

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Appunti sulle trasformate di Laplace

Prof. Franco Obersnel (su una base di appunti del Dr. Fabio Zoccolan)

3 maggio 2021

Indice

1	Funzioni trasformabili e trasformata di Laplace.	2
1.1	Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue.	3
1.2	Il teorema sul dominio della trasformata.	3
1.3	Funzioni di ordine esponenziale.	5
1.4	Legame tra la trasformata di Laplace e la trasformata di Fourier.	6
2	Proprietà della trasformata.	6
2.1	Il teorema di analiticità della trasformata.	6
2.2	Il comportamento asintotico della trasformata.	8
2.3	Linearità della trasformata di Laplace.	9
2.4	Smorzamento, cambiamento di scala, traslazione.	9
2.5	Cenno alle distribuzioni e trasformata della distribuzione di Dirac.	11
2.6	La funzione Gamma di Eulero.	13
2.7	La trasformata dei segnali periodici.	15
3	Tasformata della derivata e conseguenze.	16
3.1	Il teorema sulla trasformata della derivata.	16
3.2	Il prodotto di convoluzione.	18
3.3	I teoremi del valore iniziale e finale.	21
3.4	Esempi: seno integrale e seno cardinale.	23
4	Antitrasformate.	24
4.1	Il teorema di inversione.	25
4.2	La formula di Riemann, Fourier, Bromwich, Mellin.	25
4.3	Scorciatoie nel calcolo delle antitrasformate.	26

5 Applicazioni.	28
5.1 Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie.	28
5.2 Applicazioni ai sistemi lineari.	33
5.3 Equazioni integro-differenziali.	34
5.4 Equazioni alle derivate parziali.	36

1 Funzioni trasformabili e trasformata di Laplace.

Indicheremo con $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la *funzione di Heaviside* (o funzione gradino):

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ 1 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Diremo che f è un *segnale* se f soddisfa la condizione $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ non soddisfa la condizione richiesta, possiamo sempre considerare il segnale associato $f \cdot u$.

Nelle note che seguono supporremo sempre implicitamente che le funzioni considerate siano segnali, in particolare sono funzioni misurabili.

Sia f un segnale e consideriamo la funzione $g : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$g(s, t) = e^{-st} f(t).$$

Sia

$$A = \left\{ s \in \mathbb{C} : g(s, \cdot) \text{ è integrabile secondo Lebesgue su } [0, +\infty] \right\}.$$

Una funzione si dice *trasformabile secondo Laplace* se $A \neq \emptyset$. Sia $A \neq \emptyset$; possiamo allora considerare la funzione $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$F(s) = \int_0^{+\infty} g(s, t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

La funzione F si indica anche con $\mathcal{L}\{f\}$ e viene detta la *Trasformata di Laplace della funzione f* .

Si può considerare l'operatore

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cdot\} & : \quad \{\text{funzioni trasformabili secondo Laplace}\} \rightarrow \\ & \rightarrow \quad \{\text{funzioni definite su sottoinsiemi di } \mathbb{C}\}, \end{aligned}$$

che associa ad ogni funzione trasformabile la sua trasformata. Si noti che non si tratta di una funzione tra spazi vettoriali, perché in generale non è possibile sommare due elementi del codominio, potendo trattarsi di funzioni definite su insiemi diversi.

1.1 Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue.

Nella definizione di trasformata di Laplace si potrebbe anche considerare l'integrale di Riemann. La scelta dell'integrale di Lebesgue semplifica la teoria per diversi motivi, ne elenchiamo alcuni.

1) Abbiamo a disposizione i teoremi di passaggio del limite sotto il segno integrale, in particolare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

2) Abbiamo a disposizione i teoremi di riduzione di Tonelli e di Fubini per gli integrali doppi; questi teoremi richiedono ipotesi meno restrittive se utilizziamo l'integrale di Lebesgue. In particolare nel teorema di Fubini non è necessario assumere per ipotesi l'integrabilità delle riduzioni. Questo fatto sarà importante nello studio del prodotto di convoluzione.

3) L'integrabilità è equivalente all'integrabilità assoluta; questo è un grande vantaggio perché molto spesso è più facile dimostrare l'integrabilità di una funzione positiva.

In particolare si ha che dove la funzione $e^{-st}f(t)$ è integrabile lo è anche la funzione $|e^{-st}f(t)|$. Questa proprietà non vale in generale per l'integrale di Riemann. Ad esempio si può verificare che la funzione $f(t) = 2te^{t^2} \cos(e^{t^2})$ è trasformabile secondo Laplace se consideriamo l'integrale di Riemann, ma la funzione $|f(t)|$ non lo è.

1.2 Il teorema sul dominio della trasformata.

Sia $s_0 \in A$, cioè supponiamo che la funzione $e^{-s_0 t}f(t)$ sia integrabile. Allora, per ogni s tale che $\operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0)$, si ha $s \in A$. Infatti, sia $s_0 = x_0 + iy_0$ e $s = x + iy$, con $x \geq x_0$. Per ipotesi la funzione $|e^{-s_0 t}f(t)| = |e^{-x_0 t}e^{-iy_0 t}f(t)| = e^{-x_0 t}|f(t)|$ è integrabile. Inoltre si ha

$$|e^{-st}f(t)| = |e^{-xt-iyt}f(t)| = e^{-xt}|f(t)| \leq e^{-x_0 t}|f(t)|.$$

Perciò, la funzione $e^{-st}f(t)$ è integrabile per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue.

Sia $A \neq \emptyset$. Diremo *ascissa di convergenza* il numero (eventualmente $-\infty$)

$$\lambda_f = \inf \left\{ \operatorname{Re}(s) : s \in A \right\}.$$

Diremo *retta di convergenza* la retta nel piano complesso di equazione

$$\operatorname{Re}(s) = \lambda_f.$$

Diremo *semipiano di convergenza* l'insieme

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \lambda_f\}.$$

Si noti che, nel caso $\lambda_f = -\infty$, la retta di convergenza non è definita e il semipiano di convergenza è tutto il piano $\mathbb{C}$. Se f non è trasformabile si pone per convenzione $\lambda_f = +\infty$, la retta di convergenza non è definita e il semipiano di convergenza è l'insieme vuoto.

Il semipiano di convergenza è sempre contenuto in A , ma potrebbe non coincidere con A . I punti della retta di convergenza possono appartenere ad A , ma non è detto che sia così. Si osservi l'analogia con i concetti di insieme di convergenza e disco di convergenza di una serie di potenze.

Esempi.

- Sia $f(t) = e^{t^2}u(t)$. Per ogni $s = x + iy \in \mathbb{C}$ si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-st}f(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{t^2-st}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(t-x)} = +\infty.$$

La funzione f pertanto non è trasformabile.

- Sia $f(t) = e^{-t^2}u(t)$. Per ogni $s = x + iy \in \mathbb{C}$, $x < 0$, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |e^{-st}f(t)| dt &= \int_0^{-x+1} |e^{-t^2-st}| dt + \int_{-x+1}^{+\infty} e^{-t(t+x)} dt \\ &\leq \int_0^{-x+1} |e^{-t^2-st}| dt + \int_{-x+1}^{+\infty} e^{-t} dt \\ &\leq \int_0^{-x+1} |e^{-t^2-st}| dt + e^{(x-1)}. \end{aligned}$$

Perciò la funzione f è trasformabile, $A = \mathbb{C}$, $\lambda_f = -\infty$.

- Sia $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, $f(t) = e^{\alpha t}u(t)$. Sia $s = x + iy$ con $x > a$. Allora

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s)t} dt = \frac{1}{s-\alpha}.$$

Se invece $x \leq a$ la funzione $e^{\alpha t-st}$ non è integrabile perché in questo caso si ha $|e^{\alpha t-st}| = e^{(a-x)t} \geq 1$. Pertanto si ha $\lambda_f = \operatorname{Re}(\alpha)$.

- Sia f un segnale limitato a supporto compatto. Esiste allora un intervallo $[t_1, t_2]$ tale che $f(t) = 0$ per ogni $t \notin [t_1, t_2]$. Allora f è trasformabile e $\lambda_f = -\infty$. Infatti si ha

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st}f(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} |e^{-st}f(t)| dt < +\infty$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$.

- Trasformata di $u(t)$. Calcoliamo la trasformata di Laplace della funzione di Heaviside. Si ha

$$\mathcal{L}\{u\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

Pertanto $\mathcal{L}\{u(t)\}(s) = \frac{1}{s}$, $\lambda_f = 0$.

- Trasformata dell'impulso unitario. Si consideri l'impulso di durata 1 e altezza 1: $f(t) = u(t) - u(t-1)$. La funzione f ha supporto compatto e pertanto $\lambda_f = -\infty$. Si calcola facilmente

$$F(s) = \int_0^1 e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

- Sia f un segnale trasformabile e sia λ_f la sua ascissa di convergenza. Proviamo che anche la funzione $t \cdot f(t)$ è trasformabile con la stessa ascissa di convergenza.

