**Equazioni del moto in un riferimento solidale con la Terra**

L'equazione di Eulero è stata ricavata applicando la seconda legge di Newton che, com'è noto, vale solo in sistemi di riferimento inerziali. Tuttavia la fenomenologia inerente ai fluidi geofisici è descritta da osservatori e/o dispositivi di misura che sono solidali con la Terra la quale non è un riferimento inerziale a causa della rotazione che compie su se stessa. Per gli scopi geofluidodinamici la rotazione terrestre è descritta, in modo schematico, da un vettore $\mathbf{\Omega}$ parallelo all'asse di rotazione, di modulo $\Omega \cong 7.292 \times 10^{-5} s^{-1}$ $(2\pi / \Omega \cong 24\ h)$ e orientato con il verso uscente dal Polo Nord. Si pone quindi il problema di riformulare le equazioni del moto in un sistema di riferimento uniformemente rotante con il vettore $\mathbf{\Omega}$. Per quanto concerne il principio di conservazione della massa, poiché questo principio di conservazione sussiste in ogni sistema di riferimento, la sua forma resta invariata anche in presenza di rotazione. La situazione cambia invece nella riformulazione del termine di accelerazione $d\mathbf{u} / dt$. Il punto di partenza è la derivata temporale di un ipotetico versore $\mathbf{e}$ fisso nel riferimento rotante $O_{rot}$. Evidentemente

$$\left( \frac{d\mathbf{e}}{dt} \right)_{rot} = \mathbf{0} \qquad \text{(D.7.1)}$$

mentre in un riferimento inerziale $O_{iner}$ vale la formula di Poisson, secondo la quale

$$\left( \frac{d\mathbf{e}}{dt} \right)_{iner} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{e} \qquad \text{(D.7.2)}$$

Attraverso le regole di calcolo (D.7.1) e (D.7.2) si possono dedurre le derivate temporali di ogni vettore nei due sistemi di riferimento in esame. Infatti, assegnato un generico vettore $\mathbf{A}$ tale che, in $O_{rot}$, sia $\mathbf{A} = \sum_k A_k \mathbf{e}_k$, per la (D.7.1) è

$$\left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{rot} = \sum_k \frac{dA_k}{dt} \mathbf{e}_k \qquad \text{(D.7.3)}$$

mentre per la (D.7.2) risulta

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{iner} &= \sum_k \left(\frac{dA_k}{dt}\mathbf{e}_k + A_k \frac{d\mathbf{e}_k}{dt}\right) \\ &= \sum_k \left(\frac{dA_k}{dt}\mathbf{e}_k + A_k \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_k\right) = \sum_k \frac{dA_k}{dt}\mathbf{e}_k + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{A}\end{aligned} \qquad \text{(D.7.4)}$$

Confrontando la (D.7.3) con la (D.7.4) si conclude che

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{iner} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{A} \qquad \text{(D.7.5)}$$

La (D.7.5) si applica anche nel caso in cui $\mathbf{A}$ è il vettore posizione $\mathbf{x}$ del centro di massa di un parcel nel riferimento $O_{rot}$. Qui la (D.7.5) porge l'equazione

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)_{iner} = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}$$

vale a dire

$$\mathbf{u}_{iner} = \mathbf{u}_{rot} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x} \qquad \text{(D.7.6)}$$

In modo analogo, se $\mathbf{A} = \mathbf{u}_{iner}$ dalla (D.7.5) segue

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_{iner}}{dt}\right)_{iner} = \left(\frac{d\mathbf{u}_{iner}}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}_{iner} \qquad \text{(D.7.7)}$$

I termini a destra della (D.7.7) possono essere sviluppati inserendovi la sostituzione (D.7.6) e ottenendo complessivamente

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathbf{u}_{iner}}{dt}\right)_{iner} &= \left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}_{rot} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}\right)\right]_{rot} + \boldsymbol{\Omega}\times\left(\mathbf{u}_{rot} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}\right) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{u}_{rot}}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega}\times\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}_{rot} + \boldsymbol{\Omega}\times\left(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}\right) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{u}_{rot}}{dt}\right)_{rot} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}_{rot} + \boldsymbol{\Omega}\times\left(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}\right)\end{aligned} \qquad \text{(D.7.8)}$$

