giovedì 14 gennaio 2021 16:38

① $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{C}.$

PER QUALI t A È DIAGONALIZZABILE? PER TALI t SCRIVERE LA MATRICE DIAGONALE SIMILE AD A_t E UNA BASE DI $\mathbb{C}^3$ DI AUTOVETTORI DI A_t.

$$P_{A_t}(\lambda) = \begin{vmatrix} t-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & t-\lambda & t \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} t-\lambda & 1 \\ 1 & t-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((\lambda-t)^2 - 1\right)$$

$$(\lambda-t)^2 - 1 = 0 \iff (\lambda-t)^2 = 1 \iff \lambda - t = \pm 1 \iff \lambda = t \pm 1.$$

$\Rightarrow A_t$ HA AUTOVALORI 1, $t+1$, $t-1$.

3 CASI:
- Ⓐ $t \neq 0,2 \Rightarrow$ 3 AUTOVALORI DISTINTI $\Rightarrow A_t$ DIAGONALIZZABILE E SIMILE A $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & t+1 & \\ & & t-1 \end{pmatrix}$.
- Ⓑ $t = 0 \Rightarrow$ AUTOVALORI $1, -1$ CON MOLT. ALG. 2 E 1. $\Rightarrow$ SE A_t DIAGONALIZZABILE, $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$
- Ⓒ $t = 2 \Rightarrow$ AUTOVALORI $1, 3$ CON MOLT. ALG. 2 E 1 $\Rightarrow$ SE A_t DIAG., $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

Ⓐ BASE DI AUTOVETT.?

- AUTOVETT. PER 1? $\left(\iff \begin{Bmatrix} \text{SOLUZIONI} \\ (A-I)x = 0 \end{Bmatrix} \right)$

$$A_t - I = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 2 \\ 1 & t-1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - (t-1)R_1]{} \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 2 \\ 1-(t-1)^2 & 0 & t-2(t-1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 2 \\ -t^2+2t & 0 & 2-t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{2-t}]{t \neq 2 \Rightarrow 2-t \neq 0} \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 2 \\ t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ tx + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Aut}(1) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, x \in \mathbb{C},\ y = x - z,\ z = -tx \right\} = \left\{ (x, x+tx, -tx) \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, x \in \mathbb{C} \right\} = \langle \underbrace{(1, 1+t, -t)}_{\text{PRIMO AUTOVETT. DELLA BASE}} \rangle.$$

- $\operatorname{Aut}(t-1)$?

$$A_t - (t-1)I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t-2 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_2 \to R_2/(t-2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Aut}(t-1) = \langle \underbrace{(1,-1,0)}_{2^\circ \text{ AUTOVETT. DELLA BASE}} \rangle.$$

- $\operatorname{Aut}(t+1)$?

$$A_t - (t+1)I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & t \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{(RIDUCIAMO)} \\ \text{UTILIZZANDO } t \neq 0}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Aut}(t+1) = \langle \underbrace{(1,1,0)}_{3^\circ \text{ AUTOVETT. DELLA BASE}} \rangle$$

Ⓑ A DIAG. PER $t=0$?

- $\operatorname{Aut}(1)$? (A DIAG. $\iff \dim \operatorname{Aut}(1) = 2 = m_A(1)$).

$$A_0 - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \dim \operatorname{Aut}(1) = 1 < 2. \Rightarrow A_0 \text{ NON DIAG.}$$

Ⓒ A_t DIAG. PER $t=2$?

- $\operatorname{Aut}(1)$? (A_2 DIAG $\iff \dim \operatorname{Aut}(1) = 2 = m_A(1)$)

$$A_2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x + y + 2z = 0 \rightsquigarrow x = -y - 2z.$$

$\Rightarrow \operatorname{Aut}(1) = \langle (-1,1,0), (-2,0,1) \rangle$ ha dim $2 \Rightarrow A_2$ DIAGONALIZZABILE ✓.