Fissato $s = \alpha + i\beta$ con $\alpha > \lambda_f$ prendiamo $\varepsilon > 0$ tale che $2\varepsilon < \alpha - \lambda_f$ e poniamo $s_1 = \lambda_f + \varepsilon$. Si osservi che s_1 appartiene al semipiano di convergenza di f . La funzione $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\varphi(t) = t e^{-\varepsilon t}$ è limitata e ha un punto di massimo in $t_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ con $\varphi(t_\varepsilon) = M_\varepsilon = \frac{e^{-1}}{\varepsilon}$. Si stima allora

$$|e^{-st} t f(t)| \leq e^{-(\lambda_f + 2\varepsilon)t} |f(t)| = e^{-s_1 t} e^{-\varepsilon t} t |f(t)| \leq e^{-s_1 t} M_\varepsilon |f(t)|$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st} t f(t)| dt \leq M_\varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-s_1 t} |f(t)| dt < +\infty.$$

1.3 Funzioni di ordine esponenziale.

Diremo che una funzione f è di *ordine esponenziale* se esistono $\beta, k \in \mathbb{R}$ tali che $|f(t)| \leq k e^{\beta t}$ per ogni $t \in [0, +\infty]$, cioè se la funzione $f(t) e^{-\beta t}$ è limitata.

Evidentemente, se una funzione f è di ordine esponenziale, f è trasformabile (con ascissa di convergenza $\lambda_f \leq \beta$). Tuttavia esistono funzioni che, pur non essendo di ordine esponenziale, sono trasformabili.

- Esempio.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & t > 0. \end{cases}$$

La funzione f non è di ordine esponenziale perché è illimitata in 0. Tuttavia la funzione $e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}}$, con $x = \operatorname{Re}(s) > 0$, è integrabile su $]0, +\infty[$ perché $|e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}}| = e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{t}}$ è infinita di ordine $\frac{1}{2}$ in zero ed è infinitesima di ordine soprareale a $+\infty$.

1.4 Legame tra la trasformata di Laplace e la trasformata di Fourier.

Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Se definita, indichiamo con

$$\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} g(x) dx$$

la sua trasformata di Fourier. Sia f un segnale trasformabile con ascissa di convergenza λ_f e sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \lambda_f$. Si consideri la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(t) = e^{-\alpha t} f(t) u(t)$. Si osservi che si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} e^{-\alpha t} f(t) u(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + i\omega x)t} f(t) dt = \mathcal{L}\{f\}(\alpha + i\omega). \end{aligned}$$

Si ottiene quindi la relazione

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{F}\{e^{-\operatorname{Re}(s)t} f(t) u(t)\}(\operatorname{Im}(s)).$$

2 Proprietà della trasformata.

La trasformata di Laplace di una funzione è sempre una funzione analitica. Per dimostrare questo fondamentale teorema utilizzeremo il teorema di convergenza dominata di Lebesgue e l'ultima osservazione della sezione 1.2.

2.1 Il teorema di analiticità della trasformata.

Sia f trasformabile con ascissa di convergenza λ_f e semipiano di convergenza

$$E = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \lambda_f\}.$$

Allora $\mathcal{L}\{f\} = F$ è derivabile su E e vale la formula

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f\}(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s).$$

Dimostrazione. Sia $s = \alpha + i\beta$ con $\alpha > \lambda_f$. Fissiamo un numero $\varepsilon > 0$ che soddisfa $\varepsilon < \alpha - \lambda_f$. Dimostriamo che F è derivabile in s . Si ha

$$\begin{aligned} F'(s) &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{F(s+w) - F(s)}{w} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(s+w)t} f(t) dt - \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right) \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-wt} - 1}{-wt} (-t) e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Sia $(w_n)_n$ tale che $|w_n| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$, e consideriamo la successione di funzioni

$$g_n(t) = \frac{e^{-w_n t} - 1}{-w_n t} (-t) e^{-st} f(t).$$

Si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = -t e^{-st} f(t)$ per ogni $t \in]0, +\infty[$. Inoltre, osserviamo che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, vale la disuguaglianza

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} \right| = \left| \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} - 1}{z} \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{n-1} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} |z|^{n-1} = e^{|z|}.$$

Perciò abbiamo la stima

$$|g_n(t)| \leq e^{|-w_n t|} t e^{-\alpha t} |f(t)| \leq e^{-(\alpha - \varepsilon)t} t |f(t)|.$$

Poiché $\alpha - \varepsilon > \lambda_f$, e, per quanto osservato nell'ultima osservazione della sezione 1.2, λ_f è l'ascissa di convergenza della funzione $t f(t)$, la funzione $e^{-(\alpha - \varepsilon)t} t |f(t)|$ è integrabile su $[0, +\infty[$. Pertanto la successione g_n verifica le ipotesi del teorema di convergenza dominata di Lebesgue e si può concludere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} -t e^{-st} f(t) dt.$$

Per arbitrarietà della scelta della successione $(w_n)_n$ si conclude che

$$\begin{aligned} F'(s) &= \lim_{w \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-wt} - 1}{-wt} (-t) e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{e^{-wt} - 1}{-wt} (-t) e^{-st} f(t) dt = \int_0^{+\infty} -t e^{-st} f(t) dt \\ &= -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s). \end{aligned}$$

Per induzione su k si può calcolare la derivata di ordine $k \in \mathbb{N}$ della funzione:

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \mathcal{L}\{t^k f(t)\}(s).$$

- La formula dimostrata ci fornisce anche la formula della trasformata della funzione potenza di esponente naturale. Infatti, sappiamo che $\mathcal{L}\{u\}(s) = \frac{1}{s}$. Pertanto

$$\mathcal{L}\{t^k u(t)\}(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

2.2 Il comportamento asintotico della trasformata.

Sia f trasformabile, con ascissa di convergenza λ_f , e sia F la sua trasformata. Allora F è limitata in ogni semipiano chiuso contenuto nel semipiano di convergenza, cioè in ogni insieme

$$E_1 = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) \geq \lambda_1\}$$

con $\lambda_1 > \lambda_f$. Inoltre

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} F(s) = 0.$$

Dimostrazione. Per ogni $s \in E_1$ si ha $|e^{-st} f(t)| \leq e^{-\lambda_1 t} |f(t)|$, e quindi

$$|F(s)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 t} |f(t)| dt = \mathcal{L}\{|f|\}(\lambda_1),$$

e quindi F è limitata su E_1 . Inoltre, per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si può portare il limite sotto il segno integrale e si ottiene

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} e^{-st} f(t) dt = 0.$$

- Si osservi che in generale non è vero che $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} F(s) = 0$. Si pensi all'esempio (visto nella sezione 1.2) $f(t) = u(t) - u(t-1)$, dove si è calcolato $F(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$.

- La proprietà dimostrata restringe fortemente l'insieme delle funzioni che possono essere trasformate di qualche funzione. Ad esempio non può esistere nessuna funzione la cui trasformata sia la funzione $F(s) = 1$. Vedremo in seguito che esistono distribuzioni (non funzioni) le cui trasformate possono non soddisfare la proprietà asintotica.

2.3 Linearità della trasformata di Laplace.

Siano f e g trasformabili con ascissa di convergenza rispettivamente λ_f e λ_g . Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re}(s) > \max\{\lambda_f, \lambda_g\}$, e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\}.$$

La dimostrazione è immediata dalla linearità dell'integrale. Si noti che non è corretto parlare di linearità dell'operatore $\mathcal{L}$, in quanto l'addizione non è un'operazione interna al suo codominio.

2.4 Smorzamento, cambiamento di scala, traslazione.

Smorzamento. Sia f trasformabile e sia F la sua trasformata; sia λ_f l'ascissa di convergenza. Sia $\gamma \in \mathbb{C}$ e $g(t) = f(t)e^{\gamma t}$. Allora, la funzione g è trasformabile, con ascissa di convergenza $\lambda_g = \lambda_f + \operatorname{Re}(\gamma)$, e la sua trasformata G è

$$G(s) = F(s - \gamma).$$

Infatti, si calcola facilmente

$$G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\gamma t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\gamma)t} f(t) dt = F(s - \gamma).$$

• Esempio. Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale $f(t) = t^2 e^{-2t} u(t)$. Sappiamo che $\mathcal{L}\{t^2 u(t)\} = \frac{2}{s^3}$. Pertanto $\mathcal{L}\{t^2 e^{-2t} u(t)\} = \frac{2}{(s+2)^3}$.

• Esempio. Sia $\omega \in \mathbb{R}$. Posto $f(t) = e^{\omega t} u(t)$ si ha $F(s) = \frac{1}{s-\omega}$. Posto $g(t) = e^{-\omega t} u(t)$ si ha $G(s) = \frac{1}{s+\omega}$. Possiamo allora facilmente calcolare le trasformate delle funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico.

$$\mathcal{L}\{\cosh(\omega t) u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) u(t)\right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega} \right) = \frac{s}{s^2 - \omega^2}.$$

$$\mathcal{L}\{\sinh(\omega t) u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) u(t)\right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}.$$

• Esempio. Sia $\omega \in \mathbb{R}$. Posto $f(t) = e^{i\omega t} u(t)$ si ha $F(s) = \frac{1}{s-i\omega}$. Posto $g(t) = e^{-i\omega t} u(t)$ si ha $G(s) = \frac{1}{s+i\omega}$. Possiamo allora facilmente calcolare le trasformate delle funzioni seno e coseno.