L'ultima riga della (D.7.8) mostra che nel riferimento rotante compaiono due nuovi termini, e cioè

- l'accelerazione di Coriolis $2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}_{rot}$

e

- l'accelerazione centrifuga $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x})$

Va osservato quanto segue:

- Non c'è accelerazione di Coriolis sui corpi che sono in quiete rispetto al sistema in rotazione;
- L'accelerazione di Coriolis deflette i corpi in moto in una direzione ortogonale a quella del moto;
- Data l'identità $\mathbf{u}_{rot}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}_{rot})=0$, l'effetto di Coriolis non altera il bilancio energetico;
- L'accelerazione centrifuga può essere espressa come il gradiente di un potenziale secondo l'identità

$$\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x})=-\nabla\left|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}\right|^2/2 \qquad \text{(D.7.9)}$$

Per quanto concerne i termini a destra dell'equazione di Eulero (D.5.12), l'operatore gradiente mantiene la sua forma nel passaggio da un riferimento inerziale a uno uniformemente rotante, mentre le quantità scalari $\rho$, $p$ e $\Phi$ sono invarianti. Di conseguenza detti termini non sono soggetti a cambiamenti formali. Riassumendo: operando nella (D.5.12) la sostituzione

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}\to\frac{d\mathbf{u}}{dt}+2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}-\nabla\left|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}\right|^2/2$$

in accordo con le (D.7.8) e (D.7.9), l'equazione di Eulero nel riferimento in rotazione uniforme diventa

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}+2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\mathbf{g} \qquad \text{(D.7.10)}$$

dove il vettore

$$\mathbf{g}=-\nabla\left(\Phi-\left|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}\right|^2/2\right) \qquad \text{(D.7.11)}$$

è l’accelerazione di gravità effettiva, determinata dalla risultante di quella statica con l’accelerazione centrifuga.

I fenomeni geo-fluidodinamici che coinvolgono l’intero oceano planetario o l’atmosfera nella sua totalità sono descritti ricorrendo a coordinate sferiche (distanza radiale $r$ dal centro del geoide, longitudine $\lambda$ e latitudine $\phi$). Esistono tuttavia anche importanti processi che hanno luogo su aree limitate dell’oceano e dell’atmosfera, attorno a una data latitudine “centrale” $\tilde{\phi}$ e una conveniente longitudine. In questo caso, che riguarda, in particolare, anche la fenomenologia esaminata nella seconda parte di questo lavoro, è conveniente l’uso del più comune (e formalmente più semplice) sistema di coordinate cartesiane ortogonali destrogire, solidale con il geoide e avente l’origine sul circolo di latitudine $\tilde{\phi}$, alla quota della superficie libera nel caso marino e del suolo in quello atmosferico. Con riferimento all’equazione (D.7.10), l’asse verticale (asse $z$) è individuato dal versore

$$\mathbf{k} = -\mathbf{g} / g \qquad \text{(A.7.12)}$$

mentre i rimanenti versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ del piano $(x, y)$ concorrono a completare la terna ortonormale. Nell’emisfero boreale l’arbitrarietà dell’orientamento della terna rispetto a una rotazione attorno all’asse $z$ è eliminata prendendo $\mathbf{j}$ positivo verso il Polo Nord e $\mathbf{i}$ positivo verso Est.

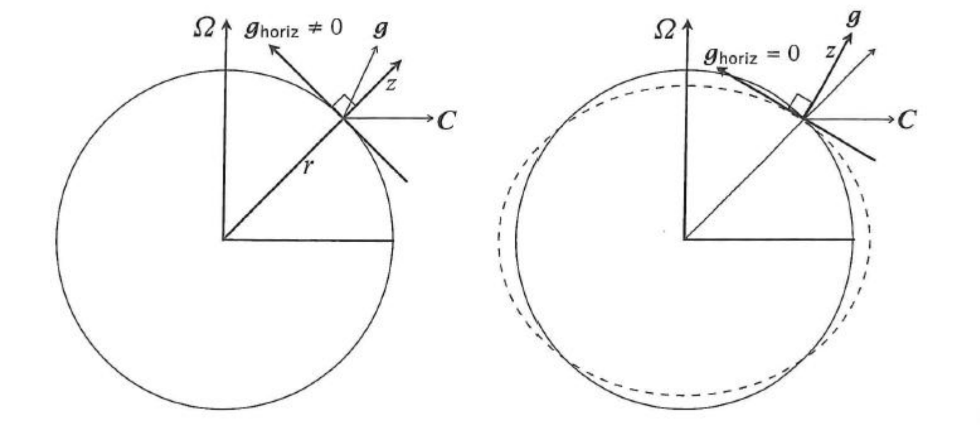


Figura 0

Con tale orientazione, il vettore $\mathbf{\Omega}$ è contenuto nel piano $(y,z)$ in modo che

