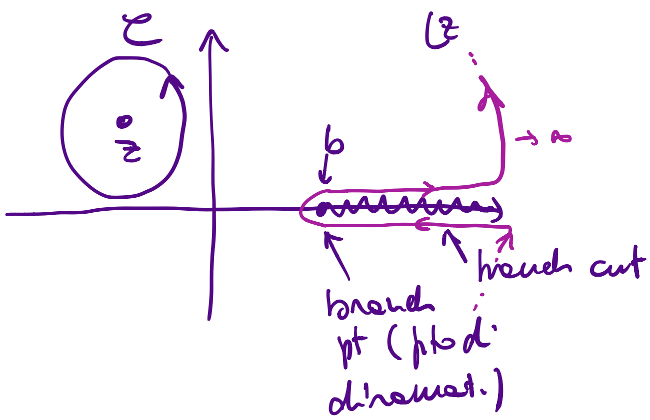
# RELAZIONI DI DISPERSIONE

Prendiamo un'ampiezza $T$ che sia analitica nella sua variab. ma con delle singolarità (poli, branch pt, ...)

$$T(q^2) \longrightarrow T(z) \qquad q^2 \leftrightarrow z \in \mathbb{C}$$




Consideriamo una funz. $T(z)$ con un branch cut

Se uno vuole conoscere il valore di $T$ in $z$, può usare Cauchy:

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{T(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Deformiamo in maniera continua il contorno $\mathcal{C}$ $\rightarrow$ l'integrale non cambia

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{T(\zeta + i\epsilon) - T(\zeta - i\epsilon)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_\infty} \frac{T(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{\mathrm{Disc}\, T(\zeta)}{\zeta - z}$$

legato a $\mathrm{Im}\, T(z)$

$\zeta = Re^{i\theta}$ $\quad R \to \infty$

$$\int_0^{2\pi} \frac{R d\theta \; T(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - z} \qquad R \to \infty$$

questo integrale $\to 0$ se $T(R) \to 0$ per $R \to \infty$

$\Downarrow$

Se $T(z) \to 0$ per $z \to \infty$, allora $T(z)$ è determinato dalla sua DISCONTINUITÀ (cioè diff. tra $T(z)$ sopra il taglio e $T(z)$ sotto il taglio)

Se invece $T(z) \not\to 0$ per $z \to \infty$, prendiamo la differenza

$$T(z) - T(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty d\zeta \, \mathrm{Disc}\, T(\zeta) \underbrace{\left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right)}_{\frac{\cancel{\zeta} - z_0 - \cancel{\zeta} + z}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_\infty} d\zeta \, T(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right)$$

$$T(z) = T(z_0) + \frac{(z - z_0)}{2\pi i} \int \frac{\mathrm{Disc}\, T(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta + \frac{(z - z_0)}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_\infty} \frac{T(z)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta$$

ora denominatore va come $\zeta^2$ (invece di $\zeta$)

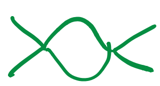
$\to 0$ per $R \to \infty$

se $\frac{T(R)}{R} \to 0$ per $R \to \infty$

Se $\frac{T(R)}{R} \to 0$ per $R \to \infty$

$$T(z) = T(z_0) + \frac{(z - z_0)}{2\pi i} \int \frac{\mathrm{Disc}\, T(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta$$

$T(z)$ è ancora determinato dalla sua Disc, ma ora a meno di una COST. ARBITRARIA

[  ⇝ calcoliamo Disc ⇝ ampiezza

$T(R) \not\to 0$ $R \to \infty$ ma $\frac{T(R)}{R} \to 0$ $R \to \infty$

⇝ cost. arbitraria ⇝ $\lambda$ ]

$\Rightarrow$ Se abbiamo un metodo per calcolare la disc. dell'ampiezza (senza calcolare prima l'ampiezza), allora siamo in grado di ricostruire l'ampiezza (a meno di cost. di normaliz.)

↓

↳ Qto metodo è dato dalle regole di CUTKOWSKI:

prendere l'espressione dell'ampiezza (dopo aver applicato le regole di Feynman) e sostituire ai propagatori

$$\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon} \longrightarrow -2\pi i\,\delta(p^2-m^2)\,\theta(p^0)$$

("mettere on-shell i propag.")

