

NON-ABELIAN FIELDS

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_i i \not{\partial} \Psi = \bar{\Psi}_i i \gamma^\mu (\partial_\mu \delta^j_i) \Psi_j$$

$U(1)_{AV}$
 $SU(N)_{AV}$
 $N = \dim R$

Campi Ψ stanno in una rep R di G

$$\Rightarrow j^{\mu a} = \bar{\Psi} \gamma^\mu t_R^a \Psi$$

$a \in \text{Adj rep.}$

$$j_A^{\mu a} = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 t_R^a \Psi$$

$$P = \bar{\Psi} \gamma_5 t_R^a \Psi$$

In pte situazione ci sono correlatori a più pt di contribuiscono all'ensemble $\langle \underbrace{j \dots j}_n \rangle$ con $n \geq 3$

$$T^{abc \mu \nu} (k_1, k_2) = i \int dx dy e^{i k_1 x + i k_2 y} \langle j^a_\mu(x) j^b_\nu(y) j^c_A(0) \rangle$$

$$T^{abc \mu \nu} = \dots \quad \Big| \quad P^c(0)$$

↓

$$AWI: \quad q_\lambda T^{abc \mu \nu} = 2m T^{abc \mu \nu}_{(m)} - \frac{C^{abc}}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta}$$

$$C^{abc} = \frac{1}{2} \text{tr}_R \{ t_R^a t_R^b \} t_R^c$$

ABJ anomaly
 per il caso
 non-abeliano

Se manteniamo la CORRENTE ASSIALE ABELIANA

$$j_A^\lambda = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi$$

(j_A^λ è un "color singlet", cioè in rep. triviale di G),

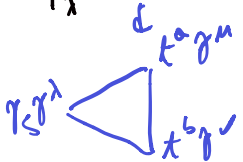
↳ legato a simm.
 $\Psi \mapsto e^{i\gamma_5 \beta} \Psi$

e pte vet. non-ab. $j_\nu^{\mu a} = \bar{\Psi} \gamma^\mu t_R^a \Psi$

(mentre $j_A^{\mu a} = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 t_R^a \Psi$
 è legato a $\Psi \mapsto e^{i\gamma_5 \beta t_R^a} \Psi$)

allora:

$$q_\lambda T^{abc \mu \nu} = 2\pi T^{abc \mu \nu} - \frac{C(R) \delta^{ab}}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} \quad (*)$$



$$\text{Tr}(t^a t^b \mathbb{1})$$

Accoppiamo la corrente vettoriale $j^{\mu a}$ a un campo di gauge non-abeliano A_μ^a . L'anomalia (*) produce ancora termini del tipo $(D_\mu A_\nu)^2$. Come contribuiscono ^{gli altri termini dell'} ~~le~~ altre WI anomale?

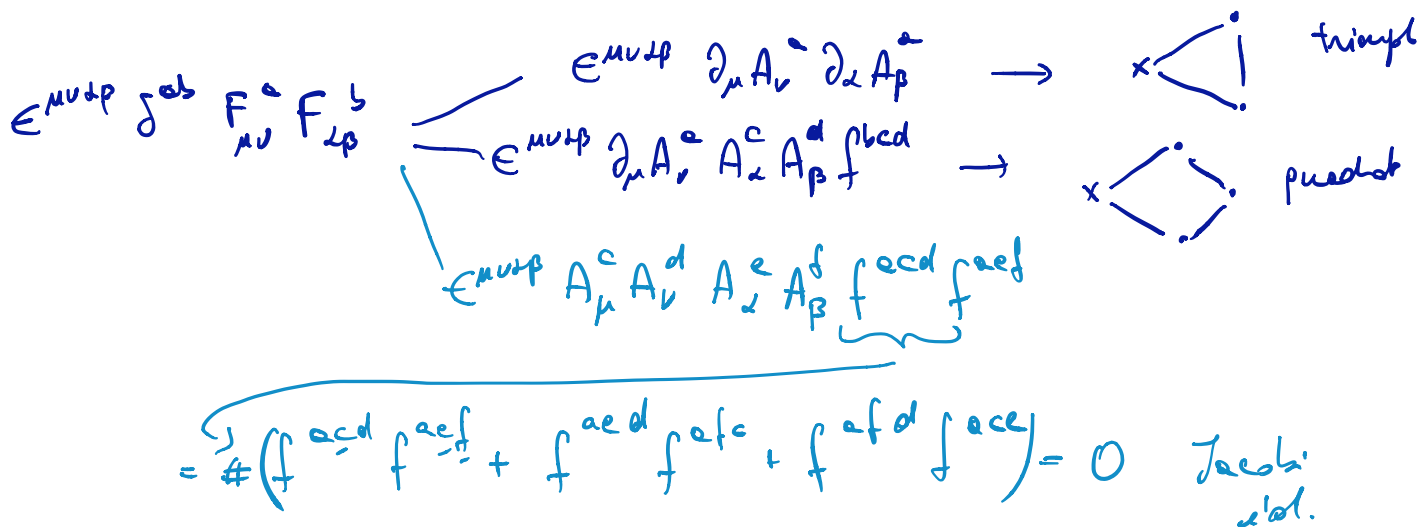
Devono contribuire in maniera consistente col fatto che

