Esame di Programmazione Informatica

22 gennaio 2021

Informazioni generali

- 2 esercizi di script MATLAB e 2 domande a risposta multipla.
- La durata dell'esame è di 2 ore.
- È consigliato l'uso di MATLAB nello svolgimento di tutti i punti.
- Le slide e gli script del corso sono ovviamente consultabili liberamente.
- Il punteggio assegnato ad ogni esercizio ed alle domande a risposta multipla è indicato tra parentesi.

Esercizio 1 (12/30)

Si consideri la funzione
$$f(x) = p(x)e^{kx},$$
dove k varia a seconda della domanda assegnata allo studente e dove $p(x)$ è il polinomio
$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$
$f(x)$ può essere quindi rappresentata dal vettore riga $\mathbf{a}$ dei 3 coefficienti di $p(x)$:
$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2].$$
La derivata di $f(x)$ è
$$f'(x) = \big[(ka_0 + a_1) + (ka_1 + 2a_2)x + (ka_2)x^2\big]e^{kx} = q(x)e^{kx},$$
ed ha la stessa forma di $f(x)$, cioè della forma $q(x)e^{kx}$ con $q(x)$ polinomio di secondo grado.

In virtù di ciò, $f'(x)$ può essere nuovamente rappresentata dal vettore riga $\mathbf{b} = [b_0, b_1, b_2]$ dei 3 coefficienti di $q(x)$.

Scrivere una funzione che prenda in ingresso il vettore riga $\mathbf{a}$ dei 3 coefficienti di $p(x)$, che definiscono $f(x)$, e restituisca in uscita il vettore riga $\mathbf{b}$ dei 3 coefficienti di $q(x)$, che definiscono la derivata $f'(x)$.

Si scriva poi uno script nel quale si utilizza la funzione precedente per calcolare il vettore riga $\mathbf{b}$ nel caso di $f(x) = xe^{kx}$.

Soluzione: è sufficiente scrivere esplicitamente la formula del vettore riga $\mathbf{b}$, ricordandosi che però in MATLAB i vettori iniziano con indice 1, al contrario dei coefficienti $\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2]$:

derivata_f.m

```
function b = derivata_f( a )
   b = [ k*a(1)+a(2) , k*a(2)+2*a(3) , k*a(3) ] ;
end
```

Per calcolare la derivata di $f(x) = xe^{kx}$ è sufficiente definire il vettore riga dei 3 coefficienti di $p(x) = x$, cioè $\mathbf{a} = [0, 1, 0]$, e richiamare la precedente funzione:

Main.m

```
% f(x) = xe^{kx}
a = [ 0 1 0 ] ;

% Derivata prima , f'(x) = (1 + kx)e^{kx}
b = derivata_f( a )
```

ottenendo correttamente $\mathbf{b} = [1, k, 0]$ cioè $f'(x) = (1 + kx)e^{kx}$.

Esercizio 2 (16/30)

Dato un generico polinomio $p(x)$ di grado n,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

esso può essere rappresentato dal vettore riga $\mathbf{a}$ dei suoi coefficienti

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

La moltiplicazione di $p(x)$ per il polinomio di primo grado $(k + \alpha x)$, dove k varia a seconda della domanda assegnata allo studente, dà luogo ad un polinomio $q(x)$ di grado $n + 1$:

$$q(x) = p(x)(k + \alpha x)$$

che può essere quindi nuovamente rappresentato dal vettore riga $\mathbf{b}$ dei suoi coefficienti

$$\mathbf{b} = [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}]$$

che esplicitamente si calcolano come segue:

$$\begin{aligned}
b_0 &= ka_0 \\
b_1 &= ka_1 + \alpha a_0 \\
b_2 &= ka_2 + \alpha a_1 \\
&\vdots \\
b_i &= ka_i + \alpha a_{i-1} \\
&\vdots \\
b_n &= ka_n + \alpha a_{n-1} \\
b_{n+1} &= \qquad\ \ \alpha a_n
\end{aligned} \tag{1}$$

Scrivere una funzione che prenda in ingresso:

- il vettore riga $\mathbf{a}$ dei coefficienti di $p(x)$,
- lo scalare α del polinomio di primo grado $(k + \alpha x)$,

e restituisca in uscita il vettore riga $\mathbf{b} = [b_0, \ldots, b_{n+1}]$ dei coefficienti di $q(x)$, utilizzando le precedenti formule indicate in (1).