- $\operatorname{Aut}(3) = \operatorname{Aut}(t+1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{IN Ⓐ L'ABBIAMO TROVATO} \\ \text{UTILIZZANDO SOLO } t \neq 0.}}{=} \langle (1,1,0) \rangle$

$\Rightarrow$ NEL CASO Ⓒ BASE DI AUTOVETT.: $\{(-1,1,0), (-2,0,1), (1,1,0)\}$.

---

② $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\langle A, B \rangle := tr({}^tB\,P\,A)$. PRODOTTO SCALARE?

- SIMMETRICO?

$$\langle B, A \rangle = tr({}^tA\,P\,B) \overset{P \text{ SIMM.}}{=} tr\left({}^t({}^tB\,P\,A)\right) \overset{(tr({}^tM) = tr(M)\ \forall M)}{=} tr({}^tB\,P\,A) = \langle A, B \rangle\ ✓.$$

- BILINEARE?

VISTO CHE È SIMMETRICO, BASTA DIMOSTRARE

$$\langle \lambda A + \mu A', B \rangle = \lambda \langle A, B \rangle + \mu \langle A', B \rangle \quad \forall A, A', B.$$

$$\langle \lambda A + \mu A', B \rangle = tr\left({}^tB\,P(\lambda A + \mu A')\right) = tr\left(\lambda({}^tBPA) + \mu({}^tBPA')\right) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ tr(\cdot) \\ \text{LINEARE}}}{=} \lambda\, tr({}^tBPA) + \mu\, tr({}^tBPA') = \lambda \langle A, B \rangle + \mu \langle A', B \rangle\ ✓✓.$$

DEFINITO POSITIVO? $\iff [\langle A, A \rangle \geq 0\ \forall A$ e $\langle A, A \rangle = 0 \iff A = 0]$.

$$\langle A, A \rangle = tr({}^tAPA) \underset{\substack{\uparrow \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}}{=} tr\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = tr\left(\begin{pmatrix} a+c & a+2c \\ b+d & b+2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) =$$

$$= tr\begin{pmatrix} a^2+ac+ac+2c^2 & * \\ * & b^2+bd+bd+2d^2 \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2ac + 2bd = (a+c)^2 + (b+d)^2 + c^2 + d^2$$

$\Rightarrow \langle A, A \rangle \geq 0 \quad \forall A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$;

$$\langle A, A \rangle = 0 \iff \begin{cases} (a+c)^2 = 0 \\ (b+d)^2 = 0 \\ c^2 = 0 \\ d^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \iff A = 0\ ✓✓✓.$$

---

③ $W = \langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^5.$

ⓐ ESTRARRE UNA BASE B_W DI W DA $v_1, \dots, v_5$ E DETERMINARE DIM W.

RIDUCIAMO A SCALA (SOLO ALG. DI GAUSS! SENZA SCAMBI.) LA MATRICE $\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_5 \end{pmatrix}$: LE RIGHE CHE NON SI ANNULLERANNO CORRISPONDERANNO AI VETT. DI B_W.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \\ R_5 \to R_5 - 2R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_W = \{v_1, v_2\},\ \dim W = 2.$$

ⓑ COMPLETARE A B BASE DI $\mathbb{R}^5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ HA RANGO } 5 \Rightarrow B = \{v_1, v_2, e_3, e_4, e_5\} \text{ BASE DI } \mathbb{R}^5\ ✓.$$

(IN GENERALE PRENDI B_W E CERCHI GLI e_i CHE LA COMPLETINO.)

ⓒ COSTRUIRE $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ AVENTE W COME NUCLEO (UTILIZZANDO IL T. DI DETERMINAZIONE DI UN'APPL. LIN.)

FISSIAMO PER ESEMPIO $f(v_1) = f(v_2) = 0$; $f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(e_5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\xrightarrow{B \text{ BASE DI } \mathbb{R}^5} \exists!\ f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ LINEARE CHE SODDISFA QUESTE CONDIZIONI.

$$\Rightarrow \underbrace{v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} f}_{\Downarrow},\quad \underbrace{\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), f(v_2), f(e_3), f(e_4), f(e_5) \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}_{\Downarrow}.$$

$W \subseteq \operatorname{Ker} f \qquad \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^5 - \dim \operatorname{Im} f = 5 - 3 = 2$

$\Rightarrow W \subseteq \operatorname{Ker} f,\ \dim W = \dim \operatorname{Ker} f = 2 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = W$ ✓✓✓.

