FUNZIONALE GENERATORE E ANOMALIA

Definiamo

$$Z[A] = e^{iW[A]} = \langle e^{i\int j^\mu A_\mu} \rangle_{free}$$

$= \bar\psi \gamma^\mu \psi$

$$\overset{!}{=} \int D\psi D\bar\psi \, e^{iS[\psi,\partial\psi] + i\int j^\mu A_\mu} = \int D\psi \, D\bar\psi \, e^{iS[\psi, D_A \psi]}$$

$\downarrow$

Genera i correlatori fra le correnti $\langle j^\mu j^\nu \dots \rangle$

Es.: $$-i \frac{\delta Z[A]}{\delta A_\mu(x)}\bigg|_{A=0} = \int D\psi D\bar\psi \, j^\mu(x) \, e^{iS[\psi, D_A\psi]}\bigg|_{A=0} = \langle j^\mu(x) \rangle$$

$$\frac{\delta^{(n)} Z}{\delta A^n} \sim \langle \underbrace{j \cdots j}_{n} \rangle$$

•) Il funzionale generatore è UNICO a meno di POLINOMI LOCALI nel campo esterno A e sue derivate

↳ diversi metodi di regolarizzazione inducono diversi polinomi $f[A]$

$$\tilde W[A] = W[A] + f[A]$$

diverse regolarizzazioni

polinomio in A e ∂A ed è locale, cioè

$$\int d^4x \; A(x) \, \partial A(x) \dots A(x)$$

[Esempio di funzionale che si comporta in qta maniera è l'azione efficace 1PI per teorie rinormalizzabili:

$$\Gamma[\varphi] = \sum_n \int \frac{\varphi^n_{(x)}}{n!} \mathcal{A}^{(n)}_{1PI}(x) \, d^4x$$

per teorie rinormal. divergenze appaiono in un numero finito di ampiezze

→ anche le ambiguità appaiono in un numero finito di ampiezze

↳ diciamo che l'ambig. stia solo in $\tilde{A}^{(m)}_{1PI}$

$$\tilde{A}^{(m)}_{1PI} = A^{(m)}_{1PI} + c$$

← ambiguità nella regolarizzazione/rinormal.

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\Gamma}[\varphi] = \Gamma[\varphi] + c\int \frac{\varphi^{m}(x)}{n!}\, d^4x$$

↖ polinomio locale in φ]

- Le WI per i correl. di correnti sono equivalenti all'INVARIANZA DI GAUGE di $W[A]$, cioè

$$\underline{\underline{WI's}} \iff \delta W[A] \equiv W[A_\mu + \partial_\mu \Lambda] - W[A_\mu] \underline{\underline{= 0}}$$

$$iW[A] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \, A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \cdot$$

$$\cdot \langle j^{\mu_1}(x_1) \cdots j^{\mu_n}(x_n) \rangle$$

$$i\delta W[A] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n\, n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \, \partial^{x_1}_{\mu_1} \Lambda(x_1)\, A_{\mu_2}(x_2) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \cdot$$

$$\cdot \langle j^{\mu_1}(x_1) \cdots j^{\mu_n}(x_n) \rangle$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(n-1)!} \int dx_1 \cdots dx_n \, \Lambda(x_1)\, A_{\mu_2}(x_2) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \cdot$$

$$\cdot\, \partial^{x_1}_{\mu_1} \langle j^{\mu_1}(x_1) \cdots j^{\mu_n}(x_n) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\forall \Lambda, A}{\delta W = 0} \iff \underset{\forall n}{\partial^{x_1}_{\mu_1} \langle j^{\mu_1}(x_1) \cdots j^{\mu_n}(x_n) \rangle = 0}$$

•) $\delta W[A] = G(\Lambda, A) = \int dx\, \Lambda(x)\, G[A_\mu](x)$

chiamato ANOMALIA

questo funzionale è un POLINOMIO LOCALE in $A, \partial A$

•) Un'anomalia esiste se NESSUN POLINOMIO LOCALE può cancellare l'effetto dell'anomalia.

$$\delta W = G$$

prendo $\tilde{W} = W + f \rightarrow \delta\tilde{W} = \delta W + \delta f = G + \delta f$

variaz. di un funz. ALTAMENTE NON-LOCALE

variaz. di un funz. LOCALE

$\rightarrow \delta f$ può cancellare G?

non è banale da ottenere

Anomalia in $d=2$

Consideriamo $\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\Psi}\psi$, ma in $d=2$.

