Metodi Matematici per l'Ingegneria
Appunti sull'integrale di Lebesgue

Prof. Franco Obersnel, Prof. Andrea Sfecci

28 aprile 2021

Indice

1 Preliminari.

Notazioni. Introuduciamo brevemente alcune notazioni e definizioni che saranno utilizzate nel presente testo.

• $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali. $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\mathbb{R}$ è il campo dei numeri reali, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. $\mathbb{C}$ è il campo dei numeri complessi. Se $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, $x = Re(z)$, $y = Im(z)$, $\overline{z} = x - iy$ è il coniugato di z, $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$ è il modulo di z.

• Insieme quoziente. Sia X un insieme sul quale è definita una relazione di equivalenza $\sim$. Sia $x \in X$; si definisce classe di equivalenza individuata da x l'insieme $[x]$ di tutti gli elementi di X che sono in relazione con x: $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$. L'insieme di tutte le classi di equivalenza individuate da elementi di X si dice insieme quoziente e si denota con il simbolo $\frac{X}{\sim}$. Ad esempio l'insieme delle direzioni nel piano è l'insieme quoziente $\frac{X}{\sim}$ dove X è l'insieme di tutte le rette del piano e $\sim$ è la relazione di parallelismo tra rette. Un altro esempio è l'insieme dei numeri razionali che è l'insieme quoziente $\frac{X}{\sim}$ dove X è l'insieme delle frazioni $X = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ e $\sim$ è la relazione di equivalenza $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ se e solo se $ad = bc$.

• Rettangoli. Per rettangolo $R \subset \mathbb{R}^N$ si intende un prodotto cartesiano di N intervalli limitati I_i (non necessariamente chiusi o aperti) di estremi $a_i < b_i$ ($I_i =]a_i, b_i[$ oppure $I_i = [a_i, b_i[$ oppure $I_i =]a_i, b_i]$ oppure $I_i = [a_i, b_i]$): $R = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$.

• Misure. In quanto segue indichiamo con m_{PJ} la misura di Peano - Jordan, con m_L la misura di Lebesgue, con m la misura standard di un rettangolo di $\mathbb{R}^N$: se R è prodotto cartesiano di N intervalli limitati (non necessariamente chiusi o aperti) di estremi $a_i < b_i$ si pone $m(R) = \prod_{i=1}^{N} \big(b_i - a_i\big)$. Si verifica che su ogni rettangolo R le tre definizioni coincidono:$m_{PJ}(R) = m_L(R) = m(R)$.

• Unione infinita. Sia $\big(E_n\big)_n$ una successione di sottoinsiemi di un insieme X. Si definisce l'unione degli insiemi E_n come segue:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \{x \in X : \text{ esiste } n \in \mathbb{N}^+ \text{ tale che } x \in E_n\}.$$

• Funzione caratteristica. Sia $E \subset X$. Indichiamo con $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ la funzione caratteristica dell'insieme E, definita da

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E\,. \end{cases}$$

• Insieme e funzione di Dirichlet. Poniamo $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. La funzione χ_D è detta funzione di Dirichlet. È il tipico esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

• Spazio metrico. Un insieme su cui è definita una distanza (metrica) d si dice uno spazio metrico. Una distanza è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che verifica le proprietà di positività, non degeneratezza, simmetria, disuguaglianza triangolare:

- ⋆ $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$;
- ⋆ $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- ⋆ $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;
- ⋆ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.

• Successioni di Cauchy. Sia $(x_n)_n$ una successione in uno spazio metrico (X, d). Si dice che la successione è di Cauchy se verifica la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m \geq n_\varepsilon$ si ha $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. È evidente che in ogni spazio metrico se una successione è convergente allora è di Cauchy. In $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$ si dimostra che ogni successione di Cauchy è convergente. Questo non è vero in tutti gli spazi metrici.

• Spazio metrico completo. Uno spazio metrico si dice completo se verifica la proprietà che ogni successione di Cauchy è convergente.

• Spazio normato. Uno spazio vettoriale su cui è definita una norma $\|\cdot\|$ si dice uno spazio normato. Una norma è una funzione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ che verifica le proprietà di positività, non degeneratezza, omogeneità, disuguaglianza triangolare (subadditività):

- ⋆ $\|x\| \geq 0$ per ogni $x \in X$;
- ⋆ $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- ⋆ $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ per ogni $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ (o in $\mathbb{R}$ se lo spazio vettoriale è definito sul campo $\mathbb{R}$);
- ⋆ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni $x, y \in X$.

• Spazio di Banach. Ogni norma su uno spazio vettoriale induce una metrica definita da $d(x, y) = \|x - y\|$. Se lo spazio metrico è completo con questa distanza, si dice che lo spazio normato è di Banach.