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2}\int d^2p\ \frac{\overbrace{2\left(2p^\mu p^\nu - \frac{q^\mu q^\nu}{2} + \eta^{\mu\nu}\left(-p^2+\frac{q^2}{4}+m^2\right)\right)}^{\equiv(\mathrm{NUM})}}{\left(\left(p+\frac{q}{2}\right)^2-m^2+i\epsilon\right)\left(\left(p-\frac{q}{2}\right)^2-m^2+i\epsilon\right)}$$

$$\mathrm{Disc}\,T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2}\int d^2p\ (\mathrm{NUM})\,(-2\pi i)^2\,\delta\!\left(\left(p+\frac{q}{2}\right)^2-m^2\right)\delta\!\left(\left(p-\frac{q}{2}\right)^2-m^2\right)\cdot$$

$$\cdot\,\theta\!\left(p^0+\frac{q^0}{2}\right)\theta\!\left(p^0-\frac{q^0}{2}\right)$$

Vediamo che condizioni impongono le $\delta$-funct. su $p^0$ e $p^1$.

→ Mettiamoci per comodità nel frame $q^\mu = (q,0)$ ← $q\neq 0$

$$\begin{cases}\left(p^0+\frac{q}{2}\right)^2-(p^1)^2-m^2=0\\ \left(p^0-\frac{q}{2}\right)^2-(p^1)^2-m^2=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\left(p^0+\frac{q}{2}\right)^2-\left(p^0-\frac{q}{2}\right)^2=0\\ (p^1)^2=(p^0)^2+\frac{q^2}{4}-m^2\end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases}p^0 q = 0\\ p^1 = \pm\sqrt{\frac{q^2-4m^2}{4}}\end{cases} \leftarrow \underline{\text{due}}\ \text{soluzioni}$$

in forma cov.

$$\rightsquigarrow\quad p^\mu = \pm\,\epsilon^{\mu\nu}q_\nu\sqrt{\frac{q^2-4m^2}{4}} = \pm\,\tilde{q}^\mu\sqrt{\frac{q^2-4m^2}{4}}$$

$$\int dp^0\, dp^1\, \delta(\underbrace{f_1(p)}_{=l_1})\, \delta(\underbrace{f_2(p)}_{=l_2})\, g(p) \neq g(p_i)$$

$p_i$ sono soluz. di $\begin{cases} f_1(p)=0 \\ f_2(p)=0 \end{cases}$

$$\downarrow$$

$$\sum_i \frac{1}{Jac(p_i)}\, g(p_i)$$

↑ Jacobiano di trasf. di coord da $p^0, p^1$ a $l_1, l_2$

Calcoliamo lo Jacobiano

$$\left(p+\frac{q}{2}\right)^2 - m^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 + p^0 q^0 - p^1 q^1 + \frac{(q^0)^2}{4} - \frac{(q^1)^2}{4} - m^2 \leftarrow l_1$$

$$\left(p-\frac{q}{2}\right)^2 - m^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 - p^0 q^0 + p^1 q^1 + \frac{(q^0)^2}{4} - \frac{(q^1)^2}{4} - m^2 \leftarrow l_2$$

$$Jac = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial p^0} & \frac{\partial l_1}{\partial p^1} \\ \frac{\partial l_2}{\partial p^0} & \frac{\partial l_2}{\partial p^1} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 2p^0 + q^0 & -2p^1 - q^1 \\ 2p^0 - q^0 & -2p^1 + q^1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} 4p^0 & -4p^1 \\ 2p^0 - q^0 & -2p^1 + q^1 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 4p^0 & -4p^1 \\ -q^0 & q^1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= 4\,|\underbrace{p^0 q^1 - p^1 q^0}_{p^0 \tilde{q}_0 + p^1 \tilde{q}_1}| = 4\,|p \cdot \tilde{q}| \Rightarrow Jac(p_i) = 4\,|\tilde{q}\cdot\tilde{q}|\sqrt{\frac{q^2 - 4m^2}{4q^2}} \qquad i=1,2$$

sostituisco $p^\mu = p_i^\mu = \pm \tilde{q}^\mu \sqrt{\frac{q^2-4m^2}{4q^2}}$

$\tilde{q}^2 = -q^2$ (vedi prossima pagina)

$$Jac(p_i) = 4|q^2|\sqrt{\frac{q^2-4m^2}{4q^2}} =$$

$$= 2\sqrt{\cancel{4q^2}\cdot q^2\,\frac{(q^2-4m^2)}{\cancel{4q^2}}} = 2\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}$$

$$\mathrm{NUM}(p_i) = 2\left(2p_i^\mu p_i^\nu - \frac{q^\mu q^\nu}{2} + \eta^{\mu\nu}\left(-p_i^2 + \frac{q^2}{4} + m^2\right)\right) =$$

$$= 4\,\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \left(\frac{q^2-4m^2}{4q^2}\right) - q^\mu q^\nu + 2\eta^{\mu\nu}\left(-\tilde{q}^2\left(\frac{q^2-4m^2}{4q^2}\right) + \frac{q^2}{4} + m^2\right)$$

$$\tilde{q}^2 = \tilde{q}^\mu \tilde{q}_\mu = q_\nu \underbrace{\epsilon^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\rho}}_{=-\delta^\nu{}_\rho} q^\rho = -q^2$$

