

2.12 Lo strato di Ekman sul fondo

Sia il bilancio geostrofico (par. 2.8) per un fluido a densità costante, sia le equazioni di acqua bassa (par. 2.11) prevedono soluzioni barotropiche, ovvero soluzioni in cui le componenti orizzontali u e v della velocità sono indipendenti dalla coordinata z . È evidente che ciò è del tutto incompatibile con la condizione di adesione al fondo, salvo nel caso banale $u = v = 0$. Anche per i moti geostrofici baroclini, non è ben chiaro come si possa soddisfare la condizione di adesione. D'altra parte la nostra analisi di scala (cfr. eq. 2.60) suggerisce che i termini viscosi sono trascurabili (in particolare se si usa il valore molecolare della viscosità).

Questa aporia si risolve introducendo la nozione di *strato limite*, che scaturisce dall'ipotesi che la presenza di un fondale abbia una diretta influenza sul fluido solo in prossimità del fondale stesso. In altre parole ipotizziamo che le approssimazioni geostrofiche e di acqua bassa siano comunque valide all'interno del fluido e che, in prossimità del fondo, le soluzioni barotropiche possano essere modificate quel tanto che basta per soddisfare la condizione di adesione. Lo strato di fluido sovrastante il fondo in cui le soluzioni sono apprezzabilmente differenti da quelle barotropiche è detto, appunto, strato limite.

In questo paragrafo ricaveremo una semplice soluzione delle equazioni primitive (2.75), per mostrare come, almeno nel semplice caso che tratteremo, l'ipotesi della presenza di uno strato limite è verificata. Cerchiamo soluzioni indipendenti dal tempo (quindi $\partial u/\partial t = \partial v/\partial t = 0$). Inoltre usiamo l'analisi di scala (2.60) per eliminare i termini nonlineari ($\mathbf{u} \cdot \nabla u$ e $\mathbf{u} \cdot \nabla v$) ed i termini viscosi orizzontali ($\nu \partial^2 u/\partial x^2 + \nu \partial^2 u/\partial y^2$ e $\nu \partial^2 v/\partial x^2 + \nu \partial^2 v/\partial y^2$). Non eliminiamo, invece, i termini viscosi verticali ($\nu \partial^2 u/\partial z^2$ e $\nu \partial^2 v/\partial z^2$) poiché, secondo l'ipotesi di strato limite, essi sono tutt'altro che trascurabili in prossimità del fondo. Infine, ci limitiamo a considerare un fluido omogeneo (cioè senza fluttuazioni di densità: $\rho = 0$). Le equazioni primitive si riducono a

$$\begin{aligned} -fv &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ fu &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Ci permettiamo ora due ulteriori ipotesi semplificatrici. Innanzitutto supponiamo che il fondo sia perfettamente piatto ed orizzontale. Sarà conveniente far coincidere il livello $z = 0$ con il fondo. In questa geometria la condizione di adesione al fondo diventa

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0. \tag{2.85}$$

Inoltre, in linea con l'ipotesi di strato limite, supporremo che ad una altezza sufficientemente grande dal fondo la velocità del fluido sia in bilancio geostrofico. Per semplicità, la assumeremo essere pari ad una velocità costante u_G parallela all'asse x . Poiché non abbiamo ancora idea di quanto lontano dal fondo ci si debba porre per poter ritrovare la velocità geostrofica, supponiamo che ciò avvenga ad una altezza infinita. Quindi una seconda coppia di condizioni al

contorno è

$$\begin{aligned} u(x, y, \infty) &= u_G \\ v(x, y, \infty) &= 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Possiamo ora cercare la soluzione delle equazioni (2.84). Lontano dal fondo, la pressione deve essere determinata dall'equilibrio geostrofico (2.63), che nel nostro caso si scrive

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= -f u_G \end{aligned} \quad (2.87)$$

D'altra parte la relazione idrostatica $\partial p / \partial z = 0$ implica che sia $p \equiv p(x, y)$. L'indipendenza della pressione dalla coordinata z è valida sull'intera colonna d'acqua, cioè anche in prossimità del fondo. Quindi possiamo inserire le equazioni (2.87) dentro le prime due equazioni (2.84) ed eliminare la pressione dal nostro problema, ottenendo