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t) u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) u(t)\right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t) u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) u(t)\right\} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Cambiamento di scala. Sia f trasformabile e sia F la sua trasformata; sia λ_f l'ascissa di convergenza. Sia $w \in \mathbb{R}, w > 0$, e $g(t) = f(wt)$. Allora la funzione g è trasformabile, con ascissa di convergenza $\lambda_g = w\lambda_f$, e la sua trasformata G è

$$G(s) = \frac{1}{w} F\left(\frac{s}{w}\right).$$

Infatti, si calcola facilmente

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(wt) dt = \int_0^{+\infty} e^{-s\frac{\xi}{w}} f(\xi) \frac{1}{w} d\xi = \frac{1}{w} F\left(\frac{s}{w}\right),$$

dove si è effettuato il cambio di variabile $\xi = wt$.

• Esempio. Supponiamo di non conoscere la trasformata della funzione $f(t) = \sin(\omega t)u(t)$, per ogni ω , ma di sapere soltanto che $\mathcal{L}\{\sin(t)u(t)\}(s) = \frac{1}{1+s^2}$. Si calcoli la trasformata di Laplace di $f(t) = \sin(\omega t)u(t)$. Si ha

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)u(t)\}(s) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\omega^2}} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}.$$

• Esempio. Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione $f(t) = t^k e^{-i\omega t} u(t)$, con $k \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\mathcal{L}\{e^{i\omega t} u(t)\}(s) = \frac{1}{s - i\omega},$$

e quindi

$$\mathcal{L}\{t^k e^{i\omega t} u(t)\}(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} (s - i\omega)^{-1} = \frac{k!}{(s - i\omega)^{k+1}}.$$

Traslazione. Sia f trasformabile e sia F la sua trasformata; sia λ_f l'ascissa di convergenza. Sia $a \in \mathbb{R}, a > 0$, e $g(t) = f(t-a) \cdot u(t-a)$. Allora la funzione g è trasformabile, con ascissa di convergenza $\lambda_g = \lambda_f$, e la sua trasformata G è

$$G(s) = F(s) e^{-sa}.$$

Infatti, si calcola facilmente

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^{+\infty} f(t-a) u(t-a) e^{-st} dt = \int_a^{+\infty} f(t-a) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-s(\tau+a)} d\tau = e^{-sa} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-sa} F(s). \end{aligned}$$

dove si è effettuato il cambio di variabile $\tau = t - a$.

- Esempio. Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = (t - 3)^2 u(t - 3).$$

Si ha

$$\mathcal{L}\{t^2 u(t)\}(s) = \frac{2}{s^3},$$

e quindi

$$\mathcal{L}\{(t - 3)^2 u(t - 3)\}(s) = \frac{2}{s^3} e^{-3s}.$$

2.5 Cenno alle distribuzioni e trasformata della distribuzione di Dirac.

Consideriamo, per $h > 0$, la funzione *impulso di durata h e altezza $\frac{1}{h}$* :

$$f_h(t) = \frac{1}{h} [u(t) - u(t - h)].$$

Osserviamo che, per ogni $h > 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_h(t) dt = 1.$$

La funzione f_h è limitata e a supporto compatto, quindi è trasformabile con ascissa di convergenza $\lambda_{f_h} = -\infty$, e si ha

$$\mathcal{L}\{f_h\}(s) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sh} \right] = \begin{cases} \frac{e^{-sh} - 1}{-hs} & \text{se } s \neq 0 \\ 1 & \text{se } s = 0. \end{cases}$$

Fissato $s \in \mathbb{C}$ si calcola inoltre

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{L}\{f_h\}(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-sh} - 1}{-hs} = 1.$$

Vorremmo considerare il limite $\lim_{h \rightarrow 0^+} f_h$. Tuttavia, questo limite non è una funzione perché si ha $\lim_{h \rightarrow 0^+} f_h(t) = 0$ per ogni $t \neq 0$ mentre $\lim_{h \rightarrow 0^+} f_h(0) = +\infty$. Tale limite è invece una *distribuzione*.

Consideriamo un insieme particolare di funzioni continue, detto spazio delle funzioni test, che in queste note non riteniamo necessario descrivere in modo

più preciso. Denotiamo con $\mathcal{D}$ tale spazio (è uno spazio vettoriale). Sia $\varphi \in \mathcal{D}$ una funzione test. Possiamo associare alla funzione φ il numero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_h(t) dt.$$

Posto $\tilde{f}_h(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_h(t) dt$ otteniamo un funzionale (cioè un operatore lineare che associa ad ogni elemento di $\mathcal{D}$ un numero reale)

$$\tilde{f}_h : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Funzionali di questo tipo sono particolari esempi di *distribuzioni*. Ad ogni funzione integrabile f si può associare la distribuzione corrispondente $\tilde{f}$. Più in generale si dice distribuzione ogni funzionale $\eta : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica opportune proprietà di regolarità. In questa sede ci limitiamo a considerare le distribuzioni $\tilde{f}_h$. Osserviamo che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, si ha, usando il teorema della media integrale,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{f}_h(\varphi) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \varphi(t_h) = \varphi(0),$$

(qui $0 \leq t_h \leq h$). Diremo *delta di Dirac* centrata in 0 la distribuzione $\delta_0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\delta_0(\varphi) = \varphi(0).$$

Si è visto sopra che si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{f}_h(\varphi) = \delta_0(\varphi)$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$. Diremo allora che la δ_0 è limite della famiglia di distribuzioni $\tilde{f}_h$. Poiché ogni distribuzione $\tilde{f}_h$ proviene da una funzione f_h , che è trasformabile, si può pensare di definire la trasformata di Laplace della distribuzione limite nel modo seguente:

$$\mathcal{L}\{\delta_0\}(s) = \mathcal{L}\left\{\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{f}_h\right\}(s) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{L}\{f_h\}(s) = 1.$$

Naturalmente la possibilità di procedere in questo modo andrebbe studiata e verificata. Abbiamo comunque cercato di spiegare perché la trasformata della delta di Dirac è la costante 1. Si osservi che la trasformata della δ_0 non verifica la proprietà di essere infinitesima per $\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty$.

2.6 La funzione Gamma di Eulero.

Fissiamo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e consideriamo la funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$. Se $0 < x < 1$ la funzione è infinita in 0, ma comunque di ordine minore di 1. Inoltre, per ogni $x > 0$, la funzione f è infinitesima a $+\infty$ di ordine soprareale. Perciò, per ogni $x > 0$, f è integrabile in senso generalizzato su $]0, +\infty[$. Sia ora $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $Re(z) = x > 0$. Si ha

$$|t^{z-1}e^{-t}| = |e^{(z-1)\log t}e^{-t}| = |e^{(x-1)\log t}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t} = f(t),$$

quindi la funzione $t^{z-1}e^{-t}$ è integrabile su $]0, +\infty[$. Possiamo allora definire la *funzione Gamma di Eulero* $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ nel modo seguente:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t} dt.$$

Si osservi che $\Gamma(1) = 1$. Inoltre, integrando per parti si verifica facilmente che

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

per ogni z con $Re(z) > 0$. Infatti,

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-e^{-t} t^z \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} z t^{z-1} (-e^{-t}) dt \\ &= z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z). \end{aligned} \quad (1)$$

In particolare si ha $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 6$, e, per induzione su $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

Grazie alla (1) è possibile estendere il dominio della funzione Γ . Infatti, purché z non sia un intero negativo o nullo, si può induttivamente definire

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

La funzione Gamma si potrà pertanto definire sull'insieme $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Grazie alla proprietà descritta, inoltre, la funzione Γ può essere considerata un interpolante analitico del fattoriale.

• Osservazione. Iterando la formula (1) si ottiene, per ogni n e per ogni $z \in \mathcal{D}$,

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2) \cdots (z+2)(z+1)z\Gamma(z),$$

da cui

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-2)(z+n-1)}.$$

Questa formula permette di verificare che tutte le singolarità di Γ sono poli semplici e di calcolare il residuo in ogni punto $-k$, con $k \in \mathbb{N}$. Infatti, rappresentando la funzione Γ come nella formula, con $n = k+1$, si ha

$$\begin{aligned} \text{Res}(\Gamma, -k) &= \lim_{z \rightarrow -k} \Gamma(z)(z+k) \\ &= \lim_{z \rightarrow -k} \frac{\Gamma(z+k+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+k-1)(z+k)}(z+k) \\ &= \lim_{z \rightarrow -k} \frac{\Gamma(1)}{(-k)(-(k-1))(-(k-2))\cdots(-2)(-1)} = \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

• Alcuni conti. Grazie al cambio di variabile $\tau = \sqrt{t}$ e ricordando l'integrale di Gauss, calcoliamo facilmente

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} 2e^{-\tau^2} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Dalla formula (1) si calcola inoltre

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Trasformata della funzione potenza. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$, con $\text{Re}(\alpha) > -1$. La funzione $f(t) = t^\alpha u(t)$ è allora trasformabile. Per ogni $s = x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, si ha, grazie al cambiamento di variabile $xt = \xi$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^\alpha u(t)\}(x) &= \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha e^{-\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} \xi^\alpha e^{-\xi} d\xi = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Per l'unicità del prolungamento analitico al semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0\}$ della funzione $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ si ottiene infine

$$\mathcal{L}\{t^\alpha u(t)\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(s) > 0$.

