CdS Fisica, Esame di Analisi Matematica 1, 18/2/2021 A

Nome e Cognome ....

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh(\sin x)}{1-\cos(\sinh x)} = \boxed{}\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln \dfrac{3x^2+1}{4x}}{\ln \dfrac{5x^2-1}{6x}} = \boxed{}\,.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{(x+1)(x+4)}\,,$$

determinando:

i) Dominio: $\boxed{}$.

ii) Limiti importanti:

iii) Derivata prima $f'(x) =$ $\boxed{}$

e suo segno.

iv) Intervalli di crescenza e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

v) Derivata seconda $f''(x) =$ $\boxed{}$

vi) Eventuali informazioni sulla concavità/convessità e grafico di f.

Esercizio 3. [1](3+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, con

$$f'(-1) = 0 = f'(2)\,,$$

tale che

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente convessa su }]-\infty, -\frac{1}{2}[\,, \\ \text{strettamente concava su }]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\,, \\ \text{strettamente convessa su }]\frac{3}{2}, +\infty[\,. \end{cases}$$

Dimostrare che:

i) sia -1 che 2 sono punti di minimo locale;

ii) esiste un unico punto di massimo locale in $[-1, 2]$;

iii) non esistono altri punti di massimo o di minimo locale.

[1]Il testo di questo esercizio è stato qui modificato, in quanto non esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, con $f'(-1) = 0 = f'(2)$, tale che

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente convessa su }]-\infty, -1[\,, \\ \text{strettamente concava su }]-1, 2[\,, \\ \text{strettamente convessa su }]2, +\infty[\,. \end{cases}$$

Infatti, la derivata f' di una tale funzione dovrebbe essere strettamente decrescente su $]-1, 2[$ con $f'(-1) = 0 = f'(2)$, il che è impossibile!

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^{3\pi} x \sin(2x)\, dx = \boxed{}, \qquad \int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx = \boxed{}.$$