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\nu}{f} \frac{d^2 u}{dz^2} \\ u - u_G &= \frac{\nu}{f} \frac{d^2 v}{dz^2} \end{aligned} \quad (2.88)$$

È stato usato il simbolo di derivata ordinaria perché è ormai chiaro che, in questo caso particolare, né u , né v dipendono da x o da y ²³. Introduciamo la variabile $\tilde{u} \doteq u - u_G$, e notiamo che $d^2 u / dz^2 = d^2 \tilde{u} / dz^2$. Le condizioni al contorno per \tilde{u} sono

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, 0) &= -u_G \\ \tilde{u}(x, y, \infty) &= 0 \end{aligned} \quad (2.89)$$

Possiamo disaccoppiare le equazioni (2.88) derivando ciascuna equazione due volte rispetto a z ed inserendola nell'altra. In questo modo si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \tilde{u}}{dz^4} &= -\frac{f^2}{\nu^2} \tilde{u} \\ \frac{d^4 v}{dz^4} &= -\frac{f^2}{\nu^2} v \end{aligned} \quad (2.90)$$

Queste equazioni sono formalmente identiche, e si distinguono solo per le diverse condizioni al contorno su \tilde{u} e su v . Per risolverle notiamo che le seguenti quattro funzioni

$$\begin{aligned} g_1(z) &= e^{z/\delta} \sin(z/\delta) \\ g_2(z) &= e^{z/\delta} \cos(z/\delta) \\ g_3(z) &= e^{-z/\delta} \sin(z/\delta) \\ g_4(z) &= e^{-z/\delta} \cos(z/\delta) \end{aligned} \quad (2.91)$$

²³Questo è ragionevole perché stiamo cercando di raccordarci attraverso uno strato limite ad una soluzione barotropica costante, quindi indipendente da x e da y .

soddisfano la relazione $d^4 g_i / dz^4 = -\frac{4}{\delta^4} g_i$, e quindi sono soluzioni delle equazioni (2.90) se si pone

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{f}}. \quad (2.92)$$

Questa quantità è nota col nome di *lunghezza di Ekman*. Poiché le quattro soluzioni particolari sono fra loro linearmente indipendenti, ne consegue che ogni soluzione delle equazioni (2.90) è esprimibile come combinazione lineare delle g_i . Tuttavia, le condizioni al contorno $\tilde{u}(x, y, \infty) = 0$ e $v(x, y, \infty) = 0$ sono incompatibili con le soluzioni particolari g_1 e g_2 . Notiamo anche che la condizione $\tilde{u}(x, y, 0) = -u_G$ è incompatibile con g_3 , mentre è soddisfatta da $-u_G g_4$, che è la soluzione per \tilde{u} , da cui si ricava u . La soluzione per v è facilmente calcolabile inserendo la soluzione per u nella prima delle equazioni (2.88). Il risultato è

$$\begin{aligned} u &= u_G - u_G e^{-z/\delta} \cos(z/\delta) \\ v &= u_G e^{-z/\delta} \sin(z/\delta) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Come sperato, sufficientemente lontani dal fondo questa soluzione è indistinguibile dal moto barotropico che abbiamo ipotizzato esistesse nell'interno del fluido. Ciò avviene per $z \gg \delta$. Di fatto, il livello $z \approx \delta$ segna il passaggio tra la dinamica dello strato limite e quella dell'interno barotropico. Pertanto, la lunghezza di Ekman δ è considerata come la profondità caratteristica dello strato limite.

Usando i valori riportati in tabella (5.1) otteniamo $\delta \approx 1.4$ m, che è una profondità ridicolmente piccola rispetto alla profondità tipica dell'oceano²⁴. L'esperienza mostra che lo strato limite di Ekman è, in realtà, più spesso di questa stima. In effetti si può ritenere più appropriato, nel calcolare δ utilizzare una viscosità turbolenta, anziché il valore della viscosità molecolare. Anche assumendo il valore $\nu_H = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ per la viscosità turbolenta verticale, (che è da considerarsi del tutto esagerato rispetto alle condizioni tipiche che si trovano sul fondo marino), si ottiene $\delta \approx 140$ m, un valore ancora piccolo su scala oceanica.