Esempi:

$$\mathcal{L}\{\sqrt{t}u(t)\} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}s^{-\frac{3}{2}}$$

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}u(t)\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Si noti che, nel caso $\alpha = n \in \mathbb{N}$, riotteniamo il risultato già provato

$$\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

2.7 La trasformata dei segnali periodici.

Un segnale non nullo non può mai essere una funzione periodica secondo la definizione usuale. In modo un po' forzato diremo che un segnale f è *periodico* di periodo $T > 0$ se verifica la proprietà $f(t+T) = f(t)$ per ogni $t \in]0, +\infty[$.

Sia f un segnale periodico. Indichiamo con f^* la funzione

$$f^*(t) = f(t) \begin{cases} u(t) - u(t-T) \end{cases} = \begin{cases} f(t) & t \in [0, T], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

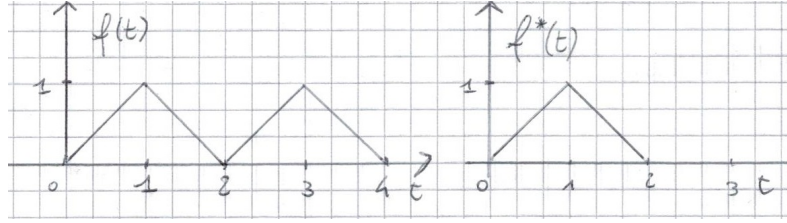
Denotiamo con F la trasformata di Laplace della funzione f e con F^* la trasformata della funzione f^* . Si ha allora

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \mathcal{L}\{f(t)u(t)\}(s) - \mathcal{L}\{f(t)u(t-T)\}(s) \\ &= F(s) - \mathcal{L}\{f(t-T)u(t-T)\}(s) \\ &= F(s) - e^{-sT}F(s) = F(s)(1 - e^{-sT}). \end{aligned}$$

Se conosciamo la trasformata della funzione f^* , si ottiene la trasformata della funzione f dalla formula

$$F(s) = \frac{F^*(s)}{1 - e^{-sT}}. \quad (2)$$

- Esempio. Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione detta “onda triangolare” (o dente di sega) f di periodo $T = 2$ rappresentata in figura.



Si ha

$$f^*(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in [0, 1] \\ 2 - t & \text{se } t \in [1, 2] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che si può scrivere

$$\begin{aligned} f^*(t) &= t[u(t) - u(t-1)] + (2-t)[u(t-1) - u(t-2)] \\ &= tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2) \end{aligned}$$

e quindi

$$F^*(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{2}{s^2}e^{-2s} = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} = (1 - e^{-s})^2 \frac{1}{s^2}.$$

Applicando la formula (2) si ottiene infine

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1 - e^{-s}}{1 + e^{-s}} \frac{1}{s^2}.$$

3 Trasformata della derivata e conseguenze.

Sia f un segnale trasformabile e derivabile. Non è vero in generale che la derivata f' è trasformabile. Si consideri ad esempio la funzione $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} u(t)$. f è trasformabile ed è derivabile su $]0, +\infty[$ con $f'(t) = \frac{1}{2}t^{-3/2}$. La funzione f' non è trasformabile perché è infinita di ordine $3/2$ in 0 . Ci chiediamo sotto quali condizioni la funzione derivata è trasformabile e cerchiamo una formula per $\mathcal{L}\{f'\}$ in funzione di $\mathcal{L}\{f\}$.

3.1 Il teorema sulla trasformata della derivata.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un segnale trasformabile con ascissa di convergenza λ_f . Esista $f'(t)$ per ogni $t > 0$. Si estenda f' a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f'(t) = 0$ per ogni $t \leq 0$. Sia f' trasformabile con ascissa di convergenza $\lambda_{f'}$ e supponiamo che

esista finito il limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$. Allora si ha, per ogni $s \in \mathbb{C}$, con $Re(s) > \max\{\lambda_{f'}, \lambda_f\}$,

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \mathcal{L}\{f\}(s) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t).$$

Dimostrazione. Sia $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \max\{\lambda_{f'}, \lambda_f\}$. Calcoliamo l'integrale generalizzato usando l'additività dell'integrale e integrando per parti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(s) &= \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_0^1 f'(t) e^{-st} dt + \int_1^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f'(t) e^{-st} dt + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f'(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} (f(1) e^{-s} - f(a) e^{-sa} - \int_a^1 f(t) (-s) e^{-st} dt) \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow +\infty} (f(b) e^{-sb} - f(1) e^{-s} - \int_1^b f(t) (-s) e^{-st} dt) \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0^+} f(a) + s \mathcal{L}\{f\}(s) + \lim_{b \rightarrow +\infty} f(b) e^{-sb}. \end{aligned}$$

Per ipotesi esistono $\mathcal{L}\{f'\}(s)$, $\mathcal{L}\{f\}(s)$ e il limite finito $\lim_{a \rightarrow 0^+} f(a)$. Perciò deve esistere finito anche il limite $\lim_{b \rightarrow +\infty} f(b) e^{-sb}$. Se questo limite non fosse 0, la funzione $f(t) e^{-st}$ non sarebbe integrabile su $]0, +\infty[$, in contraddizione con il fatto che $Re(s) > \lambda_f$. Pertanto si conclude

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \mathcal{L}\{f\}(s) - \lim_{a \rightarrow 0^+} f(a).$$

• Esempio. Sia $\omega \neq 0$. Sappiamo che $\mathcal{L}\{\cos(\omega t) u(t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$. Supponiamo di non conoscere la trasformata della funzione $\sin(\omega t) u(t)$. Sappiamo però che $\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$. Pertanto si può calcolare

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(\omega t) u(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{-\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \cos(\omega t) u(t)\right\}(s) \\ &= -\frac{1}{\omega} (s \mathcal{L}\{\cos(\omega t) u(t)\}(s) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos(\omega t)) \\ &= -\frac{1}{\omega} \left(s \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 1\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

• Per induzione su $n \in \mathbb{N}$ si possono calcolare le trasformate delle derivate di ordine n . Per comodità, se g è una funzione, scriveremo $g(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$. Si ha

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+).$$

- Se la funzione f è derivabile in $]0, +\infty[\setminus \{t_0\}$, con $t_0 > 0$, e la funzione presenta nel punto t_0 una discontinuità di tipo salto, si può dimostrare la validità della seguente formula:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0^+) - \left(f(t_0^+) - f(t_0^-)\right) e^{-st_0},$$

dove $f(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$, $f(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t)$, $\left(f(t_0^+) - f(t_0^-)\right)$ è il salto della funzione in t_0 . La formula si può facilmente estendere al caso della derivata di ordine n e anche al caso di un numero finito di discontinuità. Ad esempio, per $n = 2$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''\}(s) &= s^2 \mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0^+) - f'(0^+) \\ &\quad - s \left(f(t_0^+) - f(t_0^-)\right) e^{-st_0} - \left(f'(t_0^+) - f'(t_0^-)\right) e^{-st_0}. \end{aligned}$$

3.2 Il prodotto di convoluzione.

Sia $N \in \mathbb{N}^+$ e siano $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$. Supponiamo esistente, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, l'integrale

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x - y) dy.$$

La funzione $f * g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ così definita si dice il prodotto di convoluzione di f con g . Con un cambio di variabili si verifica facilmente che il prodotto di convoluzione è commutativo, cioè $f * g = g * f$.

Esistenza del prodotto di convoluzione. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Allora per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione $f(\cdot) g(x - \cdot)$ è integrabile su $\mathbb{R}^N$ (nella variabile y) e quindi è definita la funzione $f * g$. Inoltre $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Dimostriamo questo fatto nel caso $N = 1$.

Dimostrazione. Useremo in modo combinato i teoremi di Tonelli e di Fubini. Ricordiamo l'enunciato del teorema di Tonelli.

Sia $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile tale che $h(x, y) \geq 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ le restrizioni $h(\cdot, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siano integrabili e che la funzione $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx$ sia anch'essa integrabile. Allora la funzione h è integrabile e si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx \right) dy.$$

Consideriamo la funzione $h(x, y) = |f(y) g(x - y)|$. La funzione h è misu-

rabile, $h(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ la funzione $|f(y) g(\cdot - y)|$ è integrabile su $\mathbb{R}$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y) g(x - y)| dx = |f(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x - y)| dx = |f(y)| \|g\|_{L^1}.$$

Inoltre, la funzione $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx$ è integrabile; infatti si ha, con il cambio di variabile $u = x - y$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| |g(x - y)| dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)| du \right) dy = \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Per il teorema di Tonelli si conclude che la funzione h è integrabile in $\mathbb{R}^2$. Ma allora, per il teorema di Fubini, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione $|f(\cdot) g(x - \cdot)|$ è integrabile su $\mathbb{R}$. Infine si osserva che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)| dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x - y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)| du \right) dy = \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

e quindi $f * g$ è integrabile.

