Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 14/01/2020

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (4 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno e l'insieme di livello zero della funzione
$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2-1)(x-y^2)}$$
(b) (2 punti) Si studi il limite di f in $\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}\right)$.
(c) (2 punti) Si studi il limite di f in $(1,0)$.
(d) (1 punto) Si disegni la frontiera dell'insieme D.
(e) (1 punto) Si dica se l'insieme D è aperto, giustificando la risposta.

2. (a) (2 punti) Si calcoli la derivata direzionale della funzione $g(x,y) = x^2+y^2-1$ nel punto $P(1,1)$ lungo la direzione $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
(b) (3 punti) Siano u, v due funzioni in una variabile definite su $\mathbb{R}$ a valori reali, entrambe derivabili due volte (cioè esse ammettono derivate prima e seconda) e sia c un numero reale diverso da zero. Si definisca la funzione in due variabili $h(x,y) = u(x+cy) + v(x-cy)$.
Si provi che h soddisfa la seguente proprietà:
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

3. (a) (3 punti) Si studi il comportamento della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(n+2)!}$$
(b) Si consideri la successione di funzioni, definite nell'intervallo $]-1,1[$, di termini $f_n(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$.
i. (1 punto) Si studi la sua convergenza puntuale.
ii. (2 punti) Si studi l'eventuale convergenza uniforme.
(c) (1 punto) Si enunci il criterio di convergenza di Leibniz per serie numeriche a segno alterno.

4. (a) (3 punti) Si calcoli l'integrale di $f(x,y) = xy - y^3$ sul dominio del piano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0, 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 1, 0 \le x \le 1\}$.

5. (a) (4 punti) Si determinino i punti di minimo e di massimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2 - 2y + 2xy$$

su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$.

(b) (2 punti) Si provi che $(0,0)$ è punto di sella per la funzione

$$f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2.$$