La soluzione (2.93) è riportata graficamente in figura 2.14. Si notino alcune particolarità. Innanzitutto, vicino al fondo, la velocità devia a sinistra rispetto alla velocità geostrofica (a destra nell'emisfero Sud). Inoltre la velocità massima è un po' maggiore di u_G . Il vettore velocità, salendo verso l'alto, si avvolge intorno all'asse verticale di coordinate $(u_G, 0)$, seguendo una figura nota col nome di *spirale di Ekman*²⁵. Infine, dalla figura 2.14 è evidente che la corrente geostrofica costante u_G , diretta verso Est, all'interno dello strato di Ekman causa anche un trasporto netto di materia verso Nord.

Il semplice esempio illustrato in questo paragrafo, ovviamente, non può essere considerato una dimostrazione esaustiva dell'esistenza dello strato limite di Ekman. Molte sono state le ipotesi semplificatrici: equilibrio geostrofico nell'interno del fluido, campo di velocità costante, sia nel tempo che nello spazio,

²⁴ESERCIZIO: quanto è profondo lo strato di Ekman in una vasca rotante contenente acqua, che compie 30 giri al minuto?

²⁵ESERCIZIO: calcolate dalla soluzione (2.93) alcune proprietà della spirale di Ekman. A quale altezza il modulo della velocità è massimo? Quanto vale la massima velocità? Quant'è il massimo angolo formato dalla velocità nella spirale di Ekman rispetto ad u_G , ed a che altezza ciò avviene? Qual'è la velocità media verso Nord dell'acqua all'interno dello strato di Ekman? (La risposta a quest'ultima domanda è $\bar{v} \approx u_G/2$).

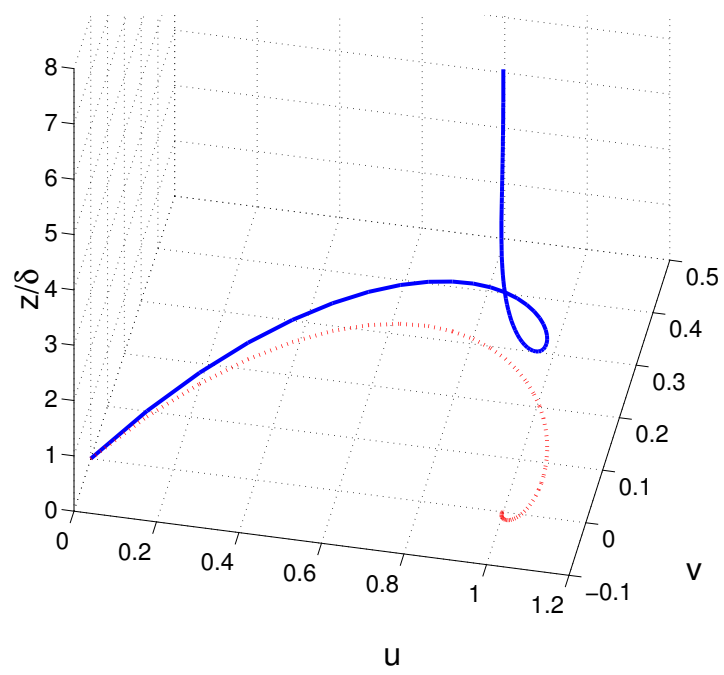


Figura 2.14: Spirale di Ekman. La linea blu rappresenta la velocità dell'acqua al variare dell'altezza. La linea rossa punteggiata è la proiezione della linea blu sul piano (u, v) .

fondo piatto. Dimostrare rigorosamente che, anche rilassando ciascuna di queste ipotesi, si ritrovano comunque soluzioni aventi uno strato limite, è al di fuori dello scopo di queste note. Tuttavia è utile riportare un argomento di carattere euristico per mostrare la ragionevolezza dell'ipotesi di strato limite.

