ESERCIZI DI GEOMETRIA, FOGLIO 12

Trieste, 17 gennaio 2021

1. (1) Data la matrice unitaria
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
calcolare la forma normale diagonale di A, una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di A e una matrice unitaria S tale che ${}^t\bar{S}AS$ sia diagonale.

   (2) Domanda analoga alla precedente in $\mathbb{C}^4$: Data la matrice unitaria
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
calcolare la forma normale diagonale di B, una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di B e una matrice unitaria S tale che ${}^t\bar{S}BS$ sia diagonale.

2. Delle matrici A, B dell'esercizio precedente, calcolare la forma normale ortogonale, interpretandole come matrici ortogonali.

3. Si consideri la seguente matrice ortogonale che rappresenta una riflessione
$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$
Calcolare una matrice ortogonale S, e la sua inversa ${}^tS$, tali che ${}^tSAS$ sia diagonale.

4. (1) Siano $f, g : V \to V$ due endomorfismi di uno spazio vettoriale V che commutano (cioè $f \circ g = g \circ f$). Sia $\mathrm{Aut}_f(\lambda)$ un autospazio di f. Dimostrare che $g(\mathrm{Aut}_f(\lambda)) \subset \mathrm{Aut}_f(\lambda)$, cioè $\mathrm{Aut}_f(\lambda)$ è invariante per g.

   (2)* Siano $f, g : V \to V$ due endomorfismi unitari di uno spazio vettoriale unitario V di dimensione finita che commutano. Utilizzando il teorema sulla forma normale per automorfismi unitari, dimostrare che esiste una base ortonormale di V formata da autovettori comuni a f e g (cioè f e g sono diagonalizzabili simultaneamente). (Suggerimento: considerare la restrizione $g : \mathrm{Aut}_f(\lambda) \to \mathrm{Aut}_f(\lambda)$ a ogni autospazio di f, e ricordare che è diagonalizzabile ...)