Sia ora $N = 1$ e siano f, g segnali. Allora $f(t) = g(t) = 0$ per ogni $t < 0$ e $g(t - \tau) = 0$ se $\tau > t$. Quindi, nel nostro caso, si ha

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Il teorema sulla trasformata della convoluzione. Siano f, g trasformabili. Allora $f * g$ è trasformabile e si ha

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$$

con $\lambda_{f * g} \leq \max\{\lambda_f, \lambda_g\}$.

Dimostrazione.

Fissiamo $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(s) > \max\{\lambda_f, \lambda_g\}$ e consideriamo la funzione

$$h(t, \tau) = |e^{-st} f(\tau) g(t - \tau)| = |f_1(\tau) g_1(t - \tau)|,$$

avendo psoto $f_1(t) = e^{-st}f(t)$ e $g_1(t) = e^{-st}g(t)$. Le funzioni f_1 e g_1 sono integrabili e quindi, per quanto dimostrato nel teorema precedente, la funzione h è integrabile su $\mathbb{R}^2$. Possiamo ora applicare il teorema di Fubini. Si ottiene, per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \max\{\lambda_f, \lambda_g\}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f * g\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) dt \\ &= \iint_{\Delta} e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(\tau) \left(\int_{\tau}^{+\infty} e^{-st} g(t-\tau) dt \right) d\tau = \star\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\Delta &= \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, +\infty[, 0 \leq \tau \leq t\} \\ &= \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \tau \in [0, +\infty[, \tau \leq t < +\infty\}.\end{aligned}$$

L'ultimo integrale, con il cambio di variabile $\xi = t - \tau$, diventa

$$\star = \int_0^{+\infty} f(\tau) \left(\int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+\xi)} g(\xi) d\xi \right) d\tau = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s).$$

• Esempio. Siano $f(t) = e^t u(t)$ e $g(t) = (1-t) u(t)$. Si ha

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s-1}, \text{ con } \lambda_f = 1,$$

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} = \frac{s-1}{s^2}, \text{ con } \lambda_g = 0.$$

Utilizzando la formula per il prodotto di convoluzione si ottiene

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s-1} \frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s^2}.$$

Si noti che in questo caso $\lambda_{f*g} = 0 < 1 = \max\{\lambda_f, \lambda_g\}$.

Per esercizio calcoliamo esplicitamente il prodotto di convoluzione $f * g$:

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t e^{\tau} (1 - (t-\tau)) d\tau = \int_0^t (e^{\tau} - te^{\tau} + \tau e^{\tau}) d\tau \\ &= [e^{\tau} - te^{\tau} + \tau e^{\tau} - e^{\tau}]_0^t = t u(t).\end{aligned}$$

Come deve essere si ha $\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \frac{1}{s^2}$.

Trasformata di una primitiva. Sia f un segnale trasformabile e sia

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi$$

la primitiva di f che assume il valore $\varphi(0) = 0$. Si osservi che $\varphi = f * u$. Pertanto

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(s) = F(s) \frac{1}{s}.$$

3.3 I teoremi del valore iniziale e finale.

Abbiamo dimostrato che ogni trasformata F di una funzione verifica la proprietà asintotica

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} F(s) = 0.$$

I seguenti risultati forniscono ulteriori informazioni sul comportamento a $+\infty$ e a 0 della trasformata, correlandoli al comportamento a 0 e a $+\infty$ della funzione f . C'è molta confusione in letteratura a proposito e non è facile trovare enunciati precisi e dimostrazioni rigorose. Chiariamo subito che enunciati del tipo

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \quad \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

sono in generale falsi. Intanto deve aver significato considerare il limite per $s \rightarrow 0$, quindi in particolare si deve supporre $\lambda_f \leq 0$. Inoltre può accadere che esista il limite $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ anche se non esiste il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. Si consideri ad esempio la funzione $f(t) = \sin(t) u(t)$.

Il teorema del valore iniziale. Sia f un segnale trasformabile e supponiamo che esista $f'(t)$ per ogni $t > 0$. Supponiamo che la funzione f' sia trasformabile con ascissa di convergenza $\lambda_{f'}$. Supponiamo inoltre che esista il limite $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$. Allora esiste il limite $\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} sF(s)$ e si ha

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t).$$

Dimostrazione. Per il teorema sulla trasformata della derivata sappiamo che

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0^+).$$

Per la proprietà asintotica della trasformata di f' , si ha

$$0 = \lim_{Re(s) \rightarrow +\infty} \mathcal{L}\{f'\}(s) = \lim_{Re(s) \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0^+),$$

da cui

$$\lim_{Re(s) \rightarrow +\infty} s F(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t).$$

Il teorema del valore finale. In quanto segue denotiamo con $\lim_{s \rightarrow 0^+} h(s)$ il limite della funzione $h(s)$ ristretta al semipiano $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$.

Sia f un segnale trasformabile con ascissa di convergenza λ_f e supponiamo che esista $f'(t)$ per ogni $t > 0$. Supponiamo che la funzione f' sia trasformabile con ascissa di convergenza $\lambda_{f'}$ e che esista finito il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Allora $\lambda_f \leq 0$, $\lambda_{f'} \leq 0$, la funzione f' è integrabile su $[0, +\infty[$, esiste il limite $\lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot F(s)$ e si ha

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot F(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

Dimostrazione. Si osservi che $\lambda_f \leq 0$. Infatti, poiché esiste finito il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$, per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > 0$ la funzione $e^{-st} f(t)$ è integrabile su $[0, +\infty[$. Ripercorrendo la dimostrazione del teorema sulla trasformata della derivata scriviamo, per $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \max\{\lambda_{f'}, 0\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(s) &= \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_0^1 f'(t) e^{-st} dt + \int_1^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0^+} f(a) + s \mathcal{L}\{f\}(s) + \lim_{b \rightarrow +\infty} f(b) e^{-sb}. \end{aligned}$$

Poiché esiste finito il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$, si ha $\lim_{b \rightarrow +\infty} f(b) e^{-sb} = 0$, e quindi esiste finito il limite

$$f(0^+) = \lim_{a \rightarrow 0^+} f(a) = s \mathcal{L}\{f\}(s) - \mathcal{L}\{f'\}(s).$$

Poiché esistono entrambi i limiti $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ si può pertanto calcolare

$$\int_0^{+\infty} f'(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f'(t) dt + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0^+),$$

quindi la funzione f' è integrabile e $\lambda_{f'} \leq 0$. Per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) \geq 0$, e per ogni $t > 0$ si ha

$$|e^{-st} f'(t)| \leq |f'(t)|.$$

Pertanto si può applicare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue e concludere che

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{s \rightarrow 0^+} (e^{-st} f'(t)) dt = f(+\infty) - f(0^+). \quad (3)$$

Per il teorema sulla trasformata della derivata sappiamo che, per ogni $s \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re}(s) > 0$, si ha

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0^+). \quad (4)$$

Combinando le due equazioni (3) e (4) si ottiene infine

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot F(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

3.4 Esempi: seno integrale e seno cardinale.

Consideriamo alcuni esempi interessanti.

- Si consideri la funzione

$$f(t) := \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{se } t > 0, \\ 1 & \text{se } t = 0, \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

La funzione f è chiaramente trasformabile con $\lambda_f = 0$. Infatti, f è limitata ma non integrabile secondo Lebesgue su $[0, +\infty[$. Si vuole calcolare la trasformata $F(s)$ di $f(t)$. Per la formula della derivata della trasformata si ha

$$F'(s) = -\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\}(s) = -\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t) u(t)\}(s) = -\frac{1}{1+s^2}.$$

Si consideri $x \in \mathbb{R}^+$ e si integri tra 0 e x ; si ottiene allora

$$F(x) - F(0) = -\int_0^x \frac{1}{1+\xi^2} d\xi = -\operatorname{arctg}(x).$$

Per la proprietà asintotica delle trasformate si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ e quindi $-F(0) = -\frac{\pi}{2}$ da cui $\mathcal{L}\{f(t)\}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan} x$, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. Per l'unicità del prolungamento analitico si ha in effetti $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan} s$, per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(s) > 0$.

