Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 17/6/2019

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (4 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno e l'insieme di livello zero della funzione

$$f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2-4)\sqrt{9-x^2-y^2}}{(y^2-x^4)}$$

   (b) (2 punti) Si studino i limiti di f in $(0,\sqrt{5})$, $(0,2)$.

   (c) Sia $D' = \{(x,y) \in D : x = 0\}$. Si risponda alle seguenti domande, giustificando la risposta.

      i. (1 punto) Ci sono punti aderenti a D' ma non appartenenti a D'?

      ii. (1 punto) D' è un insieme aperto?

      iii. (1 punto) La restrizione di f a D' ha punti di minimo relativo? (NB: non è necessario calcolare derivate.)

2. (a) (3 punti) Data la funzione $f(x,y) = x + |y|$ si determini l'insieme dei punti in cui la stessa è differenziabile, giustificando la risposta.

   (b) (1 punto) Si enunci il teorema del differenziale totale per una funzione $g : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

3. (a) (1 punto) Si studi il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi\cos(\pi n)}{n}$$

   (b) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{e^n - 1}$$

      i. (2 punti) si determini il suo comportamento;

      ii. (2 punti) si studi l'eventuale convergenza assoluta.

4. (a) (4 punti) Si calcoli l'integrale di $f(x,y) = x$ sulla regione del piano

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \geq -x, y \leq x+2\}.$$

   (b) (2 punti) Si dia la definizione di insieme normale (o semplice) in $\mathbb{R}^2$ rispetto ad uno degli assi a scelta.

5. (a) (4 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = \left|x^2 - y\right|$$

nel rettangolo R di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 4)$ e $(0, 4)$.

(b) Si svolga uno solo a scelta dei seguenti due esercizi:

i. (2 punti) Sia data la funzione

$$f(x, y) = x^3 - 12xy + 4y^3.$$

Si stabilisca se esiste un punto di minimo assoluto per f.

ii. (2 punti) Siano $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa. Si dimostri che se $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$, con $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, allora

$$f(x) \leq \max_{1 \leq i \leq m} f(x_i).$$