Trascurare il termine di viscosità verticale nell'analisi di scala (2.60) è equivalente a dire che il numero di Ekman (2.62) è piccolo. Ciò è sicuramente vero se la scala d'altezza H che si usa per calcolare il numero di Ekman coincide con la profondità dell'oceano. Tuttavia, si potrebbe obiettare, che, per una particella di fluido ad una altezza δ_p dal fondo, la scala d'altezza dinamicamente rilevante è proprio δ_p . Se quest'ipotesi è vera, allora per δ_p sufficientemente grande si avrà $Ek \ll 1$, con la conseguenza di poter trascurare i termini viscosi, mentre invece per δ_p piccolo si avrà $Ek \gg 1$, ed il moto del fluido sarà dominato dalla viscosità. Il passaggio da una situazione all'altra si avrà per $Ek \approx 1$, ovvero ad una altezza

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu}{f}}. \quad (2.94)$$

Nonostante la rozzezza del ragionamento, abbiamo ritrovato (a meno di un fattore $\sqrt{2}$, fisicamente insignificante) la lunghezza di Ekman, senza bisogno di calcoli complicati. D'altra parte, non abbiamo avuto bisogno di alcuna ipotesi semplificatrice, e questo rafforza la convinzione che moti aventi uno strato limite di altezza pari (approssimativamente) alla lunghezza di Ekman, ed un interno (approssimativamente) non soggetto alla viscosità, siano del tutto comuni nella dinamica dei fluidi in rotazione.

2.13 Lo strato di Ekman di superficie

L'esercizio svolto nel paragrafo precedente potrebbe essere dismesso come non particolarmente interessante o importante per l'oceanografia, se non fosse il primo passo verso la comprensione degli importantissimi (ed intricatissimi) rapporti atmosfera-oceano. Infatti, anche alla superficie dell'oceano esiste uno strato di Ekman, che funge da mediatore degli scambi di quantità di moto fra atmosfera ed oceano.

La superficie di separazione aria-acqua non può essere immaginata come rigida. Quando il vento soffia sulla superficie del mare si producono onde e turbolenza sia nell'aria che nell'acqua. Una precisa trattazione matematica di queste interazioni non è ancora disponibile. Tuttavia, dovrebbe risultare evidente che il vento, soffiando sulla superficie del mare, produce uno sforzo di taglio sull'acqua, in maniera simile ad una lastra di materiale galleggiante trascinata da una forza tangente alla superficie dell'acqua, come nell'esperimento di Newton illustrato in figura 1.4. Possiamo supporre, allora, che in prossimità della superficie valga la legge (1.32), che qui scriveremo

$$\begin{aligned} \rho_0 \nu \frac{\partial u}{\partial z} &= \tau^x \\ \rho_0 \nu \frac{\partial v}{\partial z} &= \tau^y \end{aligned} \quad (2.95)$$

Le quantità $\tau^x(x, y)$ e $\tau^y(x, y)$ sono le componenti, rispettivamente verso Est e verso Nord, dello sforzo di taglio esercitato dal vento sull'acqua²⁶.

²⁶Un problema nient'affatto facile è quello di stabilire quale sia lo stress (τ^x, τ^y) esercitato

Possiamo riformulare l'ipotesi che esista uno strato limite, immediatamente sotto la superficie del mare, che raccorda le correnti geostrofiche dell'interno con le correnti superficiali indotte dallo stress del vento. Le equazioni (2.84) sono dunque valide anche immediatamente sotto la superficie. Solo le condizioni al contorno cambiano rispetto al problema del paragrafo precedente. Al livello $z = 0$ (che ora faremo coincidere con la superficie del mare) devono valere le relazioni (2.95), mentre a profondità "infinita" dobbiamo ritrovare la velocità geostrofica, che ora supporremo possa dipendere in modo generico dalla posizione

$$\begin{aligned} u(x, y, -\infty) &= u_G(x, y) \\ v(x, y, -\infty) &= v_G(x, y) \end{aligned} \quad (2.96)$$

Poiché (u_G, v_G) soddisfano la relazione geostrofica (2.63), possiamo nuovamente eliminare la pressione dalle equazioni (2.84), per ottenere

