Università di Trieste

Lauree in ingegneria elettronica e informatica e in ingegneria industriale (energia elettrica e dei sistemi)

Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (030IN); parte del corso tenuta dal prof. F. Obersnel
Anno Accademico 2020/2021

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Motivazioni e premesse storiche. Forma cartesiana di un numero complesso. Parte reale e parte immaginaria. Somma e prodotto di numeri complessi. Reciproco di un numero complesso. Proprietà algebriche. Il campo dei numeri complessi. Numeri reali come particolari numeri complessi. Coniugato di un numero complesso. Modulo di un numero complesso. Proprietà del modulo. Piano di Gauss - Argand. Forma polare di un numero complesso. Modulo, argomento e argomento principale di un numero complesso. Notazione esponenziale. Prodotto e potenze di numeri complessi in forma polare: formula di De Moivre. Interpretazione del prodotto come rotazione nel piano di Gauss. Forma matriciale di un numero complesso. Soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^n = w$: radici $n-$esime di un numero complesso. Metrica e topologia in $\mathbb{C}$: palla aperta $B(z_0, r)$, intorno di un punto, punti interni, punti di frontiera, punti di accumulazione di un insieme, insieme aperto, insieme chiuso, chiusura di un insieme, insiemi limitati. Insiemi compatti. Caratterizzazione dei compatti come chiusi e limitati. Successioni di numeri complessi. Limite di una successione. Piano complesso esteso e cenni alla sfera di Riemann. Intorno di ∞. Serie di numeri complessi. Somma di una serie. Relazione tra convergenza di una successione/serie e delle rispettive successioni/serie delle parti reali e immaginarie. Serie assolutamente convergenti.

Funzioni complesse di variabile complessa. Parte reale e parte immaginaria di una funzione f. Interpretazione di una $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ come mappa di $\mathbb{R}^2$. Esempi: traslazioni, rotazioni, riflessioni. Limite finito e infinito per $z \to z_0$ o per $z \to \infty$ di una funzione. Funzioni continue. Teorema sul limite delle componenti. Teoremi di continuità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta. Curve parametriche in $\mathbb{C}$. Insiemi connessi (per archi). Teorema di connessione. Teorema di Weierstrass. Continuità delle funzioni razionali. La funzione argomento principale. La funzione radice $n-$esima (determinazione principale). Funzione derivabile in un punto. Teoremi di derivabilità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta. Teorema di continuità di una funzione derivabile. Condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann. Derivata e condizioni di Cauchy-Riemann in forma polare.

Introduzione all'integrale di Lebesgue. Alcune motivazioni: la misura di Peano - Jordan non è numerabilmente additiva, esistono insiemi compatti o aperti non PJ-misurabili, limiti di funzioni integrabili uniformemente limitate possono non essere integrabili, il problema del passaggio del limite sotto il segno integrale. L'esempio della funzione di Dirichlet. Insiemi di misura nulla secondo Peano - Jordan e secondo Lebesgue. L'esempio dell'insieme di Dirichlet. Ogni insieme numerabile è di misura nulla secondo Lebesgue. Proprietà verificate quasi ovunque. Insiemi quasi ovunque disgiunti. Funzioni a scala. Integrale di una funzione a scala. Combinazioni lineari e modulo di funzioni a scala sono funzioni a scala. Successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Spazi metrici completi. Lo spazio delle funzioni a scala con la norma $\| \cdot \|_1$. Funzioni integrabili e misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Integrale di Lebesgue. Indipendenza dalla scelta della successione approssimante (solo enunciato). Integrabliità di f e $|f|$. Insiemi misurabili secondo Lebesgue. Misura di Lebesgue. Funzioni integrabili e misurabili secondo Lebesgue su un insieme misurabile. Funzioni limitate integrabili secondo Riemann su un insieme limitato sono integrabili secondo Lebesgue e gli integrali coincidono (cenni di dimostrazione). Integrali di funzioni quasi ovunque uguali. Lo spazio $L^1(E)$. $L^1(E)$ è uno spazio di Banach (solo enunciato). Convergenza nella metrica di L^1 ed esistenza di sottosuccesioni q.o. convergenti (solo enunciato). Lo spazio $L^2(E)$. Prodotto scalare (hermitiano) in $L^2(E)$; $L^2(E)$ è uno spazio di Hilbert (solo enunciato). Ortogonalità di funzioni in $L^2(E)$. Lo spazio $L^p(E)$. Funzioni essenzialmente limitate. Estremo superiore essenziale. Lo spazio $L^\infty(E)$. Relazione di inclusione tra gli spazi L^p. Il teorema di convergenza dominata di Lebesgue. Funzioni misurabili limitate da una funzione integrabile sono integrabili.