- Si consideri la funzione $\operatorname{senc}(t) = f(\pi t)$. Per la proprietà del cambiamento di scala si ha

$$\mathcal{L}\{\operatorname{senc}(t)\}(s) = \frac{1}{\pi} \mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{s}{\pi}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctan}\left(\frac{s}{\pi}\right).$$

- Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione seno integrale

$$\text{Si}(t) = \left(\int_0^t \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau \right) u(t).$$

Si ha

$$\mathcal{L}\{\text{Si}(t)\}(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s) \right).$$

- Si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(t)}{t} dt.$$

L'integrale cercato è $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Si}(t)$. Sappiamo che questo limite esiste perché la funzione $\frac{\text{sen}(t)}{t}$ è integrabile secondo Riemann su $[0, +\infty[$. Possiamo quindi utilizzare il teorema del valore finale e otteniamo, posto $F(s) = \mathcal{L}\{\text{Si}(t)\}(s)$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(t)}{t} dt = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan s \right) = \frac{\pi}{2}.$$

4 Antitrasformate.

Si consideri la funzione $F(s) = \frac{2}{s^2+9}$. Ci chiediamo se esiste una funzione f tale che $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ per opportuni valori di s . In questo caso è facile rispondere. Infatti si può scrivere

$$F(s) = \frac{2}{s^2+9} = \frac{2}{3} \frac{3}{s^2+9},$$

e quindi, ricordando la formula della trasformata della funzione seno, si ottiene $f(t) = \frac{2}{3} \text{sen}(3t)$. Un po' meno immediato è trovare una funzione f che soddisfi $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{3s+1}{s^2+4}$. Un rapido calcolo mostra comunque che si può scrivere

$$F(s) = \frac{3s+1}{s^2+4} = 3 \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2} \frac{2}{s^2+4},$$

da cui

$$f(t) = 3 \cos(2t) + \frac{1}{2} \text{sen}(2t).$$

Una funzione f tale che $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ si dice un'*antitrasformata* di F . È chiaro che non sempre è possibile trovare un'antitrasformata. Ad esempio, la funzione $F(s) = |s|$ non ammette alcuna antitrasformata perché ogni trasformata è una funzione analitica. Anche la funzione $F(s) = e^s$ non

può avere antitrasformata per il teorema sul comportamento asintotico delle trasformate.

Inoltre, non è lecito dire “la antitrasformata”, perché questa non è unica. Infatti, se f è un’antitrasformata di F , ogni funzione g che differisce da f su un insieme di misura nulla avrà la stessa trasformata.

Quindi, l’operatore $\mathcal{L}$, considerato come funzione definita sui segnali f e a valori nell’insieme delle funzioni F definite su semipiani di $\mathbb{C}$ non è né iniettivo né suriettivo, e quindi è lontano dall’essere invertibile. Potremmo però restringere il codominio di $\mathcal{L}$ al suo insieme immagine (cioè alle funzioni F che sono trasformate di funzioni f) e introdurre una relazione di equivalenza nel dominio di $\mathcal{L}$ considerando due funzioni uguali se differiscono su un insieme di misura nulla. In questo modo c’è la speranza che l’operatore diventi invertibile. Vale a proposito il seguente risultato.

4.1 Il teorema di inversione.

Siano f, g trasformabili e tali che $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$. Allora $f(t) = g(t)$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$, cioè l’insieme $E = \{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq g(t)\}$ ha misura nulla. In particolare, se f e g sono continue su $\mathbb{R}$ a meno di un insieme discreto di punti, dove sono presenti discontinuità di tipo salto (cioè esistono finiti i limiti da destra e da sinistra delle funzioni), allora, se $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$, si ha $f = g$.

Grazie al teorema appena enunciato, si può definire l’operatore $\mathcal{L}^{-1}$ come inverso dell’operatore $\mathcal{L}$ ristretto alle funzioni continue a tratti e a valori nell’insieme immagine. Resta in ogni caso poco chiaro, comunque, quale sia il dominio di $\mathcal{L}^{-1}$, anche se è certo che si tratta di un sottoinsieme delle funzioni analitiche definite su semipiani di $\mathbb{C}$ che sono infinitesime per $Re(s) \rightarrow +\infty$.

Calcolare l’antitrasformata di una funzione non è sempre facile. Esiste però un teorema che ci fornisce una formula.

4.2 La formula di Riemann, Fourier, Bromwich, Mellin.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un segnale trasformabile con ascissa di convergenza λ_f , continuo quasi ovunque su $\mathbb{R}$ con al più un insieme discreto di salti. Sia $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \lambda_f$. Allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\alpha - iR}^{\alpha + iR} e^{st} F(s) ds.$$

In particolare, in ogni punto di continuità di f si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} e^{st} F(s) ds.$$

L'integrale viene calcolato sulla retta in $\mathbb{C}$ di equazione $Re(s) = \alpha$. Questa retta si dice *retta di Bromwich*.

Dimostrazione per i punti di continuità. Ricordiamo la relazione tra trasformata di Fourier e trasformata di Laplace.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{F}\{e^{-Re(s)t} f(t) u(t)\}(Im(s)).$$

Ricordiamo inoltre la formula di inversione della trasformata di Fourier;

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{g(t)\}(y) e^{ity} dy.$$

Sia $\alpha > \lambda_f$ e si consideri la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(t) = e^{-\alpha t} f(t) u(t)$. Si ha allora

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} f(t) u(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{e^{-\alpha t} f(t) u(t)\}(y) e^{ity} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(\alpha + iy) e^{iyt} dy \\ &= e^{-\alpha t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha + iy) e^{(\alpha+iy)t} dy \\ &= e^{-\alpha t} \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} e^{st} F(s) ds; \end{aligned}$$

da cui la tesi.

4.3 Scorciatoie nel calcolo delle antitrasformate.

In generale non è semplice applicare la formula di Riemann, Fourier, Bromwich, Mellin. In molti casi si possono combinare le proprietà della trasformata di Laplace con la conoscenza delle trasformate di alcune funzioni principali. Molto utile risulta essere la decomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici.

• Esempio. Sia

$$F(s) = \frac{1}{s+9} e^{-5s}.$$

Si determini l'antitrasformata $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Si ha

$$\mathcal{L}\{u(t)\}(s) = \frac{1}{s}.$$

Per la proprietà di smorzamento

$$\mathcal{L}\{e^{-9t} u(t)\}(s) = \frac{1}{s+9}.$$

Per la proprietà delle traslazioni

$$\mathcal{L}\{e^{-9(t-5)} u(t-5)\}(s) = \frac{1}{s+9} e^{-5s}.$$

Pertanto

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = e^{45} e^{-9t} u(t-5).$$

Si poteva procedere anche in ordine opposto, considerando prima la traslazione e poi lo smorzamento:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t)\}(s) = \frac{1}{s} &\implies \mathcal{L}\{u(t-5)\}(s) = \frac{1}{s} e^{-5s} \\ \implies \mathcal{L}\{e^{-9t} u(t-5)\}(s) &= \frac{1}{s+9} e^{-5(s+9)} = \frac{1}{s+9} e^{-5s} \cdot e^{-45} \\ \implies e^{45} \cdot \mathcal{L}\{e^{-9t} u(t-5)\}(s) &= \frac{1}{s+9} e^{-5s} \implies \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = e^{45} e^{-9t} u(t-5). \end{aligned}$$

• Esempio. Sia

$$F(s) = \frac{3s+1}{s^2+4}.$$

Si determini l'antitrasformata $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Si ha

$$F(s) = 3 \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2} \frac{2}{s^2+4},$$

pertanto

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \left(3 \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t)\right) u(t).$$

• Esempio. Sia

$$F(s) = \frac{1}{s^3+12s^2+36s}.$$

Si determini l'antitrasformata $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Usando la teoria dei residui per calcolare la scomposizione in frazioni semplici della funzione $F(s)$ si ottiene

$$F(s) = \frac{1}{36} \frac{1}{s} - \frac{1}{36} \frac{1}{s+6} - \frac{1}{6} \frac{1}{(s+6)^2},$$

pertanto

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{36}(1 - e^{-6t} - 6te^{-6t})u(t).$$

5 Applicazioni.

La trasformata di Laplace permette di trasformare problemi differenziali in problemi algebrici. Vediamo alcuni esempi di applicazione delle trasformate alla risoluzione di problemi differenziali e integrali.

5.1 Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie.

L'applicazione delle trasformate di Laplace a problemi di equazioni differenziali ordinarie è molto utilizzata ad esempio nella teoria dei controlli, nei sistemi dinamici lineari e nella teoria dei circuiti.

Risposta impulsiva e funzione di trasferimento. Consideriamo il problema di Cauchy lineare omogeneo del secondo ordine a coefficienti costanti

$$\begin{cases} y'' + c_1 y' + c_0 y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

con $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Applicando all'equazione l'operatore $\mathcal{L}$ si ottiene

$$\mathcal{L}\{y''\} + c_1 \mathcal{L}\{y'\} + c_0 \mathcal{L}\{y\} = 0.$$

Per comodità di notazione indichiamo con Y la trasformata della funzione y : $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Per le formule delle derivate si ottiene

$$(s^2 Y - sy(0^+) - y'(0^+)) + c_1(sY - y(0^+)) + c_0 Y = 0.$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali, si ha

$$Y(s^2 + c_1 s + c_0) = 1,$$

cioè

$$Y = \frac{1}{s^2 + c_1 s + c_0}.$$

Poniamo $R(s) = \frac{1}{s^2 + c_1 s + c_0}$ e $r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}(t)$. La funzione $R(s)$ si dice *funzione di trasferimento* del problema e la funzione $r(t)$ viene detta *risposta impulsiva* e rappresenta la soluzione del problema di Cauchy considerato.