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= -\frac{\nu}{f} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \\ \tilde{u} &= \frac{\nu}{f} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.97)$$

dove abbiamo definito $\tilde{u} = u - u_G$, $\tilde{v} = v - v_G$. Queste equazioni non dipendono esplicitamente da x e da y , che quindi possono essere considerate come dei parametri. Pertanto esse sono formalmente identiche alle equazioni (2.90) e sono soddisfatte dalle quattro soluzioni particolari (2.91). È immediato verificare che in superficie \tilde{u} e \tilde{v} soddisfano le condizioni (2.96), e a profondità infinita soddisfano le condizioni $\tilde{u}(x, y, -\infty) = 0$ e $\tilde{v}(x, y, -\infty) = 0$.

La soluzione delle equazioni (2.97) risulta essere²⁷

$$\begin{aligned} u &= u_G + \frac{e^{z/\delta}}{\rho_0 \sqrt{\nu f}} \left[\tau^x \sin\left(\frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) + \tau^y \cos\left(\frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ v &= v_G + \frac{e^{z/\delta}}{\rho_0 \sqrt{\nu f}} \left[-\tau^x \cos\left(\frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) + \tau^y \sin\left(\frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.98)$$

La corrente (u, v) nello strato di Ekman superficiale ha, dunque, la medesima dipendenza da x, y della corrente geostrofica, alla quale si aggiunge una correzione che dipende solo dalla profondità. Come è mostrato in figura 2.15, la corrente, spiraleggiando verso il basso, tende a riportarsi alla corrente geostrofica (u_G, v_G) . Anche in questo caso, δ è la profondità caratteristica dello strato superficiale di Ekman. Alla quota $z = 0$ lo scostamento fra la corrente effettiva e quella geostrofica è massimo, ed il vettore velocità devia di 45° a *destra* rispetto al vettore (τ^x, τ^y) , che ha la medesima direzione e verso del vento.

da un vento di cui si conosca la velocità ad una certa altezza dalla superficie del mare (cento metri, ad esempio). In questa sede trascureremo completamente il problema, e ci limiteremo a supporre nota la relazione funzionale che lega lo stress alla velocità del vento.

²⁷Come detto nel paragrafo precedente, la soluzione generale per \tilde{v} è: $\tilde{v} = Ae^{z/\delta} \sin(z/\delta) + Be^{z/\delta} \cos(z/\delta) + Ce^{-z/\delta} \sin(z/\delta) + De^{-z/\delta} \cos(z/\delta)$. La soluzione generale per \tilde{u} si ottiene usando la seconda equazione in (2.97). L'unico modo per soddisfare le condizioni $\tilde{u}(x, y, -\infty) = 0$ e $\tilde{v}(x, y, -\infty) = 0$ è porre $C = D = 0$. Quindi si ha $\tilde{v} = Ae^{z/\delta} \sin(z/\delta) + Be^{z/\delta} \cos(z/\delta)$ e $\tilde{u} = Ae^{z/\delta} \cos(z/\delta) - Be^{z/\delta} \sin(z/\delta)$. Derivando \tilde{v} e \tilde{u} rispetto a z ed imponendo per $z = 0$ le condizioni al contorno (2.95), si ottiene $A + B = \delta \tau^y / \rho_0 \nu$ e $A - B = \delta \tau^x / \rho_0 \nu$. In questo modo si fissano le costanti di integrazione A e B , sostituendo i cui valori nelle espressioni per \tilde{v} e \tilde{u} , insieme alle relazioni trigonometriche $\cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \sqrt{2} \sin(\alpha + \pi/4)$ e $\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = \sqrt{2} \cos(\alpha + \pi/4)$, si ritrovano le soluzioni (2.98).