Si possono utilizzare equivalentemente un ciclo `for` oppure delle operazioni vettoriali. Come visto a lezione, le assegnazioni vettoriali sono più convenienti e, se utilizzate, verranno valutate con voto maggiore.

Per controllare la correttezza della funzione scritta, la si può utilizzare per moltiplicare il polinomio $p(x) = 1 - x$, cioè $\mathbf{a} = [1, -1]$, per il polinomio $(k + kx)$, cioè $\alpha = k$. Il risultato corretto è quindi $q(x) = k(1 - x^2)$, cioè $\mathbf{b} = [k, 0, -k]$.

Soluzione: utilizzando operazioni vettoriali, è sufficiente calcolare separatamente il vettore riga dei coefficienti di $kp(x)$, cioè `[k*a,0]`, ed il vettore dei coefficienti di $\alpha x p(x)$, cioè `[0,alfa*a]`, per poi sommarli vettorialmente:

prodotto_polinomio.m

```
function b = prodotto_polinomio( a , alfa )
   g1 = [ k*a , 0 ] ;     % coefficienti polinomio kp(x)
   g2 = [ 0 , alfa*a ] ; % coefficienti polinomio αxp(x)

   % somma vettoriale
   b = g1 + g2 ; % coefficienti polinomio kp(x) + αxp(x)
end
```

Controlliamo la correttezza del prodotto di $p(x) = 1 - x$, cioè $\mathbf{a} = [1, -1]$, per il polinomio $(k + kx)$, cioè $\alpha = k$:

Main.m

```
% p(x) = 1 − x
a = [ 1 , -1 ] ;

% Prodotto di p(x) per k + αx:
alfa = k ; % k + kx
b = prodotto_polinomio( a , alfa )
```

ottenendo correttamente $\mathbf{b} = [k, 0, -k]$, cioè $q(x) = k(1 - x^2)$.

Domande a risposta multipla (5/30)

Domanda 1 (3/30)

È possibile esprimere <u>esattamente</u> il numero x (x varia a seconda della domanda assegnata allo studente) utilizzando una rappresentazione posizionale in base 2 con un numero finito di cifre?

- $x = 13/104$: SI perchè semplificando si ottiene $x = 1/8 = (0.001)_2$.
- $x = 12/104$: NO perchè semplificando si ottiene $x = 3/26$ il cui denominatore non è potenza di 2.
- $x = 0.1/2$: NO perchè espresso in frazione si ottiene $x = 1/20$ il cui denominatore non è potenza di 2.
- $x = 45/1.5$: SI perchè il risultato è 3 che è intero.

Domanda 2 (2/30)

Caso A. Data la seguente funzione MATLAB:

```
function y = f(x, n)
   y = x ;
   for i = 1 : n
      y = y .* y ;
   end
end
```

per $n \geq 0$ intero, che funzione matematica $f(x)$ essa implementa?

- $f(x) = x^n$
- $f(x) = x^{2n}$
- $f(x) = x^{2^n}$
- $f(x) = (x^2)^n$

Soluzione: $f(x) = x^{2^n}$. Ad ogni iterazione del ciclo `for`, y viene elevato al quadrato partendo da $y = x$: dopo n elevamenti al quadrato, per le proprietà delle potenze, si ottiene x^{2^n}.

Caso B. Data la seguente funzione MATLAB:

```
function y = f(x, n)
    y = x ;
    for i = 1 : n
        y = x .* x ;
    end
end
```

per $n > 0$ intero, che funzione matematica $f(x)$ essa implementa?

- $f(x) = x^n$
- $f(x) = x^{2n}$
- $f(x) = x^{2^n}$
- $f(x) = x^2$

Soluzione: $f(x) = x^2$. Ad ogni iterazione del ciclo `for`, viene calcolato sempre x^2.