In modo del tutto analogo si può considerare un problema di ordine $n \in \mathbb{N}^+$: consideriamo l'operatore differenziale lineare $L : C^n(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$

$$Ly = y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + c_1y' + c_0y,$$

con $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$. Consideriamo il problema di Cauchy lineare omogeneo di ordine n a coefficienti costanti

$$\begin{cases} Ly = 0, \\ y^{(n-2)}(0) = y^{(n-3)}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0, \\ y^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Poniamo

$$R(s) = \frac{1}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0}$$

e $r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}(t)$. La risposta impulsiva $r(t)$ rappresenta allora la soluzione del problema di Cauchy considerato.

- Risposta impulsiva in termini di δ_0 . La funzione $r(t)$ si dice risposta impulsiva del sistema considerato perché può essere pensata come soluzione del problema di Cauchy con termine forzante la distribuzione di Dirac e condizioni iniziali nulle:

$$\begin{cases} Ly = \delta_0 \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = y^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases}$$

Naturalmente, si dovrebbe spiegare che cosa si intende per soluzione di un'equazione differenziale in cui il termine forzante è una distribuzione. Ad ogni modo, se operiamo formalmente con la trasformata di Laplace, si ottiene

$$\mathcal{L}\{Ly\}(s) = \mathcal{L}\{\delta_0\}(s) = 1,$$

da cui

$$Y(s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0) = 1,$$

cioè

$$Y(s) = R(s).$$

Risposta libera. Consideriamo il problema di Cauchy lineare omogeneo di ordine n a coefficienti costanti con condizioni iniziali arbitrarie

$$\begin{cases} Ly = 0, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

con $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ arbitrari. Applicando all'equazione l'operatore $\mathcal{L}$ si ottiene

$$\begin{aligned} & Y s^n - (y_0 s^{n-1} - y_1 s^{n-2} - \dots - y_{n-2} s - y_{n-1}) \\ + & Y c_{n-1} s^{n-1} - c_{n-1} (y_0 s^{n-2} - y_1 s^{n-3} - \dots - y_{n-3} s - y_{n-2}) \\ + & Y c_{n-2} s^{n-2} - c_{n-2} (y_0 s^{n-3} - \dots - y_{n-3}) + \dots + Y c_1 s - c_1 y_0 + Y c_0 = 0 \end{aligned}$$

cioè

$$Y(s) = R(s) \cdot P(s),$$

dove

$$R(s) = \frac{1}{s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_0}$$

è la funzione di trasferimento e $P(s)$ è il polinomio di grado $n - 1$

$$\begin{aligned} P(s) &= s^{n-1} y_0 \\ &+ s^{n-2} (y_1 + c_{n-1} y_0) \\ &+ s^{n-3} (y_2 + c_{n-1} y_1 + c_{n-2} y_0) \\ &+ \dots \\ &+ s (y_{n-2} + c_{n-1} y_{n-3} + c_{n-2} y_{n-4} + \dots + c_2 y_0) \\ &+ (y_{n-1} + c_{n-1} y_{n-2} + c_{n-2} y_{n-3} + \dots + c_2 y_1 + c_1 y_0). \end{aligned}$$

La soluzione $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{R \cdot P\}(t)$ è la *risposta libera*. (Si potrebbe essere tentati a rappresentare y come prodotto di convoluzione della risposta impulsiva r e dell'antitrasformata di P . Questo però non si può fare perché il polinomio P non è antitrasformabile).

Risposta forzata. Consideriamo ora il problema forzato con condizioni iniziali nulle

$$\begin{cases} Ly = f(t), \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = y^{(n-1)}(0) = 0, \end{cases}$$

dove f è un segnale trasformabile (il termine forzante). Applicando all'equazione l'operatore $\mathcal{L}$ si ottiene

$$Y(s) = R(s) \cdot F(s),$$

dove $F = \mathcal{L}\{f\}$ è la trasformata di Laplace di f e R è la funzione di trasferimento. La soluzione $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{R \cdot F\}(t)$ è la *risposta forzata*. Si può rappresentare la soluzione come prodotto di convoluzione

$$y(t) = (r * f)(t),$$

dove r è la risposta impulsiva e f è il termine forzante.

Caso generale. Consideriamo il problema forzato con condizioni iniziali arbitrarie

$$\begin{cases} Ly = f, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

con $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ arbitrari e f termine forzante. Possiamo usare il principio di sovrapposizione per le equazioni lineari e considerare la soluzione come somma della risposta libera e della risposta forzata. Pertanto si ha

$$Y(s) = R(s) \cdot F(s) + R(s) \cdot P(s), \quad y(t) = (r * f)(t) + \mathcal{L}^{-1}\{R \cdot P\}(t).$$

- Esempio. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^t, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace si ottiene

$$(s^2 Y - sy(0^+) - y'(0^+)) + 3(sY - y(0^+)) + 2Y = \frac{1}{s-1},$$

da cui si ottiene

$$Y(s^2 + 3s + 2) = \frac{1}{s-1} + 1,$$

cioè

$$Y = \frac{s}{(s^2 + 3s + 2)(s-1)} = \frac{1}{6} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{2}{3} \frac{1}{s+2}$$

e, antitrasformando,

$$y(t) = \left(\frac{1}{6}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-2t}\right)u(t).$$

• Esempio. Si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \text{ o } t > 2, \\ 1 & \text{se } t \in [0, 1[, \\ -1 & \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0) = 0, x'(0) = 0. \end{cases}$$

Il problema considerato non ha soluzioni in senso classico, perché il termine forzante è una funzione che presenta discontinuità di tipo salto. Possiamo però interpretarlo in senso distribuzionale. Applicando la trasformata di Laplace si ottiene

$$X(s)(s^2 + 1) = F(s),$$

cioè $R(s) = \frac{1}{s^2+1}$, $r(t) = \sin t$ e

$$x(t) = (r * f)(t) = (\sin t * f(t)).$$

In alternativa si può osservare che $f(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$. Si può calcolare $F(s) = \frac{1}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$. La soluzione sarà pertanto

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s(s^2 + 1)}\right\}.$$

Si ha

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1},$$

da cui

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 1)}\right\} = (1 - \cos t)u(t),$$

e quindi

$$x(t) = (1 - \cos t)u(t) - 2(1 - \cos(t-1))u(t-1) + (1 - \cos(t-2))u(t-2).$$

5.2 Applicazioni ai sistemi lineari.

Consideriamo il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti

$$\begin{cases} x' = Ax + f, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Qui $x = x(t)$ è una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice quadrata di ordine n , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Applicando l'operatore trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) = \mathcal{L}\{Ax\}(s) + \mathcal{L}\{f\}(s),$$

si ottiene il sistema algebrico nella variabile $X(s)$

$$sX(s) - x_0 = A \cdot X(s) + F(s).$$

• Esempio. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 4x - 2y, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace si ottiene

$$\begin{cases} sX - 1 = 2Y, \\ sY = 4X - 2Y. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema algebrico otteniamo

$$\begin{cases} X = \frac{\frac{s}{2}+1}{\frac{s^2}{2}+s-4} = \frac{2}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+4} \\ Y = \frac{s}{2} \left(\frac{\frac{2}{3}}{s-3} + \frac{\frac{1}{3}}{s+4} \right) = \frac{2}{3} \frac{1}{s-2} - \frac{2}{3} \frac{1}{s+4}. \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \right) u(t) \\ y(t) &= \left(\frac{2}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-4t} \right) u(t) \end{aligned}$$

5.3 Equazioni integro-differenziali.

Vediamo un esempio di equazione integrale. Si determini un segnale $y(t)$ che soddisfa, per ogni $t > 0$, la relazione

$$y(t) = \cos(t) + \int_0^t (t - \tau) y(\tau) d\tau.$$

Osserviamo che si ha

$$\int_0^t (t - \tau) y(\tau) d\tau = y * tu(t).$$

Applicando l'operatore di Laplace si ottiene quindi

$$\begin{aligned} Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) + \mathcal{L}\{tu(t) * y(t)\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) + \mathcal{L}\{tu(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{y(t)\}(s) \\ &= \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2} Y(s). \end{aligned}$$

Risolvendo in Y si ottiene

$$Y(s) \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

da cui

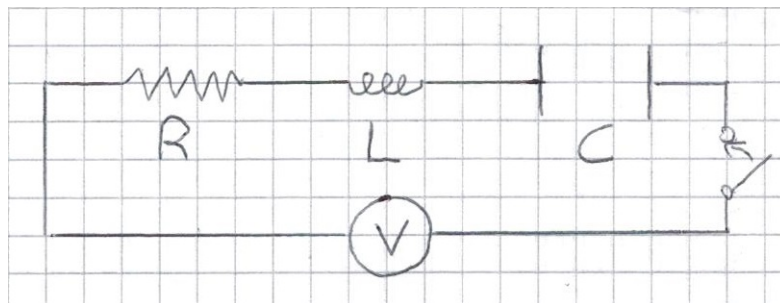
$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \cdot \frac{s^2}{s^2 - 1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{s + i} + \frac{1}{s - i} \right).$$

Antitrasformando si conclude

$$y(t) = \frac{1}{2} (\cosh(t) + \cos(t)) u(t)$$

Naturalmente si poteva risolvere il problema derivando l'equazione e trasformando il problema in un problema differenziale. Tuttavia si osservi che l'equazione integrale ha significato anche se y non è derivabile. Pertanto, operando in questo modo potremmo perdere soluzioni.

