ESAME DI GEOMETRIA - I APPELLO A.A. 2020/21

Trieste, 25 gennaio 2021

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + x_3).$$
   (1) Verificare che f è lineare, determinare il rango di f, una base del nucleo e una base dell'immagine.
   (2) Dopo aver osservato che i vettori $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$, e che $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, 0)$ formano una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^2$, scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$.
2. Sia A la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Verificare che l'endomorfismo $L(A)$ di $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare canonico, è autoaggiunto e quindi diagonalizzabile. Trovare una base ortonormale di autovettori, una matrice diagonale D simile ad A e una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS = D$.
3. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$, spazio euclideo con il prodotto scalare canonico, il sottospazio di equazione $2x_1 + x_2 = 0$. Trovare una base ortonormale di W. Completarla a una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Scrivere le matrici di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ e da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$, dove $\mathcal{C}$ denota la base canonica.
4. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo del K-spazio vettoriale V. Dimostrare che se λ è un autovalore di f, allora per ogni $k \geq 1$ λ^k è un autovalore della potenza k-esima di f, $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$, composizione di k copie di f. Dedurre che se una potenza di f è l'endomorfismo nullo, ogni autovalore di f è nullo.
5. i) Dimostrare che autovettori $v_1, \ldots, v_n$ di autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di un endomorfismo $f : V \to V$ sono linearmente indipendenti.

   ii) Dimostrare che ogni famiglia ortonormale $\{v_i\}_{i \in I}$ in uno spazio euclideo o unitario è linearmente indipendente (si consideri I un insieme di indici arbitrario).