Funzioni olomorfe. Le condizioni di Cauchy-Riemann non sono sufficienti per la derivabilità. Teorema di caratterizzazione delle funzioni derivabili (solo enunciato). Funzioni olomorfe. Funzioni intere. Un esempio di una funzione derivabile in un punto non olomorfa. Serie di potenze. Lemma di Abel, disco e raggio di convergenza. Convergenza uniforme. Derivazione e integrazione a termine a termine. Funzioni analitiche. Funzione esponenziale, funzioni circolari e funzioni iperboliche definite come serie. Proprietà principali della funzione esponenziale. Proprietà principali delle funzioni circolari e delle funzioni iperboliche, formule di addizione, parti reale e immaginaria delle funzioni circolari. Equazioni del tipo $\operatorname{sen} z = c$. La funzione logaritmo (determinazione principale) e le sue proprietà.

Integrazione complessa e funzioni analitiche. Curve regolari e regolari a tratti in $\mathbb{C}$. Integrale su una curva derivabile di una funzione complessa. Somma di curve. Curve semplici, curve chiuse. Circuiti (lacci). Teorema della curva chiusa di Jordan (solo enunciato). Interno e esterno di una curva semplice chiusa. Curve equivalenti, orientazione di una curva. Curva $-\gamma$. Proprietà dell'integrale: linearità, additività, integrale sulla curva $-\gamma$, indipendenza dalla parametrizzazione equiversa, formula di stima del modulo dell'integrale. Passaggio del limite nell'integrale in caso di convergenza dominata o convergenza uniforme. Primitive e funzioni primitivabili. Funzioni localmente primitivabili. Formula di Torricelli-Barrow in $\mathbb{C}$. Circuitazione (integrale su una curva chiusa) di una funzione primitivabile. La funzione $\frac{1}{z}$ non è primitivabile sul suo dominio ma è localmente primitivabile. Teorema di Cauchy (dimostrazione per funzioni C^1 e curve regolari a tratti). Il teorema dei due circuiti. Formula integrale di Cauchy per una funzione e teorema della media. Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe. Formule integrali di Cauchy per le derivate. Teorema di Morera. Il teorema di caratterizzazione delle funzioni primitivabili. Aperti semplicemente connessi. Disuguaglianze di Cauchy. Teorema di Liouville. Il Teorema Fondamentale dell'Algebra. Il principio di massimo per le funzioni olomorfe (solo enunciato). Molteplicità di uno zero di una funzione analitica. Il teorema sugli zeri di molteplicità infinita. Proprietà degli insiemi degli zeri di una funzione analitica. Il principio di identità per le funzioni analitiche. Prolungamento analitico. Unicità del prolungamento analitico.