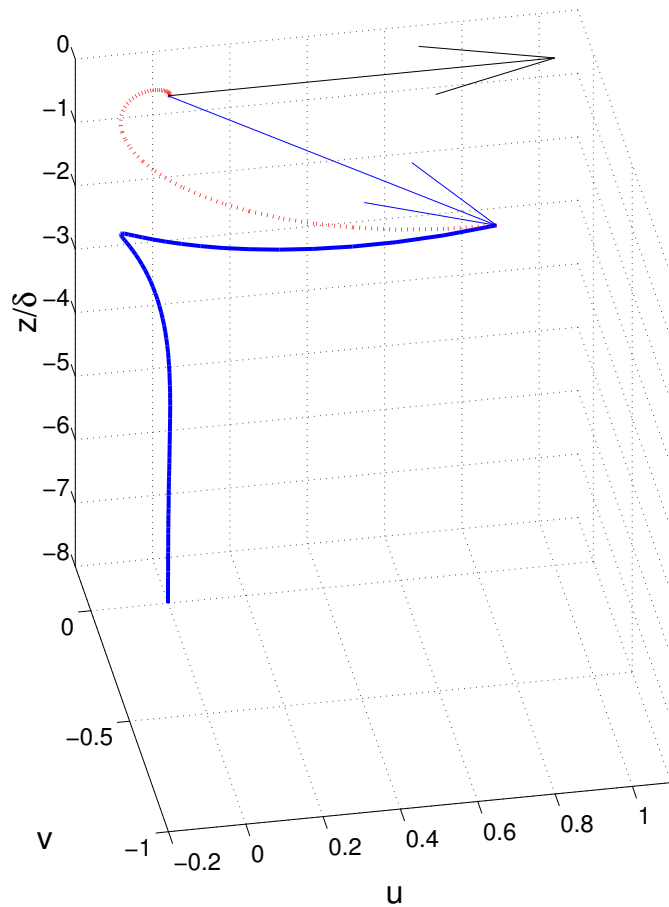


Figura 2.15: Spirale di Ekman in superficie. La linea blu rappresenta la velocità dell'acqua al variare dell'altezza. La linea rossa punteggiata è la proiezione della linea blu sul piano (u, v) . È rappresentata la soluzione (2.98) nel caso particolare $u_G = 0, v_G = 0, \tau^x = 1, \tau^y = 0$. La freccia nera è lo sforzo di taglio indotto dal vento. La freccia blu è la velocità della corrente in superficie.

La proprietà più sorprendente delle correnti indotte dal vento è proprio la loro natura trasversale rispetto alla direzione lungo la quale soffia il vento. Questa proprietà diventa apparente calcolando la corrente causata dalla presenza del vento, integrata sull'intera colonna d'acqua. Si ottiene²⁸

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \int_{-\infty}^0 (u - u_G) dz = \frac{1}{\rho_0 f} \tau^y \\ \mathcal{V} &= \int_{-\infty}^0 (v - v_G) dz = -\frac{1}{\rho_0 f} \tau^x\end{aligned}\quad (2.99)$$

Questo risultato è del tutto anti-intuitivo: un vento che soffia in direzione Nord causa una corrente complessiva diretta verso Est, ed un vento che soffia in direzione Est causa una corrente complessiva diretta verso Sud! In generale, le equazioni (2.99) ci dicono che l'effetto del vento, integrato sull'intera colonna d'acqua, è quello di produrre una corrente perpendicolare e rivolta a destra rispetto al vento stesso, che va a sommarsi alla preesistente corrente geostrofica. Nell'emisfero Sud, essendo $f < 0$, la situazione è speculare, ed il vento produce una corrente rivolta verso la sua sinistra. Infine si noti che l'entità della corrente prodotta dal vento è indipendente dal valore della viscosità ν . Questo è un risultato importante, perché evita di dover affrontare lo spinoso problema della descrizione della turbolenza all'interno dello strato di Ekman superficiale.