• Integrali. La notazione di integrale $\int_E f(x)\,dx$ potrà significare tanto l'integrale di Riemann quanto l'integrale di Lebesgue. Sarà facilmente comprensibile dal contesto di quale integrale si sta parlando. Se l'integrale è definito su un insieme di $\mathbb{R}^2$ in alcuni casi scriveremo $\int_E f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(x,y)\,dxdy$, se si vuole sottolineare il fatto che la funzione è in due variabili (ad esempio nei teoremi di riduzione).

Introduzione. Nei precedenti corsi di analisi matematica è stata introdotta la teoria dell'integrazione *secondo Riemann* e il correlato concetto di *misura di Peano - Jordan*. Tale teoria è relativamente semplice da esporre e, grazie al teorema fondamentale del calcolo e ai teoremi di riduzione, permette un calcolo efficace del valore dell'integrale. Tuttavia presenta alcune problematiche, che vengono in parte superate con l'introduzione dell'integrale di Lebesgue e della misura ad esso correlata. Vediamo alcuni esempi.

• La misura di Peano-Jordan è finito - additiva ma non numerabilmente additiva. Cioè può accadere che per una famiglia di insiemi a due a due disgiunti $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ si abbia

$$m_{PJ}\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\Big) \neq \sum_{n=1}^{+\infty} m_{PJ}(E_n).$$

Si consideri ad esempio un'elencazione numerabile $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ dei numeri razionali dell'intervallo $[0,1]$ e si ponga $E_n = \{q_n\}$. Allora $m_{PJ}(E_n) = 0$ per ogni n; tuttavia l'insieme $D = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ non è misurabile secondo Peano - Jordan.

• Esistono insiemi compatti e insiemi aperti che non sono misurabili secondo Peano - Jordan.

Un esempio di insieme compatto non misurabile secondo Peano - Jordan e di misura positiva secondo Lebesgue può essere costruito in modo ricorsivo con una variante del metodo della trisezione di Cantor; non riportiamo in queste note la costruzione, che si può trovare in molti libri e anche in internet (si cerchi ad esempio "fat Cantor set"). Il complementare di questo insieme è un esempio di aperto non misurabile secondo Peano - Jordan.

• Esistono funzioni non integrabili secondo Riemann che invece sono integrabili secondo Lebesgue. Su un insieme limitato una funzione (limitata) integrabile secondo Riemann è sempre integrabile secondo Lebesgue e i due integrali coincidono. (Attenzione però, questo fatto non è più vero su un insieme illimitato).

Tipico esempio di una funzione integrabile secondo Lebesgue ma non integrabile secondo Riemann è la funzione di Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Un esempio di funzione integrabile secondo Riemann ma non integrabile secondo Lebesgue è la funzione $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen} x$.

• Esistono successioni uniformemente limitate di funzioni integrabili secondo Riemann che convergono a una funzione non integrabile.

Si consideri l'insieme di Dirichlet $D = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ e si definisca $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{\{q_k\}}(x).$$

Ogni funzione f_n è integrabile secondo Riemann con $\int_{[0,1]} f_n(x)\, dx = 0$. Inoltre si ha $0 \leq f_n(x) \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in [0, 1]$. Tuttavia il limite $\lim_{n\to+\infty} f_n$ è la funzione di Dirichlet che non è integrabile.

• Nelle formule di riduzione su un rettangolo del calcolo integrale (teoremi di Fubini) è necessario richiedere l'integrabilità della funzione sul rettangolo e delle funzioni restrizione. Per l'integrale di Lebesgue valgono teoremi molto più generali.

Si consideri ad esempio la funzione caratteristica dell'insieme $D \times \{0\}$ (ricordo che $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$) nel quadrato Q di $\mathbb{R}^2$: $f(x, y) = \chi_{D\times\{0\}} : Q \to \mathbb{R}$. L'insieme $D \times \{0\}$ ha misura nulla secondo Peano - Jordan in $\mathbb{R}^2$, e quindi la funzione f è integrabile secondo Riemann su Q. Tuttavia la sezione $S_0 = \{x \in [0, 1] : (x, y) \in D \times \{0\}\} = D$ non è misurabile in $\mathbb{R}$ e quindi la restrizione $f(x, 0)$ non è integrabile su $[0, 1]$. Esempi più complicati mostrano che una funzione integrabile secondo Riemann può avere quasi tutte le restrizioni non integrabili.

Inoltre se una funzione ha quasi tutte le restrizioni integrabili non possiamo dedurre l'integrabilità dela funzione. Per quanto riguarda l'integrale di Lebesgue la cosa si può invece fare anche se limitatamente alle funzioni di segno costante (questo è l'enunciato del teorema di Tonelli).