ⓓ MATRICE DI f RISPETTO ALLE BASI CANONICHE?

ABBIAMO $f(e_3), f(e_4), f(e_5)$.

CI MANCANO $f(e_1), f(e_2)$.

$e_1 = v_1 - 2v_2 + 6e_3 - 3e_4 - 3e_5$

$$\Rightarrow f(e_1) = \underbrace{f(v_1) - 2f(v_2)}_{=0} + 6f(e_3) - 3f(e_4) - 3f(e_5) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$e_2 = v_2 - 3e_3 + e_4 + e_5$

$$\Rightarrow f(e_2) = f(v_2) - 3f(e_3) + f(e_4) + f(e_5) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ e, e' \text{ LE BASI CANONICHE}}}{\Rightarrow} M_e^{e'}(f) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\ ✓✓✓$$

---

④ $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $T: V \to V$ endomorfismo iniettivo, $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di T.

$\Rightarrow \exists\, T^{-1}$ lineare, λ^{-1} autovalore di T^{-1}?

$T: V \to V$ iniettiva $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim V - \dim \operatorname{Ker} T = \dim V \Rightarrow \operatorname{Im} T = V$

$\Rightarrow T$ biettiva ✓ $\Rightarrow \exists\, T^{-1}$. T^{-1} LINEARE?

$T^{-1}(\lambda x + \mu y) = \lambda T^{-1}(x) + \mu T^{-1}(y)$?

$z_x := T^{-1}(x)$, $z_y = T^{-1}(y) \Rightarrow T(\lambda z_x + \mu z_y) = \lambda T(z_x) + \mu T(z_y) = \lambda x + \mu y$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{APPLICHIAMO } T^{-1} \text{ DA ENTRAMBI I LATI}}}{\Rightarrow} T^{-1}(\lambda x + \mu y) = \lambda z_x + \mu z_y = \lambda T^{-1}(x) + \mu T^{-1}(y)$ ✓✓.

λ AUTOVALORE DI $T \Rightarrow \lambda^{-1}$ AUTOVALORE DI T^{-1}?

T INIETTIVA $\Rightarrow \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(T - 0I) = \{0\} \Rightarrow \lambda = 0$ NON È UN AUTOVALORE.

QUINDI $\forall \lambda$ AUTOVALORE DI T, $\forall x$ AUTOVETTORE DI λ $x, \lambda x \neq 0$. ER GO:

$T(x) = \lambda x \Rightarrow T^{-1}(T(x)) = T^{-1}(\lambda x) \Rightarrow T^{-1}(\lambda x) = x = \lambda^{-1}(\lambda x) \Rightarrow \lambda x$ AUTOVETTORE DI T^{-1} RELATIVO A λ^{-1} ✓✓✓.

---

⑤ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 1/2 \\ 4 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3/4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 44 & \sqrt{3} & 1 \\ 71 & \sqrt{7} & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

A MATRICE t.c. $A \cdot B = C \Rightarrow \det(A)$?

$A \cdot B = C \Rightarrow \det(A) \cdot \det(B) = \det(C)$.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 1/2 \\ 4 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SVILUPPO} \\ \text{ULTIMA RIGA}}}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SVILUPPO} \\ \text{ULTIMA} \\ \text{RIGA}}}{=} -2 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 3/4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 44 & \sqrt{3} & 1 \\ 71 & \sqrt{7} & 8 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SVILUPPO} \\ 2^a \text{ RIGA}}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 44 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{7} & 8 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SVILUPPO} \\ 1^a \text{ RIGA}}}{=} \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$\Rightarrow \det(A) = \frac{\det(C)}{\det(B)} = 1 \quad ✓✓✓.$$