Si deve notare che gli integrali definiti in (2.99), sono formalmente estesi fino a $-\infty$, il che è fisicamente privo di senso, poiché l'oceano ha una profondità limitata. In realtà, poiché gli integrandi decadono esponenzialmente per $z/\delta \rightarrow -\infty$, appena ci si spinge a profondità maggiori di qualche multiplo di δ si è "infinitamente lontani" dalla superficie ai fini del calcolo delle correnti di Ekman, anche se, rispetto alla profondità totale dell'oceano, si è ancora negli strati superficiali. Questa considerazione ci aiuta ad interpretare il seguente risultato. Integrando verticalmente l'equazione di continuità (2.12) si ottiene

$$- [w(0) - w(-\infty)] = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] dz = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \left[\frac{\partial u_G}{\partial x} + \frac{\partial v_G}{\partial y} \right] dz. \quad (2.100)$$

Nell'integrale a destra abbiamo potuto sottrarre la divergenza orizzontale della corrente geostrofica poiché essa è nulla (cfr. eq. (2.67)). In questa sede consideriamo trascurabile la velocità verticale alla superficie $w(0) \approx 0$. Scambiando l'ordine delle derivate e dell'integrale e usando le equazioni (2.99) nell'equazione (2.100) si ottiene la velocità verticale alla base dello strato limite di Ekman.

$$w(-\infty) = \frac{1}{\rho_0 f} \left(\frac{\partial \tau^y}{\partial x} - \frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right). \quad (2.101)$$

Questo risultato sorprendente ci dice che disomogeneità orizzontali negli sforzi di taglio causati dal vento (salvo il caso fortuito in cui la quantità $\partial \tau^y / \partial x - \partial \tau^x / \partial y$, detta *rotore degli sforzi di taglio*, fosse nulla) inducono una velocità verticale all'interno della zona in equilibrio geostrofico. A tale fenomeno è dato il nome di "pompaggio di Ekman", ed è illustrato graficamente in figura 2.16.

²⁸Per calcolare l'integrale indefinito lungo z di $\tilde{u} = u - u_G$ si può osservare che \tilde{u} è pari alla sua derivata quarta, moltiplicata per la costante $-4/\delta^4$. Pertanto l'integrale deve essere pari alla derivata terza, moltiplicata per la medesima costante. Lo stesso vale per $\tilde{v} = v - v_G$.

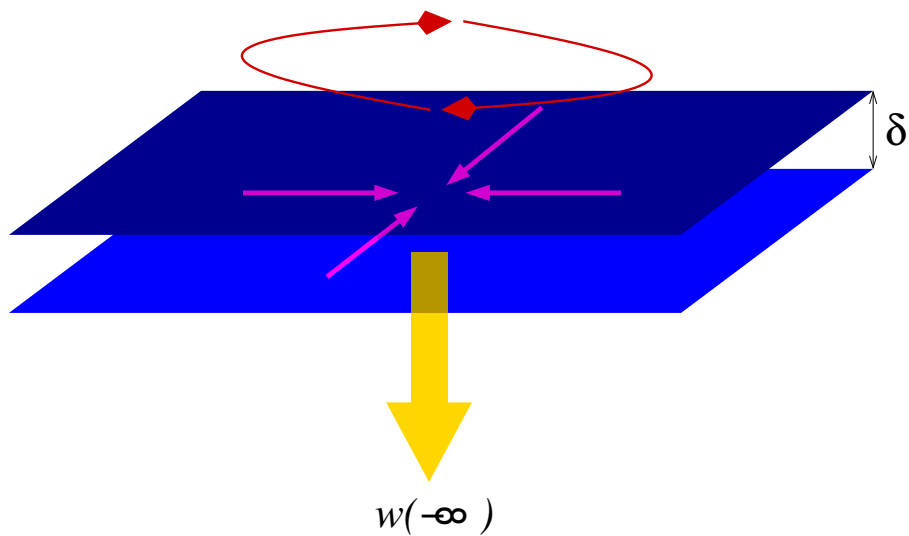


Figura 2.16: Pompaggio di Ekman. Un vento avente una circolazione anticiclonica (freccie rosse) produce una convergenza di correnti nello strato limite superficiale (la zona fra i due piani azzurri) le quali, per conservazione della massa, non possono che generare una corrente verticale discendente al di sotto dello strato limite. Se il vento fosse stato ciclonico, la corrente verticale sarebbe stata ascendente.

2.14 Sommario

2.15 Bibliografia

V. J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur*, Tome II. Gauthier-Villars, Paris, 157-176 (1903).

E. A. Spiegel e G. Veronis, *On the Boussinesq approximation for a compressible fluid*, *Astrophys. J.*, **131**, 442-447 (1960).