1) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + x_3)$

LINEARE: perché è del tipo $L(A)$ con

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow$

un'appl. $K^n \longrightarrow K^m$ è lineare $\Leftrightarrow$ è del tipo $L(A)$,

A matrice $m \times n$

se $f = L(A)$ $\quad A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ $\quad rg(f) = rg(A) = 2$

perché le righe non sono prop.

$rg(2) \Longrightarrow Im f = \mathbb{R}^2$, f è suriettiva

una base di Im f è qualunque base di $\mathbb{R}^2$

o 2 colonne di A

$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + 2$

$\dim \ker f = 1$

Per trovare una base di ker f

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

x_3 variabile libera

$x_2 = -\frac{1}{3}x_3$

$x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}x_3$

$\left(-\frac{1}{3}x_3, -\frac{1}{3}x_3, x_3\right)$

Baza pentru f $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ opp.

$(1, 1, -3)$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

$M_{B'}^{B}(f)$

$f(1,1,1) = (0,4) = \alpha(1,1) + \beta(1,0)$

$f(1,1,0) = (0,3)$

$f(1,0,1) = (1,2)$

$\underline{4}(1,1) - \underline{4}(1,0) = (4,4) - (4,0) = (0,4)$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha=4 \end{cases}$$

$$(0,3) = \underline{3}(1,1) - \underline{3}(1,0)$$

$$(1,2) = \underline{2}(1,1) \underline{-} (1,0)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad L(A): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}$ è ortonormale

$L(A)$ autoaggiunto $\Longleftrightarrow$ A simmetrica

Allora $L(A)$ è diagonalizzabile per il teor. spettrale.

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -(1+x)\left((1-x)^2-4\right) =$$

$$= -(1+x)(1-x-2)(1-x+2) =$$

$$= -(1+x)(-x-1)(-x+3) =$$

$$= -(x+1)^2(x-3)$$

$\lambda_1 = -1$ con $m_a(-1) = 2 = m_g(-1)$

$\lambda_2 = 3$ con $m_a(3) = 1 = m_g(1)$

$\mathrm{Aut}(3)$ $\qquad A - 3E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad (1,0,1) \qquad v_1 = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$$

$$Aut(-1) \qquad A + E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$x_1 = -x_3 \qquad (-x_3, x_2, x_3) = x_2(0,1,0) + $$
$$+ x_3(-1,0,1)$$

$(0,1,0)$
$(-1,0,1)$ sono già ortogonali.

$$v_2 = (0,1,0) = e_2$$

$$v_3 = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} \qquad v_1, v_2, v_3$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

3) $W \subseteq \mathbb{R}^3$ $\qquad \boxed{2x_1 + x_2 = 0}$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \qquad \left(-\frac{1}{2}x_2, x_2, x_3\right) =$$

$$= x_2\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right) + x_3(0,0,1)$$

$$\overline{\qquad v_1 \qquad}$$

$x_2=0,\ x_3=1$ $\qquad\qquad u_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}$

$x_2=1,\ x_3=0$

$$\|v_1\|=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$u_1=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{2},1,0\right)=\underline{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0\right)}$$

$$u_2=(0,0,1)$$

$e_1\notin W$ $\qquad \tilde{e}_1=\langle u_1,e_1\rangle u_1+\langle u_2,e_1\rangle u_2$

$\overset{\parallel}{(1,0,0)}$

$$\frac{e_1-\tilde{e}_1}{\|e_1-\tilde{e}_1\|}$$

$$\tilde{e}_1=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0\right)+0$$

$$e_1-\tilde{e}_1=(1,0,0)-\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5},0\right)=$$

$$=\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},0\right)$$

$$\left\|\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},0\right)\right\|=\sqrt{\frac{16+4}{25}}=\frac{\sqrt{20}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$u_3 = \frac{\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

$$M^{B}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>ortogonale</u>

$M^{\mathcal{C}}_{B}(id_{\mathbb{R}^3})$ è la trasposta

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

4) $f: V \longrightarrow V$ <u>λ autovalore di f</u>

$\forall k \geq 1$ $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k}$

λ^k è autovalore di f^k

$\exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$

$$f(f(v)) = \boxed{f^2(v)}$$
$$\parallel$$
$$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$$

$k=2$ v è autovettore di λ^2, che risulta autovalore

$$f^3(v) = f(f^2(v)) = f(\lambda^2 v) = \lambda^2 f(v) =$$
$$= \lambda^2(\lambda v) = \lambda^3 v$$

Provo a dim. per induzione che $\forall k$
$f^k(v) = \lambda^k v$ con v autovettore di λ

$k=1$ $f(v) = \lambda v$

Vero per $k-1$: $f^{k-1}(v) = \lambda^{k-1} v$

$$f^k(v) = f(f^{k-1}(v)) = f(\lambda^{k-1} v) =$$
$$= \lambda^{k-1} f(v) = \lambda^{k-1}(\lambda v) = \lambda^k v \text{ : ok}$$

Se ora $f^k = 0$ per un certo $k \geq 1$,
e λ è un autovalore di f,

$\Rightarrow \lambda^k$ è autovalore di $f^k = 0$

Quindi $\exists v \neq 0$ t.c.

$$\left.\begin{array}{l} f^k(v) = \lambda^k v \\ \quad \shortparallel \\ O(v) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda^k = 0$$

Quindi anche $\lambda = 0$

(che $\lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ richiede un attimo di cautela, tenendo conto del fatto che siamo in K dove non ci sono divisori dello 0).