Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2020/2021 - 8 febbraio 2021
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale.

Si enunci e si dimostri la diseguaglianza di Cauchy - Schwarz e si dia la definizione di angolo convesso tra vettori non nulli.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

$\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} A = 2$, $\dim \ker f = 3 - \mathrm{rg} f = 1$

base di $\mathrm{Im} f$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\ker f$: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, base: $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

(c) **(1 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(r)$ della retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 &= 2t \\ x_2 &= (\sqrt{5} - 1)t \\ x_3 &= (3 - \sqrt{5})t \end{cases}$$

$r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\\sqrt5-1\\3-\sqrt5\end{pmatrix}\right)$, $f(r) = \mathrm{Span}\left(f\begin{pmatrix}2\\\sqrt5-1\\3-\sqrt5\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1+\sqrt5\\2\\\sqrt5-1\end{pmatrix}\right)$

$\dim f(r) = 1$

(d) **(3 punti)** Si dica, motivando la risposta, se la retta r del punto sopra è formata da autovettori per f oppure no.

Sia $v = \begin{pmatrix}2\\\sqrt5-1\\3-\sqrt5\end{pmatrix}$; si ha: $f(v) = \lambda v \iff$

$\begin{cases} 1+\sqrt5 = 2\lambda \\ 2 = \lambda(\sqrt5 - 1) \\ \sqrt5 - 1 = \lambda(3-\sqrt5) \end{cases} \iff \lambda = \dfrac{\sqrt5+1}{2}$

Ora: $r = \mathrm{Span}(v)$, quindi $\forall w \in r$, $w = c \cdot v$ e

$f(w) = f(c \cdot v) = c f(v) = c\lambda v = \lambda c v = \lambda w \implies$ sì, r è formata da autovettori

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$P_{L_B}(x) = \det(B - x \cdot I_3) = \det \begin{pmatrix} -x & 3 & 0 \\ 3 & -x+3 & -3 \\ 0 & -3 & -x \end{pmatrix} = -x^3 + 3x^2 + 18x = -x(x+3)(x-6)$$

$$Sp(L_B) = \{0, -3, 6\}$$

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} : \begin{cases} 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}, \text{ base } \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{-3} = \ker \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} : \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}, \text{ base } \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_6 = \ker \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} : \begin{cases} -6x_1 + 3x_2 = 0 \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}, \text{ base } \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$$

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(I_d) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(I_d) = {}^t M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(I_d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette r e s_a dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$r : \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x-y-z &= -1 \end{cases} \qquad s_a : \begin{cases} x-z &= 1 \\ y+z &= a \end{cases}$$

– si dimostri che r ed s_a non sono mai parallele;
– si determini il valore di a per cui r ed s_a risultano incidenti.

$W_r : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ $\quad W_{s_a} : \begin{cases} x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$; la matrice del sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ha rango 3 $\Rightarrow$ $r \nparallel s_a$ $\forall a$.

Inoltre $r \cap s_a \neq \phi \iff \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y-z=-1 \\ x-z=1 \\ y+z=a \end{cases}$ è compatibile $\overset{RC}{\iff}$ $rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right) = 3$

$\iff a = 2$

• **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano L passante per il punto $(1,1,1)$, e ortogonale alla retta

$$r : \begin{cases} x = & 1+t \\ y = & -2+3t \\ z = & -3+t \end{cases}$$

$W_r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; generico piano $\perp r$: $x+3y+z=d$

passaggio per $(1,1,1)$: $1+3+1=d \Rightarrow d=5$

L : $x+3y+z=5$