$$= \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \left(1 - 4\frac{m^2}{q^2}\right) - q^\mu q^\nu + \eta^{\mu\nu}\left(\frac{q^2}{2} - \cancel{2m^2} + \frac{q^2}{2} + \cancel{2m^2}\right)$$

$$= \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu - \frac{4m^2}{q^2}\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu + \underbrace{\eta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu}$$

$$= \begin{pmatrix} q^{0\,2} - q^{1\,2} - q^{0\,2} & -q^0 q^1 \\ -q^0 q^1 & -q^{0\,2} + q^{1\,2} - q^{1\,2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -q^{1\,2} & -q^0 q^1 \\ -q^0 q^1 & -q^{0\,2} \end{pmatrix} = -\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu$$

$$\tilde{q}^\mu = \epsilon^{\mu\nu} q_\nu = (-q^1, -q^0)$$

$$(\mathrm{NUM})(p_i) = \cancel{\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu} - \frac{4m^2}{q^2}\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu - \cancel{\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu} = -\frac{4m^2}{q^2}\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu$$

per $q^2 < 4m^2$ non ci sono solut. $p_i$

$$\mathrm{Disc}\, T^{\mu\nu} = -\left(-\frac{4m^2}{q^2}\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu\right)\frac{1}{2\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}} \cdot 2 \quad \Theta(q^2-4m^2)$$

due solut. $p_i$

$\mathrm{NUM}(p_1) = \mathrm{NUM}(p_2)$

$\mathrm{Jac}(p_1) = \mathrm{Jac}(p_2)$

$$= \frac{4m^2}{q^2}\frac{1}{\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu\, \Theta(q^2-4m^2)$$

$T^{\mu\nu} = \tilde{T}_1(q^2)\,\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu + \tilde{T}_2(q^2)\,\eta^{\mu\nu} \rightarrow \mathrm{Disc}\, T^{\mu\nu}$ ci dice le disc. di $\tilde{T}_1$ e $\tilde{T}_2$

$$\to \quad \mathrm{Disc}\,\tilde{T}_1 = \frac{4m^2}{q^2}\frac{1}{\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}\,\theta(q^2-4m^2)$$
$$\mathrm{Disc}\,\tilde{T}_2 = 0$$

A noi interessa $m \to 0$ :

- quando $m \to 0$, $\mathrm{Disc}\,\tilde{T}_1(q^2) \to 0$ eccetto in $q^2=0$
- $\mathrm{Disc}\,\tilde{T}_1$ è una DISTRIBUZIONE ; quindi per capire quale distrib. otteniamo, la applichiamo su una test-function $f$

$$\lim_{m\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{Disc}\,\tilde{T}_1(x)\, f(x) = \lim_{m\to 0}\int_{4m^2}^{\infty} dx\, \frac{4}{\sqrt{x(x-4m^2)}}\,\frac{m^2}{x}\, f(x) =$$

$x = 4m^2 y$

$$= \lim_{m\to 0}\int_1^{\infty} \cancel{4m^2}dy\, \frac{\cancel{4}}{\cancel{4m^2}\sqrt{y(y-1)}}\,\frac{\cancel{m^2}}{\cancel{4m^2}y}\, f(4m^2 y)$$

$y = 1/z$

$$= f(0)\int_1^{\infty}\frac{dy}{y^{3/2}\sqrt{y-1}} = f(0)\int_0^1 \frac{dz}{z^2\,\frac{1}{z^{3/2}}\sqrt{\frac{1}{z}-1}} =$$

$$= f(0)\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} = f(0)\left(-2\sqrt{1-z}\,\Big|_0^1\right) = 2f(0)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Disc}\,\tilde{T}_1(q^2) = 2\,\delta(q^2)$$

$$\left(\mathrm{Disc}\,\tilde{T}_2(q^2) = 0\right)$$

Ci ricordiamo che le dim. in massa sono

$$[\tilde{T}_1] = -2 \qquad [\tilde{T}_2] = 0$$

inoltre $\hat{T}_1$ e $\hat{T}_2$ dip. solo da $q^2$

$\rightsquigarrow \quad \tilde{T}_1(q^2) \longrightarrow \frac{1}{q^2}$ per $q^2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}_1(z) \to 0$ per $z \to \infty$