Circuiti elettrici. La trasformata di Laplace viene spesso utilizzata nello studio delle equazioni differenziali che descrivono un circuito elettrico. Consideriamo ad esempio il circuito rappresentato in figura definito da resistenza, induttanza e capacità (RLC).



La legge di Kirchhoff delle tensioni afferma che la somma algebrica delle tensioni è nulla, pertanto si ottiene l'equazione

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = v,$$

dove $i(t)$ è la corrente, $q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau$ è la carica del condensatore, $v(t)$ è un generatore di tensione non necessariamente continua. Osservando che $\frac{dq}{dt} = i(t)$, possiamo considerare come funzione incognita la quantità di carica $q(t)$ e risolvere un'equazione differenziale del secondo ordine. Si preferisce tuttavia mantenere l'equazione nella seguente forma integro-differenziale nella variabile i

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{q_0}{C} = v(t).$$

Assumendo che al tempo 0 la corrente sia nulla: $i(0) = 0$, si ottiene, trasformando con Laplace,

$$sLI + RI + \frac{1}{Cs}I + \frac{q_0}{sC} = V(s),$$

e quindi

$$I = \frac{V(s) - \frac{q_0}{sC}}{sL + R + \frac{1}{Cs}}.$$

La funzione

$$T(s) = \frac{1}{sL + R + \frac{1}{Cs}}$$

è detta talvolta ammettenza di trasferimento e dipende soltanto dalle caratteristiche R, L, C del circuito. Si avrà pertanto

$$I(s) = \left(V(s) - \frac{q_0}{sC} \right) \cdot T(s).$$

In particolare, se $q_0 = 0$, si ha

$$i(t) = (v * \mathcal{L}^{-1}\{T\})(t).$$

5.4 Equazioni alle derivate parziali.

Le trasformate di Laplace possono essere utili anche nello studio delle equazioni alle derivate parziali. Sia $n \in \mathbb{N}^+$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $u : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione in $n+1$ variabili reali; chiamiamo x la variabile spaziale e t la variabile temporale. Supponiamo inoltre $u(x, t) = 0$ per ogni $x \in A$ e $t < 0$. Per ogni $x \in A$ fissato, la funzione $u(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è un segnale. Se $u(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è trasformabile con ascissa di convergenza λ_u indipendente da x , si può considerare la trasformata di Laplace $U = \mathcal{L}\{u\}$ della funzione u :

$$U(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}(x, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x, t) dt.$$

La funzione U è definita sull'insieme $A \times E$, dove E è il semipiano di convergenza $E = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \lambda_u\}$. Nello studio delle equazioni differenziali interessa naturalmente sapere come si comporta la trasformata nel confronto delle derivate. Supponiamo che u sia derivabile rispetto alla variabile temporale, e che per ogni $x \in A$ le funzioni $\frac{\partial u}{\partial t}(x, \cdot)$ siano trasformabili secondo Laplace con ascissa di convergenza $\lambda_{\partial_t u}$ indipendente da x e per ogni $x \in A$ esista il limite $u(x, 0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t)$. Si ha allora

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right\}(x, s) = sU(x, s) - u(x, 0^+).$$

Indichiamo ora con D_x un qualunque operatore differenziale che coinvolge le derivate spaziali di u (ad esempio, se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, D_x potrebbe indicare una derivata parziale

$$D_x u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t),$$

un gradiente

$$D_x u(x, t) = \nabla_x u(x, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x, t), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x, t)\right),$$

un laplaciano

$$D_x u(x, t) = \Delta_x u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x, t) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x, t),$$

eccetera). Supponiamo che per ogni $x \in A$ le funzioni $D_x u(x, \cdot)$ siano trasformabili secondo Laplace con ascissa di convergenza $\lambda_{D_x u}$ indipendente da x . Si fissi x e $\lambda > \lambda_{D_x u}$. Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(s) \geq \lambda$, si

ha $|e^{-st}D_x u(x, t)| \leq |e^{-\lambda t}D_x u(x, t)|$. La funzione $e^{-st}D_x u(x, t)$ è pertanto dominata da una funzione integrabile e quindi si può portare il simbolo differenziale fuori dal segno integrale. Si ottiene pertanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{D_x u(x, t)\}(x, s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} D_x u(x, t) dt \\ &= D_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-st} u(x, t) dt \right) = D_x U(x, s).\end{aligned}$$

Esempio: l'equazione del calore in un filo illimitato. Consideriamo il modello che rappresenta la distribuzione del calore $u(x, t)$ al tempo $t \in [0, +\infty[$ su un filo illimitato descritto dalla semiretta $[0, +\infty[$. Imponiamo una condizione iniziale nulla $u(x, 0) = 0$ per ogni $x \in [0, +\infty[$ e le condizioni al contorno $u(0, t) = \varphi(t)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0$ in ogni istante $t \in [0, +\infty[$. Supponiamo che φ sia un segnale trasformabile con ascissa di convergenza φ . Si ottiene il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = \varphi(t), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace si ottiene

$$\begin{cases} sU(x, s) - u(x, 0^+) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, s), \\ U(0, s) = \Phi(s) \\ \mathcal{L}\{\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t)\}(x, s) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $u(x, 0^+) = 0$. Inoltre

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t)\}(x, s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) \right) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x, t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, s),\end{aligned}$$

se è lecito portare il limite fuori dal segno integrale. Possiamo utilizzare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, supponendo che la funzione u soddisfi le condizioni necessarie. Dopo aver determinato la funzione u potremo confermare che il passaggio era legittimo.

Fissiamo $s \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re}(s) > \lambda_\varphi$. Poniamo per comodità di notazione $U(x, s) = z(x)$. Il problema trasformato, con s fissato, diventa

$$\begin{cases} z''(x) = s z(x), \\ z(0) = \Phi(s) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = 0. \end{cases}$$

Si tratta di un problema agli autovalori. Le soluzioni dell'equazione $z''(x) = s z(x)$ sono le funzioni

$$z(x) = \lambda e^{-\sqrt{s}x} + \mu e^{\sqrt{s}x},$$

al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione $\lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = 0$, si ottiene $\mu = 0$, mentre imponendo la condizione $z(0) = \Phi(s)$ si deduce $\lambda = \Phi(s)$. Si ottiene in definitiva, variando s ,

$$U(x, s) = \Phi(s) e^{-\sqrt{s}x}.$$

La soluzione u del nostro problema è quindi esprimibile come

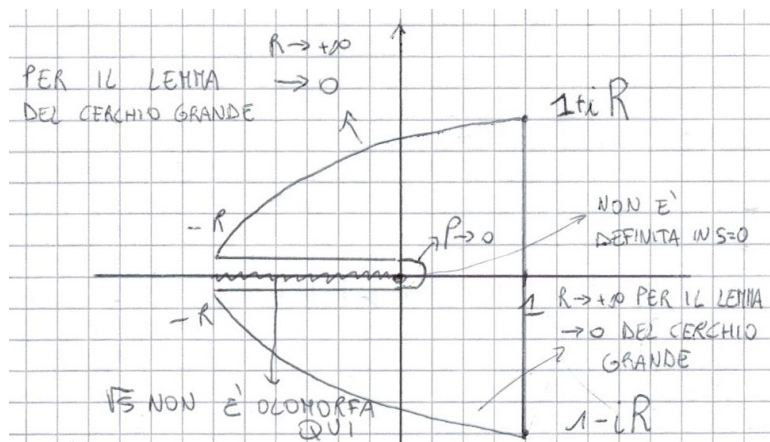
$$u(x, t) = (\varphi * \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}x}\})(x, t).$$

L'antitrasformata della funzione $e^{-\sqrt{s}x}$ si può calcolare utilizzando la formula di Riemann, Fourier, Bronwich, Mellin, scegliendo ad esempio $\alpha = 1$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}x}\}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{1-iR}^{1+iR} e^{st} e^{-\sqrt{s}x} ds.$$

La presenza della radice quadrata rende complicato il calcolo dell'integrale. Si può considerare il circuito rappresentato in figura, che evita la semiretta reale negativa. Utilizzando il lemma del cerchio grande e il lemma del cerchio piccolo, si ottiene dopo qualche calcolo

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}x}\}(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$



La soluzione del problema è pertanto

$$u(x,t) = \varphi * \frac{x}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$