$\partial_\lambda j_A^\lambda$ è un SINGOLETTO sotto G

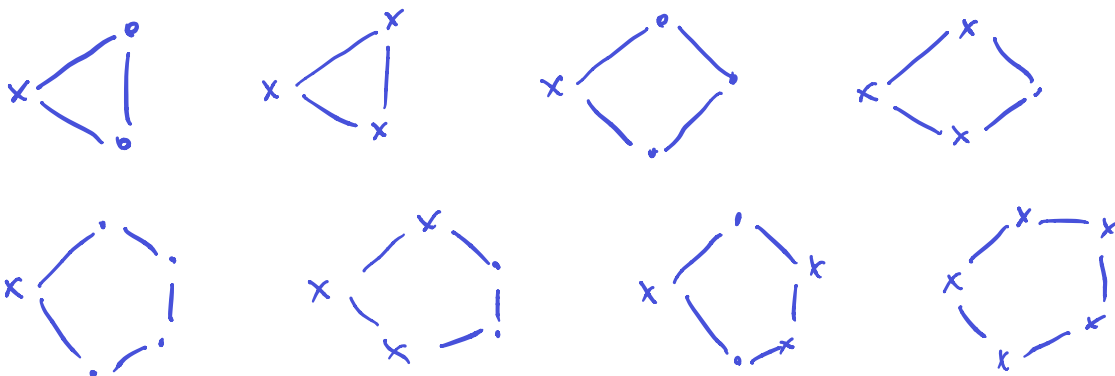
$$\langle \partial_\lambda j_A^\lambda \rangle_A = - \frac{CCR}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu}^a F_{\lambda\rho}^b \quad (m=0)$$

SINGLET ANOMALY

$$= - \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}$$



Se anche la corrente assiale viene presa non-eb. $j_A^{\lambda a} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau^a \psi$
 \Rightarrow molto diagrammi contribuiscono \rightarrow molte WI sono anomale nelle teorie libere



Se accoppiamo $j^{\mu e} = A_{\mu}^e$:

$$\langle (D_{\mu} j_A^{\mu})^e \rangle = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr} (t^e F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho}) \quad (*)$$

COVARIANT
ANOMALY

Finora abbiamo sempre accoppiato A_{μ}^e alla corrente vet.,
cioè abbiamo GAUGIATO la simmetria preservata.

In fatti se la simm. di gauge è ANOMALA la teoria
quantistica risulta INCONSISTENTE: 1) perdiamo le
relazioni di equivalenza necessarie per tener conto della
ridondanza della descrizione 2) alcune proprietà come le
rinormalizzabilità e l'unitarietà vengono violate.

Campi chirali

Pensiamo di accoppiare correnti R-handed e L-handed
a diversi campi vet. A_{μ}^R e A_{μ}^L .

Otteniamo:

$$\langle (D_{\mu}^H j^H_{\mu})^e \rangle = \eta_H \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr} \left(t^e \partial_{\mu} (A_{\nu}^H \partial_{\sigma} A_{\rho}^H + \right.$$

$H = L, R$

CONSISTENT
ANOMALY

$$\eta_H = \begin{cases} -1 & H = L \\ +1 & H = R \end{cases}$$

$$\left. + \frac{i}{2} A_{\nu}^H A_{\sigma}^H A_{\rho}^H \right)$$

Notiamo che otteniamo lo stesso risultato facendo la media
del segno) per L e R.

Esiste anche un altro tipo di anomalia **COVARIANT ANOMALY**
 in certi LIR (diverse regolarizzazioni rispetto a CASIM.)

$$\langle (D_\mu j^{H\mu})^a \rangle = \eta_H \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr} (t^a F_{\mu\nu}^\dagger F_{\sigma\rho}^a) \quad H = \text{LIR}$$

$$j_{\text{LIR}\mu}^a = \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right) \psi = \frac{1}{2} (j^\mu{}^a \pm j_A^\mu{}^a) \quad \left(\begin{array}{l} \ln L \\ \sim j^\mu{}^a A_\mu^a + j_A^\mu{}^a A_\mu^a \\ \Leftrightarrow j^\mu A_\mu^{aV} + j_A^\mu A_\mu^{aA} \end{array} \right)$$

$$A_\mu^{\text{LIR}} = A_\mu^V \pm A_\mu^A$$

$$\hookrightarrow \text{se } A_\mu^A \equiv 0 \Rightarrow A_\mu^{\text{LIR}} = A_\mu^V$$

$$\text{e } \langle (D_\mu j_A^\mu)^a \rangle = \langle (D_\mu j^\mu)^a \rangle - \langle (D_\mu j^{\text{R}\mu})^a \rangle =$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr} (t^a F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho}) \right] = \frac{-1}{16\pi^2} \epsilon \text{tr} (t^a F F)$$

cioè (*) .

