Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2020/2021 - 22 febbraio 2021
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato.

Si enunci e si dimostri la formula di Grassmann per due sottospazi vettoriali.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = \mathrm{rg}\, f, \qquad \dim \ker f = 3 - \mathrm{rg}\, f = 1$$

base di $\mathrm{Im} f$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$; equazioni di $\ker f$: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 6y - 5z = 0 \end{cases}$

base di $\ker f$: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

(c) **(1 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(r)$ della retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 &= -t \\ x_2 &= 5t \\ x_3 &= 6t \end{cases}$$

Osservo che $r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \ker f \Rightarrow f(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la dimensione $\dim f(r) = 0$.

(d) **(3 punti)** Si determini il sottoinsieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dove $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow (\tilde{A}|\tilde{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$A \cdot x = b$ è equivalente al sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 6y - 5z = 1 \end{cases}$; la generica soluzione è $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{6}c \\ \frac{1}{6} + \frac{5}{6}c \\ c \end{pmatrix}$

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$p_B(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & -1 & 2 \\ -1 & 1-x & -2 \\ 2 & -2 & -5-x \end{pmatrix} = -x^3 - 3x^2 + 18x = -x(x+6)(x-3)$$

$$Sp(L_B) = \{0, -6, 3\}$$

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{eq.} \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \text{base} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{-6} = \ker \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{eq.} \begin{cases} 7x - y + 2z = 0 \\ 4y - z = 0 \end{cases}, \quad \text{base} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_3 = \ker \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix}, \quad \text{eq.} \begin{cases} -2x - y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, \quad \text{base} \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$$

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 0 & 4/\sqrt{18} & 1/3 \end{pmatrix}, \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{18} & 1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette r e s_a dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$r: \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -t \\ z &= 2 \end{cases} \qquad s_a: \begin{cases} x+y+z &= a \\ x-z &= 0 \end{cases}$$

Per quali valori di a le rette r ed s_a sono parallele, risp. incidenti, risp. sghembe?

Equazioni parametriche di s_a: $\begin{cases} x = z \\ y = a - 2z \\ z = z \end{cases}$; $W_r = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W_{s_a} = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\forall a \in \mathbb{R}$ abbiamo $W_r \neq W_{s_a}$ $\Rightarrow$ non sono mai parallele

Inoltre sono incidenti $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1+t = z \\ -t = a - 2z \\ 2 = z \end{cases}$ è compatibile

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ z = 2 \\ a = 4 - 1 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ r e s_a non sono mai parallele; se $a = 3$ sono incidenti, se $a \neq 3$ sono sghembe

• **(4 punti)** Si determinino delle equazioni cartesiane della retta q passante per il punto $(1,1,1)$ e ortogonale al piano

$$H: \begin{cases} x = & 1-s \\ y = & -2+3t+s \\ z = & -3+t. \end{cases}$$

Eq. cartesiana di H: $\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 3 & 1 & y+2 \\ 1 & 0 & z+3 \end{pmatrix} = 0$, $x + y - 3z = 8$

q è ortogonale a $H \Leftrightarrow W_q = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow q: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1-3t \end{cases}$, eq. cartesiane $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$