

INDEX & ANOMALY

Il calcolo della Jacobiana col $P_i!$ corrisponde al calcolo dell' INDICE dell' OP. DI DIRAC in una data chiralità.

In spazio Euclideo

$$D\psi_n = \lambda_n \psi_n \quad \{\psi_n\} \text{ è completa e o.n.}$$

\Downarrow

$$D(\gamma_5 \psi_n) = -\gamma_5 D\psi_n = -\lambda_n (\gamma_5 \psi_n)$$

\Rightarrow se ψ_n è autof. con autoval λ_n , allora $\gamma_5 \psi_n$ è autof. con autov. $-\lambda_n$.

\Rightarrow Se $\lambda_n \neq 0$ allora ψ_n e $\gamma_5 \psi_n$ sono ORTOGONALI, cioè $(\psi_n, \gamma_5 \psi_n) = \int dx \psi_n^\dagger(x) (\gamma_5 \psi_n(x)) = 0$

$$\left[\text{infatti: } (\gamma_5 \psi_n, D\psi_n) = \lambda_n (\gamma_5 \psi_n, \psi_n) \Rightarrow \lambda_n (\gamma_5 \psi_n, \psi_n) = 0 \right. \\ \left. = (D\gamma_5 \psi_n, \psi_n) = -\lambda_n (\gamma_5 \psi_n, \psi_n) \right]$$

\rightarrow questo non è necessariamente vero in gli ZERO MODI, cioè ψ_n^0 t.c. $D\psi_n^0 = 0$:

in pto caso ψ_n^0 e $\gamma_5 \psi_n^0$ sono autof. relativi allo stesso autovalore ($\lambda_n = 0$)

\hookrightarrow questi \pm sono in loro combinazioni lineari, infatti.

$$\psi_{n+}^0 = \frac{1+\gamma_5}{2} \psi_n^0 \quad \text{e} \quad \psi_{n-}^0 = \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_n^0$$

\rightarrow $\psi_{n\pm}^0$ sono anche autovett. di γ_5 con autov. ± 1 .

Torniamo al calcolo della Jacobiana:

$$J[\beta] = e^{-2i \int dx \beta(x) \underbrace{\sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 \psi_n(x)}_{\text{averaging operator: } \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}}$$

• consideriamo J valutato in $\beta(x) = \beta \text{ cost.}$; allora

$$\begin{aligned} \int dx \sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 \psi_n(x) &= \sum_n \int dx \psi_n^\dagger(x) (\gamma_5 \psi_n(x)) = \\ &= \sum_n \int dx \psi_n^{o\dagger}(x) \gamma_5 \psi_n^o(x) = \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{somma sugli zero-mod.} \\ &= \sum_n \underbrace{\int dx \psi_{n+}^{o\dagger}(x) \psi_{n+}^o(x)}_{=1 \text{ (o.n.)}} - \sum_n \int dx \psi_{n-}^{o\dagger}(x) \psi_{n-}^o(x) \\ &= n_+ - n_- \equiv \text{ind } D_+ \end{aligned}$$

$$D_+ = D\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)$$

Col conto sull'anomalia otteniamo un altro risultato.
In $\text{ind } D_+$, che deve coincidere

$$\text{ind } D_+ = \frac{1}{32\pi^2} \int dx \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{M_4} \text{tr} F \wedge F$$

Teorema di ATIYAH-SINGER (dimostrato su manifold compatti)

↓
in \mathbb{R}^4 otteniamo anzitutto che
 $A_\mu \rightarrow i \tilde{U}_\mu U$ a $x \rightarrow a$

GLOBAL ANOMALIES - SU(2) (Witten)

Ricordiamo che $c^{abc} = 0$ in SU(2) \rightarrow non ci sono anomalie perturbative

Ma,

Witten: teoria di gauge SU(2) con un SINGOLO FERMIONE di WEYL nella rep. FONDAMENTALE è MATEMATICAMENTE INCONSISTENTE.

(Le sole teorie SU(2) consist. sono quelle con materia vector-like, abel spin. di Dirac.)

Vediamo perché:

Prendiamo uno spin. di Dirac ^{massless} in rep. fund. di SU(2).

Nello sp. Euclideo, il P.I. è

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-\int d^4x \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + i \int \bar{\Psi} \not{D} \Psi d^4x}$$

$$= \int \mathcal{D}A e^{-\int d^4x \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}} \underbrace{\det i\not{D}}_{\text{può essere regolarizzato}}$$

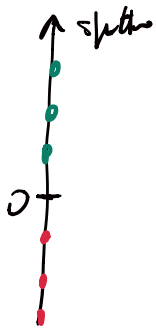
Consideriamo uno spinore chirale: $\Psi = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\bar{\Psi}$

$$\rightarrow \text{P.I.} : \int \mathcal{D}A e^{-\int d^4x \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}} \det \left(i\not{D} \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \right)$$

In convenzioni di Vinko per

$$i\not{D} \text{ è hermitiana} \quad i\not{D} \psi_n = \lambda_n \psi_n \quad \leadsto \quad i\not{D} (\gamma_5 \psi_n) = -\lambda_n (\gamma_5 \psi_n)$$

Prendiamo A_μ f.r. \not{D} non ha zero mod. ; gli autovalori si dividono in positivi e negativi



$$\det(iD) = \prod_n \lambda_n$$

$$\det\left(iD\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\right) = \prod_n \lambda_n = (\det iD)^{1/2}$$

prodotto su metà
degl. autovale.

c'è un'ambiguità

nella scelta del segno \pm

(Necessitiamo di una convenzione

che prescrive che segno prendere)

Per definire un segno,
abbiamo bisogno di una prescrizione di
come prendere metà autovale.

↓
- Iniziamo con un punto A_μ^* e in questo definiamo

$$(\det iD)^{1/2} = \text{prodotto degli AUTOVALORI POSITIVI}$$

- Deformando A_μ^* a un punto A_μ , gli autovale
cambiano di segno. Può succedere che un autovale
diventi negativo $\rightarrow (\det iD)^{1/2}$ ha segno $-$ in il
corrispondente A_μ .

Questa definizione è consistente se il segno è
gauge-inv., cioè se la definizione di $(\det iD)^{1/2}$

de lo stesso risultato in A_μ e A_μ^a dove U è
una transf. di gauge.

Consideriamo $U(x)$ t.c. $U(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$ ($\mathbb{R}^4 \simeq S^4$)

↳ classificazione di $\underline{\mathbb{P}}_4(SU(2))$ (mappa da $S^4 \rightarrow S^3$)
= \mathbb{Z}_2 ci sono due classi
(triviale e non-triviale)

Sotto una transf. non-triviale $(\det iD)^{1/2} \rightarrow -(\det iD)^{1/2}$

l'azione di $(\det iD)^{1/2}$ sia lo stesso in le due comp. j.
gauge - equiv. vuol dire che $(\det iD)^{1/2} = -(\det iD)^{1/2}$,
cioè $(\det iD)^{1/2} = 0 \rightarrow$ Azione di campo inconsistente.

↑
ANOMALIA GLOBALE