ANOMALY CANCELLATION CONDITIONS (Anomalia deve essere assente per le simm. di GAUGE)

- 1) VECTOR-LIKE MODEL (es. QED, QCD) :
 A_μ si accoppia a $j_V^\mu \rightarrow$ l'ANOMALIA può essere cancellata a j_A^μ con opportuna scelta di rappresent. \hookrightarrow non è garantita \Rightarrow ok!
- 2) "SAFE GROUPS". Prendiamo modelli con molti fermioni L e R accoppiati diversam. ai bosoni di gauge \rightarrow ci sono

anomalia nelle sim. di gauge. Però l'anomalia può annullarsi in casi particolari: ricordarsi che l'anomalia è proporzionale a

$$C^{abc} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\{T^a, T^b\} T^c)$$

Se $C^{abc} = 0$, tutte le anomalie si cancellano.

Questo avviene in

$$SU(2), \quad SO(2N+1), \quad SO(4N) \quad N \geq 2, \quad E_6, \quad E_8$$

\rightsquigarrow In particolare $SU(N) \quad N \geq 3$ non sono safe.

3) MODELLO STANDARD : $SU(3) \times U(1)_Y$

Qui i bosoni di gauge accoppiano diversamente alle cariche L e R.

In GUT il coniugato di uno spinore R è uno spinore L: possiamo quindi considerare tutti spinori L in SU(3)

Famiglia:

	Rep	
l_L	2_{-3}	\swarrow L-hand
e_R	1_{-6}	$\rightarrow 1_{+6}$ \swarrow L-hand.
q_L^i	2_1	\swarrow L-hand
u_R^i	1_4	$\rightarrow 1_{-4}$ \swarrow L-hand
d_R^i	1_{-2}	$\rightarrow 1_{+2}$ \swarrow L-hand

$i=1,2,3$

nel loop circolare tutti i fermioni accoppiano ai bosoni di gauge

Per $SU(2)$ $C^{abc} = 0 \Rightarrow \text{tr}(\underbrace{T^a T^b T^c}_{\text{gen. d. } SU(2)}) = 0$



→ consideriamo $\text{tr}(T^a T^b T_Y)$
e $\text{tr}(T_Y^3)$

$T_R^a = 0$ quando $R=1$

$$\text{tr}(T^a T^b T_Y) = \text{tr} \left(\begin{matrix} t_{R_1}^a t_{R_1}^b q_Y^{R_1} \mathbb{1}_{\dim R_1} \\ \text{per rap non triviali} \curvearrowright \\ t_{R_2}^a t_{R_2}^b q_Y^{R_2} \mathbb{1}_{\dim R_2} \dots \end{matrix} \right) =$$

$$= \sum_i q_Y^{R_i} \dim R_i \delta^{ab} c(R_i) = q_Y^{R_L} \dim R_{L_L} \delta^{ab} c(R_{L_L}) + 3 \times q_Y^{R_U} \dim R_{U_L} \delta^{ab} c(R_{U_L}) =$$

$$= -3 \cdot 2 \cdot \delta^{ab} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \delta^{ab} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Per $SU(3)$

$$\text{tr}(T^a T^b T_Y) = 2 q_Y^{R_L} \dim R_{R_L} \delta^{ab} c(R_{R_L}) + q_Y^{R_U} \dim R_{U_L} \delta^{ab} c(R_{U_L}) + q_Y^{R_C} \dim R_{C_L} \delta^{ab} c(R_{C_L}) =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \delta^{ab} \cdot \frac{1}{2} + (-4) \cdot 3 \cdot \delta^{ab} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 3 \cdot \delta^{ab} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 3 \delta^{ab} (1 - 2 + 1) = 0$$

Ona solo $U(1)_Y$

$$\text{Tr}(T_Y^3) = -27 \cdot 2 + 216 + 3 \cdot (1 \cdot 2 - 64 + 8)$$

$$= 162 + 3 \cdot (-54) = 0$$

6 è essenziale per la cancellazione delle ANOMALIE

di colori

← qta cancellazione di cui è evidente all'esistenza del quark TOP prima che venisse scoperto.

4) NON-LOCAL TERM

Controlliamo anomalie aggiunte alla lagrangiana
in termini NON-LOCALE

ES. (Abelian case)

$$S_{\text{non-loc}} = \frac{1}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int dx \int dy \partial^\alpha A_\lambda^L(x) D(x-y) F_{\mu\nu}^L F_{\alpha\beta}^L(y)$$

$$\delta S_{\text{non-loc}} = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int dx \Lambda^L(x) \partial_\mu A_\nu^L(x) \partial_\alpha A_\beta^L(x)$$

con il l'anomalia

5) LOCAL COUNTER-TERMS con campi aggiuntivi

E.g. $S_{\text{add}} = \frac{1}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int dx \varphi^L(x) F_{\mu\nu}^L F_{\alpha\beta}^L(x)$

con $\delta\varphi^L(x) = \Lambda^L(x)$ "axion"