Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Data una funzione di variabile reale $f(x)$ e un numero complesso a con $\mathrm{Im}(a) > 0$, si consideri l'integrale

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{a}{2\pi i \, (x^2 - a^2)} f(x) \ .$$

I - (4 punti) Considera $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Calcola $I(a)$, e usa il risultato per mostrare che

$$I(a) + I(-a) = \frac{1}{1+a^2} \ .$$

II - (4 punti) Considera $f(x) = \cos(x)$. Calcola $I(a)$, e usa il risultato per mostrare che

$$I(a) + I(-a) = \cos(a) \ .$$

III - (5 punti) Considera una generica funzione pari $f(x) = F(x) + F(-x)$, dove $F(z)$ è una funzione olomorfa su tutto il semipiano superiore $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Assumendo che l'integrale $I(a)$ converga, mostra che con opportune condizioni per il comportamento di $F(z)$ all'infinito vale

$$I(a) = F(a) \ .$$

Quale condizione serve sul comportamento di $F(z)$ all'infinito nel semipiano superiore?

Esercizio 2

È data la seguente equazione integro-differenziale per la funzione $f(t)$

$$\dot{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, G(t-t') f(t') + H(t) \ , \tag{1}$$

dove il punto denota la derivata rispetto a t, e $G(t)$ e $H(t)$ sono funzioni date.

I - (4 punti) Trova la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ di f in funzione delle trasformate $\hat{G}(\omega)$ e $\hat{H}(\omega)$.

II - (6 punti) Considera ora il caso particolare $G(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$ (dove sgn denota la funzione segno che vale $+1$ per t positivi e -1 per t negativi) e $H(t) = \delta(t)$ (ovvero la delta di Dirac). Usa il risultato del punto precedente per scrivere $\hat{f}(\omega)$ in questo caso, e applica l'anti-trasformata per ottenere $f(t)$.

[*Suggerimento:* Ricorda che $\widehat{\mathrm{sgn}}(\omega) = 2i\mathcal{P}\frac{1}{\omega}$.]

Esercizio 3

Data una funzione di variabile reale $f(t)$ considera l'operatore di inversione

$$I[f](t) = \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) \; .$$

I - (5 punti) Mostra che I definisce un operatore lineare da $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$, con la proprietà che $I^2 = \mathbb{1}$ (dove $\mathbb{1}$ indica l'operatore identità). Mostra che I è unitario e autoaggiunto. Usando l'identità $I^2 = \mathbb{1}$, determina i possibili valori per gli autovalori di I.

II - (5 punti) Mostra che I definisce anche un operatore lineare e invertibile che preserva il prodotto scalare da $L^2([0,\ell])$ a $L^2([1/\ell,+\infty])$, dove $\ell > 0$. Usa questo per trovare un sistema ortonormale completo su $L^2([1/\ell,+\infty])$.