Punti singolari di una funzione e teoria dei residui. Punti singolari isolati di una funzione. Classificazione delle singolarità isolate: singolarità eliminabile (definizione, esistenza del limite e del prolungamento analitico), polo di ordine n (definizione, esistenza del limite, caratterizzazione dell'ordine), singolarità essenziale (definizione, non esistenza del limite). Esempio di singolarità essenziale. Teorema di Picard (solo enunciato). Residuo di una funzione in un punto singolare isolato. Formula per il calcolo del residuo per un polo di ordine n. Formula per il calcolo del residuo di funzioni razionali nei poli semplici con utilizzo della derivata del denominatore. Osservazione sui residui nei poli coniugati delle funzioni razionali a coefficienti reali. Serie bilatera. Corona circolare $C(z_0; r_1, r_2)$. Insieme di convergenza di una serie bilatera. Teorema di Laurent. Parte caratteristica (singolare) di una serie bilatera. Classificazione delle singolarità e serie di Laurent. Residuo di una serie di Laurent. Il "metodo dei residui" per il calcolo della parte caratteristica di una serie di Laurent in un intorno forato di un polo di ordine k. Il metodo dei coefficienti indeterminati per il calcolo dei termini di una serie di Laurent. Funzioni razionali: metodo dei residui per la decomposizione in frazioni semplici. Calcolo di integrali con il metodo dei residui. Il teorema dei residui. Integrali del tipo $\int_\gamma f(z)\,dz$. Valor principale (di Cauchy) $PV\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Lemma del grande cerchio, lemma del piccolo cerchio e loro applicazioni. Lemma di Jordan. Applicazioni al calcolo di integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx$ e delle trasformate di Fourier (in particolare della funzione $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$). Integrali del tipo $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ con f funzione di $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$. Le funzioni seno cardinale e integral-seno. Calcolo dell'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. Calcolo degli integrali $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$. Calcolo dell'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3}(1+x)}\,dx$.

Trasformate di Laplace. Funzione di Heaviside. Segnali. Funzioni trasformabili e trasformata di Laplace di un segnale. Funzioni di ordine esponenziale. Linearità della trasformazione. Teorema sul dominio della trasformata. Ascissa, retta, semipiano di convergenza. Relazione tra la trasformata di Laplace e la trasformata di Fourier. Trasformabilità della funzione $t \cdot f(t)$. Teorema di analiticità della trasformata. Derivata $k-$esima della trasformata. Comportamento asintotico della trasformata. Smorzamento, cambiamento di scala e traslazione. Trasformata delle funzioni $\operatorname{sen}(\omega t)$, $\cos(\omega t)$, $\operatorname{senh}(\omega t)$, $\cosh(\omega t)$. Funzioni impulso di durata h e altezza $1/h$, cenni alla distribuzione delta di Dirac δ_0 e alla sua trasformata. La funzione Gamma di Eulero e le sue principali proprietà. Singolarità e residui della funzione Γ. Trasformata delle funzioni t^ω, (in particolare $f(t) = \sqrt{t}$ e $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$). Esempio di trasformata di una funzione definita a tratti. Trasformata di un segnale periodico. Trasformata della derivata. Trasformata della derivata $n-$esima. La formula per funzioni con discontinuità isolate di tipo salto. Prodotto di convoluzione di due funzioni. Il teorema di Fubini per l'integrale di Riemann e per l'integrale di Lebesgue (solo enunciati). Il teorema di Tonelli (solo enunciato). Controesempio al teorema di Tonelli per una funzione non positiva. Esistenza del prodotto di convoluzione di due funzioni integrabili. Integrabilità della convoluzione. Trasformata del prodotto di convoluzione. Trasformata di una primitiva. I teoremi del valore finale e del valore iniziale. Trasformate del seno cardinale e del seno integrale. Il problema della trasformata inversa. Iniettività dell'operatore $\mathcal{L}$ sulle funzioni continue a tratti (solo enunciato). La formula di Bromwich-Mellin / Riemann-Fourier. Scorciatoie per il calcolo dell'antitrasformata. Antitrasformata delle funzioni razionali. Applicazione delle trasformate alle equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti. "Funzione di trasferimento", risposta impulsiva, risposta forzata. Applicazione delle trasformate ai sistemi lineari. Applicazione delle trasformate alla funzioni integrali e integro-differenziali. Applicazioni ai circuiti elettrici. Esempio di applicazione delle trasformate alle equazioni alle derivate parziali; il caso dell'equazione del calore.

Testi consigliati

Appunti sul corso (scaricabile dal sito moodle).

G.C. Barozzi, *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*, Zanichelli, Bologna, 2007.

G. Tironi, Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (scaricabile dal sito).

Alla pagina http://www.dmi.units.it/˜obersnel e alla pagina moodle del corso potete trovare ulteriori informazioni sul corso, gli esercizi assegnati a lezione, esempi di compiti d'esame, appunti.