb{R}^2\,, && \beta_1^+(v) = (0, v)\,,\\
&\alpha_2^+ : [-1,0]\to\mathbb{R}^2\,, && \alpha_2^+(u) = (u, 1)\,,\\
&\beta_2^- : [-1,0]\to\mathbb{R}^2\,, && \beta_2^-(u) = (-1-u, 2)\,,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
&\sigma\circ\alpha_1^- : [1,2]\to\mathbb{R}^3\,, && \sigma\circ\alpha_1^-(v) = (v-3, 2-v, v-3)\,,\\
&\sigma\circ\beta_1^+ : [1,2]\to\mathbb{R}^3\,, && \sigma\circ\beta_1^+(v) = (0, v, 0)\,,\\
&\sigma\circ\alpha_2^+ : [-1,0]\to\mathbb{R}^3\,, && \sigma\circ\alpha_2^+(u) = (u, u+1, u)\,,\\
&\sigma\circ\beta_2^- : [-1,0]\to\mathbb{R}^3\,, && \sigma\circ\beta_2^-(u) = (-2-2u, 1-u, -2-2u)\,,
\end{aligned}$$

Procedendo con i calcoli,

$$
\begin{aligned}
\int_{\sigma\circ\alpha_1^-}\widetilde{\omega} &= \frac{1}{4}\int_1^2 \Big((2-v)^2(v-3)-3(2-v)(v-3)^2,\\
&\qquad (v-3)^3-2(v-3)(2-v),\\
&\qquad\quad (v-3)(2-v)^2+2(v-3)^2(2-v)\Big)\cdot(1,-1,1)\,dv\\
&= \frac{1}{4}\int_1^2 (3v^2-16v+21)\,dv = 1\,,
\end{aligned}
$$

$$
\int_{\sigma\circ\beta_1^+}\widetilde{\omega} = \frac{1}{4}\int_1^2 (0,0,0)\cdot(0,1,0)\,dv = 0\,,
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\sigma\circ\alpha_2^+}\widetilde{\omega} &= \frac{1}{4}\int_{-1}^0 \Big((u+1)^2u-3(u+1)u^2,\\
&\qquad u^3-2u^2(u+1),\\
&\qquad\quad u(u+1)^2+2u^2(u+1)\Big)\cdot(1,1,1)\,du\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^0 (u^2+2u)\,du = -\frac{1}{6}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\sigma\circ\beta_2^-}\widetilde{\omega} &= \frac{1}{4}\int_{-1}^0 \Big(-2(1-u)^2(1+u),-12(1-u)(1+u)^2,\\
&\qquad -8(1+u)^3-8(1+u)^2(1-u),\\
&\qquad\quad -2(1+u)(1-u)^2+8(1+u)^2(1-u)\Big)\cdot(-2,-1,-2)\,du\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^0 (32\,u+32)\,du = 4\,,
\end{aligned}
$$

per cui

$$
\int_{\partial\omega}\widetilde{\omega} = 1+0-\frac{1}{6}+4 = \frac{29}{6}\,.
$$

A titolo illustrativo, vediamo come si risolve l'equazione differenziale dell'esercizio 1 con il metodo della variazione delle costanti. Cerchiamo una soluzione del tipo

$$u(t) = a(t)e^{(2-\sqrt{3})t} + b(t)e^{(2+\sqrt{3})t}.$$

Abbiamo che

$$u'(t) = a'(t)e^{(2-\sqrt{3})t} + b'(t)e^{(2+\sqrt{3})t} + (2-\sqrt{3})a(t)e^{(2-\sqrt{3})t} + (2+\sqrt{3})b(t)e^{(2+\sqrt{3})t},$$

e imponiamo $\boxed{a'(t)e^{(2-\sqrt{3})t} + b'(t)e^{(2+\sqrt{3})t} = 0}$.
Procediamo,

$$\begin{aligned} u''(t) = {} & (2-\sqrt{3})a'(t)e^{(2-\sqrt{3})t} + (2+\sqrt{3})b'(t)e^{(2+\sqrt{3})t} + \\ & +(2-\sqrt{3})^2 a(t)e^{(2-\sqrt{3})t} + (2+\sqrt{3})^2 b(t)e^{(2+\sqrt{3})t}, \end{aligned}$$

semplifichiamo,

$$u''(t) - 4u'(t) + u(t) = (2-\sqrt{3})a'(t)e^{(2-\sqrt{3})t} + (2+\sqrt{3})b'(t)e^{(2+\sqrt{3})t},$$

e imponiamo $\boxed{-\sqrt{3}a'(t)e^{(2-\sqrt{3})t} + \sqrt{3}b'(t)e^{(2+\sqrt{3})t} = e^{-t}}$.
Risolvendo il sistema delle due equazioni inquadrate, troviamo

$$a'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\, e^{-(3-\sqrt{3})t}\,, \qquad b'(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\, e^{-(3+\sqrt{3})t}\,,$$

quindi, primitivando,

$$a(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{1}{3-\sqrt{3}}\, e^{-(3-\sqrt{3})t} + c_1\,, \qquad b(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{-1}{3+\sqrt{3}}\, e^{-(3+\sqrt{3})t} + c_2\,.$$

In conclusione, si vede che

$$u(t) = a(t)e^{(2-\sqrt{3})t} + b(t)e^{(2+\sqrt{3})t} = c_1 e^{(2-\sqrt{3})t} + c_2 e^{(2+\sqrt{3})t} + \tfrac{1}{6}\, e^{-t}.$$