$$2\mathbf{\Omega} = 2\Omega\cos(\phi)\ \mathbf{j}\ + 2\Omega\sin(\phi)\ \mathbf{k} \qquad \text{(D.7.13)}$$

Nella (D.7.13) la latitudine $\phi$ è quella di un generico punto del piano $(x,y)$ che, in contatto col geoide nel punto di latitudine $\tilde{\phi}$, ne approssima localmente la superficie. Detto $(R,\ \tilde{\lambda},\ \tilde{\phi})$ il punto di applicazione del riferimento cartesiano sul geoide, dove $R$ $(\cong 6.371\times10^6 m)$ è il raggio medio terrestre, le coordinate sferiche di un generico punto $(r,\ \lambda,\ \phi)$ sono legate a quelle cartesiane $(x,y,z)$ dello stesso punto dalle equazioni di trasformazione

$$r = R + z \qquad \text{(D.7.14)}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \tilde{\phi} + y/R \\ \lambda &= \tilde{\lambda} + x/\left[R\cos(\tilde{\phi})\right] \end{aligned} \qquad \text{(A.7.15)}$$

. La validità delle (D.7.14) è soggetta a limitazioni in longitudine e in latitudine che sono soddisfatte dalle disuguaglianze

$$O(x) \le 10^6 m,\ O(y) \le 10^6 m \qquad \text{(D.7.16)}$$

$$|\tilde{\phi}| \le \pi/4 \qquad \text{(A.7.17)}$$

Queste considerazioni mostrano che l'equazione di Eulero (D.7.10) può essere convenientemente espressa in coordinate cartesiane per descrivere processi geofluidodinamici su aree limitate e compatibili con le (D.7.16) e (A.7.17). Posto, in analogia con la (D.6. 7),

$$\overline{p} = p + \rho g z \qquad \text{(D.7.18)}$$

la sostituzione della (D.7.13) nell'equazione di Eulero (D.7.10) determina il sistema di equazioni scalari

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt}+2\Omega\left[-\sin\left(\phi\right)v+\cos\left(\phi\right)w\right]=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\\ \frac{dv}{dt}+2\Omega\sin\left(\phi\right)u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}\\ \frac{dw}{dt}-2\Omega\cos\left(\phi\right)u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\end{gathered} \qquad (D.7.19)$$

in cui le componenti del vettore $2\boldsymbol{\Omega}$ dipendono implicitamente da $y$ (talora detta pseudo-latitudine) attraverso la prima delle equazioni (A.7.15). Se il moto del fluido ha luogo su una parte del piano $\left(x,y\right)$ sufficientemente ristretta per cui $\phi\approx\tilde{\phi}$, a causa della prima delle equazioni (A.7.15) le componenti del vettore $2\boldsymbol{\Omega}$ sono approssimate dalle costanti $2\Omega\sin\left(\tilde{\phi}\right)$ e $2\Omega\cos\left(\tilde{\phi}\right)$. Con il ricorso alla notazione standard

$$f=2\Omega\sin\left(\tilde{\phi}\right),\ \tilde{f}=2\Omega\cos\left(\tilde{\phi}\right) \qquad (D.7.20)$$

dove $f$ è il così detto *parametro di Coriolis* e $\tilde{f}$ ne è quello *reciproco* il sistema (D.7.19) diventa

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt}-fv+\tilde{f}w=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\\ \frac{dv}{dt}+fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}\\ \frac{dw}{dt}-\tilde{f}u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\end{gathered} \qquad (D.7.21)$$

e il piano cartesiano $\left(x,y\right)$ di riferimento è detto *piano* $f$ .