

Nome e Cognome

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sinh x) - 1}{\cosh(\sin x) - 1} = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x^2 + 1}{2x}}{\ln \frac{3x^2 - 1}{4x}} = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{(x + 2)^2}{(x + 1)(x + 3)},$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Limiti importanti:

iii) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

iv) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

v) Derivata seconda $f''(x) =$

vi) Eventuali informazioni sulla concavità/convessità e grafico di f .

Esercizio 3. ¹(3+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, con

$$f'(-1) = 0 = f'(1),$$

tale che

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente convessa su }]-\infty, -\frac{1}{2}[, \\ \text{strettamente concava su }]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \\ \text{strettamente convessa su }]\frac{1}{2}, +\infty[. \end{cases}$$

Dimostrare che:

i) sia -1 che 1 sono punti di minimo locale;

ii) esiste un unico punto di massimo locale in $[-1, 1]$;

iii) non esistono altri punti di massimo o di minimo locale.

¹Il testo di questo esercizio è stato qui modificato, in quanto non esiste una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, con $f'(-1) = 0 = f'(2)$, tale che

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente convessa su }]-\infty, -1[, \\ \text{strettamente concava su }]-1, 1[, \\ \text{strettamente convessa su }]1, +\infty[. \end{cases}$$

Infatti, la derivata f' di una tale funzione dovrebbe essere strettamente decrescente su $]-1, 1[$ con $f'(-1) = 0 = f'(1)$, il che è impossibile!

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^{\pi} x \sin(2x) dx = \boxed{}, \quad \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = \boxed{}.$$