• I teoremi di passaggio al limite sotto il segno integrale non funzionano molto bene con l'integrale di Riemann. Persino nel caso in cui vi è convergenza uniforme di una successione di funzioni (su un dominio illimitato) può non essere garantito il passaggio.

Ad esempio si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$. La successione converge uniformemente alla funzione 0, essendo per ogni $x \in \mathbb{R}$ $|f_n(x)| \leq 1/n$. Tuttavia si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \pi \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

2 Insiemi di misura nulla.

Ricordiamo che un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice di misura nulla secondo Peano - Jordan se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un plurirettangolo

$$P = \bigcup_{n=1}^{k} R_n, \text{ tale che } E \subseteq P \text{ e } \sum_{i=n}^{k} m(R_n) < \varepsilon.$$

Per *plurirettangolo* si intende un'unione finita di rettangoli. Supponiamo ora di poter considerare anche unioni numerabili di rettangoli; per evitare confusione diremo $\omega-$plurirettangolo un'unione numerabile di intervalli

$$P = \bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n.$$

• Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice *di misura nulla secondo Lebesgue* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\omega-$plurirettangolo

$$P = \bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n, \text{ tale che } E \subseteq P \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} m(R_n) < \varepsilon.$$

Consideriamo ad esempio l'insieme $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Non è difficile convincersi che D non può avere misura nulla secondo Peano - Jordan. Infatti, se P è un plurirettangolo contenente D si ha $m(P) \geq 1$.

Consideriamo ora l'$\omega-$plurirettangolo così definito: poiché D è un insieme numerabile possiamo scrivere $D = \{q_n : n \in \mathbb{N}^+\}$. Poniamo

$$R_n = [q_i, q_i + \frac{\varepsilon}{2^n}] \text{ e } P = \bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n.$$

Si ha allora

$$D \subset P \text{ e } m(P) = \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

• Osservazione. Ogni insieme di misura nulla secondo Peano - Jordan è di misura nulla secondo Lebesgue.

• Osservazione. Ragionando come nell'esempio dell'insieme D si verifica che ogni insieme numerabile è di misura nulla secondo Lebesgue.

Proprietà verificate quasi ovunque. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e $\mathcal{P}(x)$ una proprietà relativa ad alcuni punti $x \in E$. Diremo che la proprietà $\mathcal{P}$ è verificata quasi ovunque in E (in breve "q.o. in E") se l'insieme $F = \{x \in E : \mathcal{P}(x) \text{ è falso}\}$ è di misura nulla (secondo Lebesgue).

• Esempi:

$\mathcal{P}(x) =$ "x è un numero irrazionale". La proprietà è verificata q.o. in $\mathbb{R}$ (si noti che la cosa non sarebbe vera se considerassimo la misura di Peano - Jordan).

$\mathcal{P}(x, y) =$ "$\operatorname{sen} x \cdot \cos y = 0$" è quasi ovunque falsa in $\mathbb{R}^2$.

"$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$" è quasi ovunque vera in $\mathbb{R}$.

La successione $(f_n)_n$ con $f_n(x) = e^{-nx^2}$ è q.o. convergente a 0 in $\mathbb{R}$ (parleremo in queste situazioni di convergenza puntuale quasi ovunque).

• Diremo che due insiemi A e B sono quasi disgiunti se la loro intersezione è un insieme di misura nulla. Ad esempio gli insiemi $A = [0, 1] \times [0, 1]$ e $B = [0, 1] \times [1, 2]$ sono quasi disgiunti in $\mathbb{R}^2$.

3 Funzioni integrabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

Funzioni a scala. Una funzione $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ si dice *funzione a scala* (o funzione semplice o funzione a gradino) se è esprimibile come combinazione lineare (finita) di funzioni caratteristiche definite su rettangoli a due a due quasi disgiunti, cioè se se esistono un numero finito di rettangoli $R_1, \ldots, R_k$ tali che $m(R_i \cap R_j) = 0$ per ogni $i \neq j$, e delle costanti $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ tali che

$$\varphi(x) = c_1 \chi_{R_1} + c_2 \chi_{R_2} + \ldots c_k \chi_{R_k} .$$

• Osservazione. Una funzione a scala è integrabile secondo Riemann e vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\, dx = \sum_{j=1}^{k} c_j m(R_j)\,.$$

• Osservazione. Una funzione combinazione lineare di funzioni caratteristiche definite su rettangoli, non necessariamente a due a due quasi disgiunti, si può scrivere come combinazione lineare di funzioni caratteristiche definite su rettangoli a due a due quasi disgiunti, e pertanto è una funzione a scala.