In $d=2$ $\quad \gamma^0 = \sigma^2 \quad \gamma^1 = -i\sigma^1 \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$

$\gamma_5 = -\gamma^0\gamma^1 = \sigma^3 \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1} \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5 \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$

C'è una simmetria $U(1)_V \times U(1)_A$

$\uparrow$ simm. solo se $m=0$

$\hookrightarrow$ (quando $m=0$) abbiamo le seguenti identità di Ward

$$\partial_\mu^x \langle j^\mu(x) j^\nu(0) \rangle = 0$$
$$\partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x) j^\nu(0) \rangle = \partial_\mu^x \langle j^\mu(x) j_A^\nu(0) \rangle = 0 \qquad (*)$$
$$\partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x) j_A^\nu(0) \rangle = 0$$

$\hookrightarrow$ verificheremo queste relazioni calcolando esplicitam. i correlatori.
(le id. di Ward per tutti gli altri correlatori sono soddisfatte)

In $d=2$ i tre tipi di correlatori in $(*)$ sono legati da una semplice relazione:

$\epsilon_{01} = 1 = -\epsilon^{01}$

$\epsilon_{10} = -1 = -\epsilon^{10}$

$$\gamma_5 \gamma^\mu = \begin{cases} \gamma^1 & \mu = 0 \\ \gamma^0 & \mu = 1 \end{cases} = \epsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu$$

$\gamma^0 = \sigma^2 \quad \gamma^1 = -i\sigma^1$

$\gamma_5 = -\gamma^0\gamma^1 = \sigma^3$

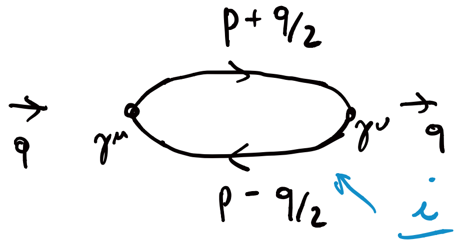
$$\Rightarrow \quad j_A^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi = -\epsilon^{\mu\nu}\bar{\Psi}\gamma_\nu\psi = -\epsilon^{\mu\nu} j_\nu$$

$$\Rightarrow \quad \langle j_A^\mu j^\nu \rangle = -\epsilon^{\mu\rho}\langle j_\rho j^\nu \rangle$$
$$\langle j_A^\mu j_A^\nu \rangle = \epsilon^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\sigma}\langle j_\rho j_\sigma \rangle$$

$\rightarrow$ ci basta calcolare il correl. fra due correnti vettoriali.

$T^{\mu\nu} \equiv$ Trasf. di Fourier di $\langle j^\mu(x)\, j^\nu(0) \rangle$:

(Reintroduciamo $m \neq 0$ per il momento, poi prendiamo $\lim m \to 0$)



$$\rightsquigarrow \quad T^{\mu\nu} = (-)\, i^2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu(\not{p}+\frac{\not{q}}{2}+m)\,\gamma^\nu(\not{p}-\frac{\not{q}}{2}+m)\right)}{\left((p+\frac{q}{2})^2-m^2+i\epsilon\right)\left((p-\frac{q}{2})^2-m^2+i\epsilon\right)}$$

$$\frac{i}{\not{p}-\frac{\not{q}}{2}-m} = i\,\frac{\not{p}-\frac{\not{q}}{2}+m}{(p-\frac{q}{2})^2-m^2}$$

•) c'è una divergenza logaritmica per $p \to \infty$

$\rightarrow$ c'è necessità di REGOLARIZZAZIONE

•) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_2) = 2\eta^{\mu\nu}$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu) = \mathrm{Tr}(\gamma_5^2\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu) = -\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma_5) =$$

$$\underset{\text{cicl. traccia}}{=} -\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu) \Rightarrow = 0$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma) = -\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu + 2\eta^{\nu\sigma}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu - 2\eta^{\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu + 2\eta^{\nu\sigma}\,2\eta^{\mu\rho} =$$

$$= -\mathrm{Tr}\,\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu + 4\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu} - 4\eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\nu} + 4\eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma) = 2\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu} - 2\eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\nu} + 2\eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}$$

$$\rightarrow \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu(\not{p}+\frac{\not{q}}{2}+m)\gamma^\nu(\not{p}-\frac{\not{q}}{2}+m)\right) = (p^\rho+\frac{q^\rho}{2})(p^\sigma-\frac{q^\sigma}{2})\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma) + m^2\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)$$

$$= \frac{1}{2}(2p^\rho+q^\rho)(2p^\sigma-q^\sigma)\left(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu} - \eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\nu} + \eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}\right) + 2m^2\eta^{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(2p^\nu+q^\nu)(2p^\mu-q^\mu) - \underbrace{(2p+q)\cdot(2p-q)}_{4p^2-q^2}\eta^{\mu\nu} + (2p^\mu+q^\mu)(2p^\nu-q^\nu)\right\} + 2m^2\eta^{\mu\nu}$$

$$= 4p^\mu p^\nu - q^\mu q^\nu + \eta^{\mu\nu}\left(-2p^2 + \frac{q^2}{2} + 2m^2\right)$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2}\int d^2p \frac{2\left(2p^\mu p^\nu - \frac{q^\mu q^\nu}{2} + \eta^{\mu\nu}\left(-p^2 + \frac{q^2}{4} + m^2\right)\right)}{\left((p+\frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon\right)\left((p-\frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon\right)}$$

•) Uno potrebbe provare più qui a moltiplicare per q_μ portandolo dentro l'integrale. Con varie manipolazioni, shiftando la variabile di integrazione, posso riportare l'integrale a $\int d^2p$ (funz. dispari in p)

Quindi concluderei che $p_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ...

