Fisica della Materia Condensata I
prova finale a.a. 2020/21
22 febbraio 2021

NOTA:
Dare tutti i passaggi necessari per comprendere il procedimento con cui si è arrivati alla soluzione. Se si usano formule note, indicare da dove si parte. Risposte con il risultato finale solo o con dettagli insufficienti non saranno considerate valide.

Esercizio 1: *Reticoli cristallini*

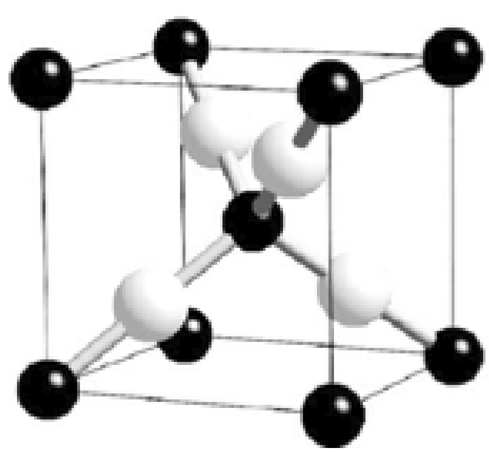
1. Considerare un reticolo ortorombico in **3D** (a, b, c ortogonali, $a \neq b \neq c$). Derivare e disegnare il reticolo reciproco e **la prima** zona di Brillouin.

2. Considerare solo il piano descritto da (a, b), sempre con $a \neq b$, del reticolo dalla domanda precedente e trattare il corrispondente problema in **2D**. Come sopra, disegnare il reticolo reciproco e **le prime due** zone di Brillouin.

3. Considerare infine solo la dimensione a e trattare il corrispondente problema in **1D**. Come sopra, disegnare il reticolo reciproco e **le prime tre** zone di Brillouin.

4. Nella seguente figura è raffigurata la cella cubica convenzionale di una struttura cristallina. Scrivere i vettori primitivi e specificare la base di questa struttura composta.

5. Calcolarne il fattore di struttura su un generico vettore $\mathbf{K}$ di reticolo reciproco, considerando atomi A e B.



Esercizio 2: *Momento cristallino*

L'operatore quantità di moto $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ non commuta con l'Hamiltoniana di un elettrone di Bloch, $\mathcal{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})$ dove $U(\mathbf{r}+\mathbf{R}) = U(\mathbf{r})$, e quindi non è una costante del moto. Però è possibile costruire un operatore quasi-momento $\hat{\mathbf{P}}$ che commuta con $\mathcal{H}$ e il cui autovalore è il quasi-momento (o *momento cristallino*) $\mathbf{k}$: $[\mathcal{H}, \hat{\mathbf{P}}] = 0$; $\hat{\mathbf{P}}\psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \hbar\mathbf{k}\psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ dove $\psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ è autostato di Bloch. Scrivendo $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}} + i\hbar\hat{\mathcal{O}}$, trovare $\hat{\mathcal{O}}$.

Esercizio 3: *Modello semiclassico - I parte*

Si consideri un materiale 3D con una relazione di dispersione dell'energia a simmetria sferica: $\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}[1 + \alpha k^2]$, con α costante positiva.

1. Usando il modello semiclassico della dinamica dell'elettrone, scrivere l'espressione della velocità.

2. Calcolare il periodo dell'orbita in un campo magnetico uniforme, per un dato k, in funzione di k.

Esercizio 4: *Modello semiclassico - II parte*

Supponiamo che un elettrone descritto sostanzialmente dal un modello *tight binding* in 1D subisca l'effetto di un campo elettrico esterno e di un piccolo smorzamento, cosicchè le equazioni del moto del modello semiclassico siano:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = \dfrac{2\mathcal{E}_0 a}{\hbar}\sin(k(t)a) \\ \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = -eE - \dfrac{m}{\tau}v \end{cases}$$

1. Descrivere analiticamente lo stato finale del sistema.

2. Considerare $\mathcal{E}_0 = 1\ eV$, $a = 2\text{Å}$, $E = 10^6\ V/cm$ e $\tau = 10^{-14}s$. Questi parametri sono compatibili con lo stato finale prima determinato? Quanto vale $k(t \to \infty)$ rispetto all'estensione della prima zona di Brillouin?