$\tilde{T}_2(q^2) \longrightarrow$ cost. per $q^2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{T}_2(z)}{z} \to 0$ per $z \to \infty$

ma $\tilde{T}_2(z) \not\to 0$

$\downarrow$ Usiamo le regole di dispersione

$$\tilde{T}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\mathrm{Disc}\, \tilde{T}_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\delta(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{\pi i z}$$

$$\tilde{T}_2(z) = \underset{\tilde{T}_2(z_0)}{b} + \cancel{\frac{1}{2\pi i}(z - z_0) \int \frac{\mathrm{Disc}\, \tilde{T}_2(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}}^{=0}$$

$$\Rightarrow \quad T^{\mu\nu} = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1(q^2) + \eta^{\mu\nu} \tilde{T}_2(q^2) \qquad \leftarrow \langle j^\mu j^\nu \rangle$$

$$T_A^{\mu\nu} = -\epsilon^{\mu\rho} \eta_{\rho\sigma} T^{\sigma\nu} = \qquad \leftarrow \langle j_A^\mu j^\nu \rangle$$

$$= -\epsilon^{\mu\rho} \eta_{\rho\sigma} (\tilde{q}^\sigma \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1 + \eta^{\sigma\nu} \tilde{T}_2) =$$

$$= -q^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1(q^2) - \epsilon^{\mu\nu} \tilde{T}_2(q^2)$$

$\hookrightarrow \epsilon^{\mu\rho} j_\rho = \epsilon^{\mu\rho} \eta_{\rho\sigma} j^\sigma$

$$\Rightarrow \quad T^{\mu\nu} = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b\, \eta^{\mu\nu}$$

$$T_A^{\mu\nu} = -q^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} - b\, \epsilon^{\mu\nu}$$

$\leftarrow$ scelta di $b$ dipende dalla REGOLARIZZAZIONE scelta

Facciamo divergenze di $\langle jj \rangle$ e $\langle j_A j \rangle$ per verificare le WI

Ci aspettiamo $\partial_\mu \langle j^\mu(x) j^\nu(0) \rangle = 0$ VWI

$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x) j^\nu(0) \rangle = 0$ AWI

$$q_\mu \tilde{q}^\mu = \underbrace{q_\mu q_\rho}_{\text{sym}} \underbrace{\epsilon^{\mu\rho}}_{\text{antisym}} = 0$$

$$\partial_\mu \langle j^\mu(x) j^\nu(0) \rangle \to q_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad + b q^\nu$$

IMPOSSIBILE

$\Rightarrow$ Scegliere $b$ t.c. siano soddisf. sia VWI che la AWI

$$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x) j^\nu(0) \rangle \to q_\mu T_A^{\mu\nu} = -\frac{i}{\pi}\tilde{q}^\nu + b\tilde{q}^\nu$$

$\downarrow$

l'ANOMALIA è INEVITABILE

- Per qualsiasi regolarizzazione, almeno una delle id. di Ward è violata.

- Diverse scelte di regolarizzazione mi danno diverse teorie quantistiche (correlatori diversi, diverse simm. preservate) $\rightsquigarrow$ ambiguità nel quantizzare la teoria.

Scegliamo di preservare $U(1)_V$ $\rightsquigarrow$ $U(1)_A$ è anomala

$\to b=0 \to q_\mu T_A^{\mu\nu} = -\frac{i}{\pi}\tilde{q}^\nu$

$$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x) j^\nu(0) \rangle = \partial_\mu \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} T_A^{\mu\nu}(q^2) e^{iqx} =$$

$$= -\frac{i}{\pi}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \epsilon^{\nu\rho} i q_\rho e^{iqx} = -\frac{1}{\pi}\epsilon^{\nu\rho}\partial_\rho \delta(x)$$

Accoppiamo la corrente preservata $j^\mu$ (vett.) a un campo di gauge esterno ($e^{-i\int j^\mu A_\mu}$).

$$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x) \rangle_A = \partial_\mu \langle j_A^\mu(x) e^{-i\int A_\nu j^\nu} \rangle_{free} =$$

espandiamo esponenz.

corr. di $j_A^\mu$ quando camp gauge A acceso

$$= \partial_\mu \underbrace{\langle j_A^\mu(x) \rangle_{free}}_{=0} - i\int d^2y\, A_\nu(y)\, \partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x)\, j^\nu(y) \rangle +$$

$$- \frac{1}{2}\int d^2y_1\, d^2y_2\, A_{\nu_1}(y_1) A_{\nu_2}(y_2)\, \underbrace{\partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x)\, j^{\nu_1}(y_1) j^{\nu_2}(y_2) \rangle}_{=0} + \underbrace{\ldots}_{=0}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int d^2y\, A_\nu(y)\, \epsilon^{\nu\rho}\, \partial_\rho \delta(x-y) \underset{\text{integr. part.}}{=} -\frac{1}{\pi}\, \overset{\text{antisimm.}}{\epsilon^{\rho\nu}}\, \underbrace{\partial_\rho A_\nu(x)}_{\frac{1}{2}(\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho)}$$

$$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x) \rangle_A = -\frac{1}{2\pi}\, \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

(Remember that we used convention $\epsilon^{01} = -1$.)