Ma ho fatto operazioni in un integrale divergente $\rightsquigarrow$ è come dire che $\infty - \infty = 0$

(Questo tipo di manipolazioni sono lecite se l'integrale è convergente; questo accade per $\underbrace{\langle j^{\mu} \cdots j^{\nu} \rangle}_{N>2}$, il che permette di dim. che le WI sono soddisfatte per tali correlatori.)

•) $T^{\mu\nu}$ è simm. in $\mu\nu$ e dip. da $\eta^{\mu\nu}$ e q^μ

$$\rightarrow \quad T^{\mu\nu} = q^\mu q^\nu T_1(q^2) + \eta^{\mu\nu} T_2(q^2)$$

def. $\tilde{q}^\mu \equiv \epsilon^{\mu s} q_s \quad \longleftrightarrow \quad q_\rho \propto \epsilon_{\rho\sigma} \tilde{q}^\sigma$

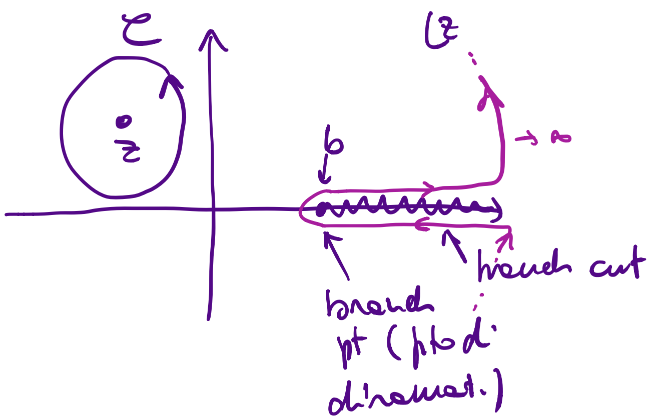
$$\rightarrow \quad T^{\mu\nu} = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1(q^2) + \eta^{\mu\nu} \tilde{T}_2(q^2)$$

•) Mass-dim. $\quad [T^{\mu\nu}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da def. } T^{\mu\nu}}}{=} 0 \quad \rightarrow \quad [\tilde{T}_1] = -2 \quad [\tilde{T}_2] = 0$

Definiamo $T^{\mu\nu}$ usando le DISPERSION RELATIONS

Prendiamo un'ampiezza T che sia analitica nella sua variab. ma con delle singolarità (poli, branch pt, ...)

$$T(q^2) \longrightarrow T(z) \qquad q^2 \leftrightarrow z \in \mathbb{C}$$



Consideriamo una funz. $T(z)$ con un branch cut

Se uno vuole conoscere il valore di T in z, può usare Cauchy:

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{T(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Deformiamo in maniera continua il contorno $\mathcal{C}$ → l'integrale non cambia

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{T(\zeta + i\epsilon) - T(\zeta - i\epsilon)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_\infty} \frac{T(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{\mathrm{Disc}\, T(z)}{\zeta - z}$$

legato a $\mathrm{Im}\, T(z)$

$\zeta = Re^{i\theta} \qquad R \to \infty$

$$\int_0^{2\pi} R\, d\theta \, \frac{T(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - z} \qquad R \to \infty$$

quest integral $\to 0$ se $T(R) \to 0$ per $R \to \infty$

$\Downarrow$

Se $T(z) \to 0$ per $z \to \infty$, allora $T(z)$ è determinato dalle sue DISCONTINUITÀ (cioè diff. tra $T(z)$ sopra il taglio e $T(z)$ sotto il taglio)

Se invece $T(z) \not\to 0$ per $z \to \infty$, $T(z)$ non è determinato univocamente, ma possono essere le differenze:

$$T(z) - T(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{\mathrm{Dis}(T(\zeta))(z-z_0)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} \frac{T(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)} (z-z_0)\, d\zeta$$

per cancellarlo abbiamo bisogno

$$\frac{T(R)}{R} \to 0 \quad \text{per } R \to \infty$$

Se funziona $\left(\frac{T(R)}{R} \to 0 \right)$ allora

$$T(z) = T(z_0) + \frac{(z-z_0)}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{\mathrm{Disc}\, T(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}$$

costante arbitraria