• Osservazione. Il modulo di una funzione a scala è una funzione a scala. Una combinazione lineare di funzioni a scala è una funzione a scala. In particolare, se φ_1 e φ_2 sono funzioni a scala, si possono rideterminare gli intervalli che definiscono le due funzioni in modo da scrivere

$$\varphi_1 = c_1\chi_{R_1} + c_2\chi_{R_2} + \dots c_k\chi_{R_k}\,, \quad \varphi_2 = d_1\chi_{R_1} + d_2\chi_{R_2} + \dots d_k\chi_{R_k}\,,$$

e si può allora calcolare l'integrale (formalmente di Riemann, o definibile direttamente come somma finita)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|\, dx = \sum_{j=1}^{k} |c_j - d_j|\, m(R_j).$$

Funzioni integrabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ una funzione. Diremo che f è *integrabile secondo Lebesgue in* $\mathbb{R}^N$ se esiste una successione di funzioni a scala $(\varphi_n)_n$, con $\varphi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, tale che

1. $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad$ q.o. in $\mathbb{R}^N$,
2. $\lim_{m,n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| = 0.$

La condizione 2. è una condizione di Cauchy in forma integrale per la successione $(\varphi)_n$. In particolare, si osservi che

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_m(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)\, dx \Big| \le \int_{\mathbb{R}^N} \big|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\big|\, dx.$$

Pertanto la successione numerica $\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)\, dx \Big)_n$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$ e quindi è convergente. Esiste allora il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)\, dx\,.$$

Si può dimostrare (la dimostrazione è alquanto tecnica e viene omessa) che, se $(\psi_n)_n$ è una successione di funzioni a scala che verifica 1. e 2., allora si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n(x)\, dx \;=\; \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)\, dx\,.$$

Possiamo allora dare la definizione di integrale di Lebesgue come segue.

Integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ una funzione integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ e sia $(\varphi_n)_n$ una successione di funzioni a scala che verifica 1. e 2.. Diremo allora integrale di Lebesgue su $\mathbb{R}^N$ della funzione f il numero

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)\, dx\,.$$

Se una funzione è limite quasi ovunque di una successione di funzioni a scala potrebbe accadere che la condizione 2. non sia verificata; in questo caso la funzione non è integrabile. Tuttavia, una funzione di questo tipo è comunque di interesse e viene detta *misurabile*.

Funzioni misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ una funzione. Diremo che f è *misurabile secondo Lebesgue in* $\mathbb{R}^N$ se esiste una successione di funzioni a scala $(\varphi_n)_n$, con $\varphi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, tale che

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N\,.$$

4 Funzioni integrabili secondo Lebesgue su un insieme misurabile.

Insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Diremo che E è un *insieme misurabile secondo Lebesgue* se la funzione caratteristica χ_E è misurabile in $\mathbb{R}^N$. In questo caso si definisce la misura di Lebesgue m_L di E come segue:

$$m_L(E) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_E(x)\, dx & \text{se } \chi_E \text{ è integrabile in } \mathbb{R}^N, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Funzioni integrabili secondo Lebesgue su un insieme misurabile. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile. Sia $f : E \to \mathbb{C}$ e si definisca $f^* : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ come segue:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Diremo che f è *integrabile secondo Lebesgue su* E se f^* è integrabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^N$. In questo caso diremo integrale di Lebesgue di f su E il numero

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)\,dx\,.$$

In modo simile diremo che $f : E \to \mathbb{C}$ è *misurabile secondo Lebesgue su* E se f^* è misurabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^N$.

Lebesgue e Riemann. Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile (secondo Riemann) limitato e sia $f : E \to \mathbb{C}$ una funzione limitata integrabile secondo Riemann su E. Allora f è integrabile secondo Lebesgue su E e i due integrali coincidono.

Diamo solo un cenno alla dimostrazione. Si consideri un rettangolo R contenente E. Per ogni partizione $\{R_i : i = 1, \ldots, k\}$ di R si può definire la funzione a scala definita da $\varphi(x) = \sum_i \sup_{R_i} f^* \cdot \chi_{R_i}(x)$. Si può in questo modo facilmente costruire una successione di funzioni a scala che verifica le proprietà 1. e 2. della definizione di integrabilità secondo Lebesgue.

Si segnala che nel caso in cui la funzione o il il dominio non siano limitati esistono funzioni integrabili secondo Riemann che non sono integrabili secondo Lebesgue (tipico esempio la funzione $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$).

Tuttavia, se la funzione è di segno costante, anche sui domini illimitati o nel caso la funzione non sia limitata si ha che una funzione integrabile secondo Riemann è anche integrabile secondo Lebesgue.

• Osservazione. Se E è un insieme misurabile secondo Peano - Jordan, E è misurabile secondo Lebesgue e si ha

$$m_L(E) = m_{PJ}(E).$$

Funzioni continue. