Esercizio: $i\frac{d}{dx}$ come operatore su $L^2(\mathbb{R})$

[Ieri: $L^2([-L,L])$]

Mostrare che con il dominio

$$D = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \frac{df}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

(è il dominio più grande in cui è possibile definire $\frac{d}{dx}$)

$i\dfrac{d}{dx}$ $\bar{e}$ un operatore autoaggiunto.

1) Per quali $g \in L^2(\mathbb{R})$ $\exists\ \tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$ tale che: $\left(g, \dfrac{df}{dx}\right) = (\tilde{g}, f),\ \forall f \in D$?

$\rightsquigarrow$ ci definisce $D^\dagger$.

$$\left(g, \frac{df}{dx}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, g(x)^* \frac{df(x)}{dx}$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{d g(x)}{dx}\right)^* f(x) + \lim_{L_1 \to +\infty} g^*(L_1) f(L_1) - \lim_{L_2 \to -\infty} g^*(L_2) f(L_2)$$

Come minimo dobbiamo assumere $g \in D$ in modo che $\frac{dg}{dx}$ abbia senso e sia in L^2. Per riuscire a riscrivere:

$$\left(g, \frac{df}{dx}\right) = -\left(\frac{dg}{dx}, f\right) \qquad \tilde{g} \equiv -\frac{dg}{dx}$$

dobbiamo cancellare i termini di bordo.

Sorpresa rispetto al corso di ieri:
$f, g \in D$ è sufficiente per cancellare i termini di bordo!

Se $g, f \in \underline{\boxed{D}} \implies g * f \in L^1(\mathbb{R})$

$g * f$ ha anche derivata prima in $L^1(\mathbb{R})$:

$$\frac{d}{dx}(g * f) = \frac{dg^*}{dx} f + g^* \frac{df}{dx} \in L^2(\mathbb{R})$$

Al membro destro abbiamo prodotti di funzioni in $L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ anche $\frac{d}{dx}(g^*f)$ è $\in L^1(\mathbb{R})$. Questo implica che la funzione $(g^*f)(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$

[<u>Lemma</u>: $F \in L^1(\mathbb{R})$, $\frac{dF}{dx} \in L^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} F(x) = 0$]

Quindi i termini di bordo si cancellano!

$\Rightarrow D^\dagger = D$ per una qualsiasi $g \in D$

abbiamo: $\left(g, \frac{df}{dx}\right) = -\left(\frac{dg}{dx}, f\right)$ ✓

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger = -\frac{d}{dx} \text{ su } D.$$

$\Rightarrow \left(i\frac{d}{dx}\right)^\dagger = i\frac{d}{dx}$ autoaggiunto

---

2) Idea: abbiamo visto che T_x su

$\hat{D} = \{ f \in L^2 \mid x f(x) \in L^2 \}$ è autoaggiunto

$$
\begin{tikzcd}
i\dfrac{d}{dx} \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & : & D = \left\{ f \in L^2 \,\middle|\, \dfrac{df}{dx} \in L^2 \right\} \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
T_k & : & \widehat{D} = \left\{ \hat{f}(k) \in L^2 \,\middle|\, k\hat{f}(k) \in L^2 \right\}
\end{tikzcd}
$$

$$T_k : \hat{f}(k) \longmapsto k\hat{f}(k)$$

$$\mathcal{F}\left[i\frac{d}{dx} f(x) \right](k) = k\hat{f}(k)$$

$$= k\,\mathcal{F}[f(x)](k) = T_k\,\mathcal{F}[f(x)](k)$$

Sul dominio denso D:

$$\boxed{\mathcal{F} \circ \left(i\frac{d}{dx}\right) = T_k \circ \mathcal{F}}$$

$$i\frac{d}{dx} = \mathcal{F}^{-1} \circ T_k \circ \mathcal{F}$$

Usiamo che $T_k^\dagger = T_k$ e che: $\boxed{\mathcal{F}^\dagger = 2\pi\,\mathcal{F}^{-1}}$

$$\left(i\frac{d}{dx}\right)^\dagger = \mathcal{F}^\dagger \circ T_k^\dagger \circ \left(\mathcal{F}^{-1}\right)^\dagger$$

$+$

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\right)^\dagger = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}$$

$$= \left(\cancel{2\pi}\, \mathcal{F}^{-1}\right) \circ T_K \circ \left(\frac{1}{\cancel{2\pi}} \mathcal{F}\right)$$

$$= \mathcal{F}^{-1} \circ T_K \circ \mathcal{F} = \left(i \frac{d}{dx}\right) \checkmark$$

Autovalori e autovettori:

Considariamo $T : H \to H$

autovettore è un $v \neq 0 \in H$ con

$$T(v) = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

autovalore.

È difficile garantire l'esistenza di autovettori per operatori su spazi di Hilbert ∞-dim.

Esempi: ⊙ su l^2 T_k operatore di traslazione $\{a_n\} \longmapsto \{a_{n+k}\}$

$T_k^\dagger = T_{-k}$ $\qquad \{b_n\} \longmapsto \{b_{n-k}\}$, $b_i = 0$, $i \leq 0$

Supponiamo esista b tale che:

$$\boxed{T_{-k}(b) = \lambda b} \quad (*)$$

$$b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

$$T_{-k}(b) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

$$(T_{-k}(b))_1 = b_{1-k} = 0 \;; \; (T_{-k}(b))_2 = b_{2-k} = 0$$

$$\ldots (T_{-k}(b))_{k+1} = b_{k+1-k} = b_1$$

Componente 1 di $(*)$: $(T_{-k}(b))_1 = \lambda b_1$

fino a k

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \lambda b_1 \\ \| & & \vdots \\ & & \\ \vdots & & \lambda b_k \\ k & & \end{array}$$

$\Rightarrow$ necessariamente $\rightarrow \lambda = 0$

$\searrow \boxed{b_1 = \dots = b_k = 0}$

$$\lambda b_{k+1} = b_1 = 0, \quad \lambda b_{k+2} = b_2 = 0$$

$$\dots \quad \lambda b_{2k} = b_k = 0$$

Se $\lambda = 0$:

$$\underbrace{\lambda(b_1, b_2, b_3, \ldots)} = (\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{k}, b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

$$= 0$$

$$\Longrightarrow b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0 \Longrightarrow b = 0$$

Possiamo assumere $\lambda \neq 0$

$$\lambda(\underbrace{b_1, b_2, b_3, \ldots}_{k}\ \underbrace{\ldots}_{k}) = \frac{1}{\lambda}(\overbrace{\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}}^{k}, \overbrace{b_1, b_2, b_3, \ldots}^{k})$$

$b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0$

$b_{k+1} = b_{k+2} = \ldots = b_{2k} = 0$ e così via

$\Longrightarrow b = 0 \Longrightarrow$ non ci sono autovettori.

$$T_k(a) = \lambda(a)$$

$$(a_{k+1}, a_{k+2}, \dots) = \lambda(\overbrace{a_1, a_2, a_3,}^{k} \overbrace{\dots}^{k})$$

$*$ $a_{k+1} = \lambda a_1$, $a_{k+2} = \lambda a_2$, $\dots$, $a_{2k} = \lambda a_k$

$*$ $a_{2k+1} = \lambda a_{k+1} = \lambda^2 a_1$

$a_{2k+2} = \lambda a_{k+2} = \lambda^2 a_2$

$\dots\ a_{3k} = \lambda^2 a_k$

Dobbiamo imporre che una successione a come sopra sia in l^2

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

$$L = \sum_{n=1}^{k} |a_n|^2 \overbrace{\left(1 + |\lambda|^2 + |\lambda|^4 + \dots\right)}^{\text{serie geometrica}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(|\lambda|^2\right)^k$$

$$a_n \qquad a_{n+k} \qquad a_{n+2k}$$

Converge $\forall \lambda$ con $|\lambda| < 1$. Quindi nel caso di T_k, un qualsiasi $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| < 1$ è un possibile autovalore.

• $T_x : L^2([0,R]) \to L^2([0,R])$

$$f(x) \mapsto x f(x)$$

$$x f(x) = \lambda f(x)$$

potrebbe essere soddisfatta solo se $f(x)=0$ per $\forall x \neq \lambda$. Ma questo per una funzione in $L^2 \Rightarrow f = 0. \Rightarrow$ non esiste un autovalore e autovettore.

⊙ $\frac{d}{dx}: D \subset L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$

$$\frac{df}{dx} = \lambda f \rightsquigarrow f(x) = e^{\lambda x} A \qquad A \in \mathbb{C}$$

per nessun $\lambda \in \mathbb{C}$ questa soluzione definisce un elemento di L^2 $\Rightarrow$ no autovettori.

Alcune osservazioni:

* se T è un operatore simmetrico nel dominio D e in questo dominio ammette un autovettore $\Longrightarrow$ autovalore è $\in \mathbb{R}$. (i)

Inoltre autovettori relativi a autovalori diversi sono $\perp$ tra loro. (ii)

Dim: (i) $(v, T(v)) = (v, \lambda v) = \lambda \|v\|^2$

$(T(v), v) = (\lambda v, v) = \lambda^* \|v\|^2$

$\Longrightarrow \lambda^* = \lambda$ ✓

(ii) $T(v_1) = \lambda_1 v_1$, $T(v_2) = \lambda_2 v_2$

$$(v_1, T(v_2)) = (v_1, \lambda_2 v_2) = \lambda_2 (v_1, v_2)$$

$$\shortparallel$$

$$(T(v_1), v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) = \lambda_1^* (v_1, v_2)$$

$$\underset{(i)}{=} \lambda_1 (v_1, v_2)$$

$\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)(v_1, v_2) = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (v_1, v_2) = 0$.

Esercizio: H con $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$ s.o.c.

- $T(e^{(n)}) = e^{(2n)}$
- $S(e^{(n)}) = \begin{cases} e^{(n/2)} & \text{per } n \text{ pari} \\ 0 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

(i) Mostrare che T e S sono operatori continui e calcolare $\|T\|$ e $\|S\|$.

Avendo definito T e S sugli elementi del S.O.C., sono automaticamente definiti per linearità su tutte le combinazioni lineari finite:

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{(n)}$$

che formano un insieme denso in H

Dato $v \in H$ generico, abbiamo:

$\exists \{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ con $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{(n)} \xrightarrow[N\to\infty]{} V$

$$\left[V = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)} \right]$$

$$T\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{(n)}\right) = \left[\sum_{n=1}^{N} \underline{\alpha_n} \; e^{(2n)}\right]$$ questa somma converge?

(*)

Se sì, ci definisce $T(V)$.

La somma converge perché se la successione iniziale $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} \in \ell^2$, a maggior ragione lo è la successione dei coefficienti in (*).

$\Rightarrow$ possiamo definire $T(v)$ prendendo il limite $N \to \infty$:

$$T(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(2n)}$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(n)}$$

$$(T(v), T(v))$$

$$e^{(2n)} \qquad e^{(2n)}$$

$$\|T(v)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \|T(v)\|^2 / \|v\|^2 = 1 \quad \forall\, v \neq 0 \Rightarrow \boxed{\|T\| = 1}$$

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{(n)}\ ,\qquad \sum_{n=1}^{2N}\alpha_n e^{(n)} \xrightarrow[N\to\infty]{} v$$

$$S\Big(\sum^{2N}\Big) = \boxed{\sum_{n=1}^{N}\alpha_{2n}e^{(n)}}$$

$$\{\alpha_n\}_{n\ge 1}\in \ell^2 \rightsquigarrow \{\alpha_{2n}\}_{n\ge 1}\in \underline{\ell^2}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{N\to\infty}\ ! \quad S(v)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e^{(n)}$$

$$\boxed{n=2k}$$

$$\Rightarrow S\Big(\sum_{n=1}^{2N}\alpha_n e^{(n)}\Big) = \sum_{k=1}^{N}\alpha_{2k}e^{(\cancel{2k}\,k)}$$

$$\cdot \quad \|S(v)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{2n}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \underbrace{- \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{2k-1}|^2}_{\geq 0}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \|v\|^2, \quad \forall v \Rightarrow \underline{\|S\| \leq 1}$$

Dobbiamo trovare un vettore v con $\|S(v)\| = \|v\|$ (o più in generale una successione che ha questa proprietà nel limite). Basta: $v = e^{(2)}$

$$\|e^{(2)}\| = 1, \quad \|S(e^{(2)})\| = \|e^{(1)}\| = 1$$

$$\|S(e^{(2)})\| / \|e^{(2)}\| = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\|S\| \geq 1}}$$

$$\Rightarrow \|S\| = 1.$$

Altri punti dell'esercizio:

(2) mostrare che $S = T^{\dagger}$

(3) mostrare che $\forall\, v, w \in H$, $(T(v), T(w)) = (v, w)$. T è un operatore unitario?

(4) mostrare che T non ha autovettori e autovalori mentre S ne ha ∞.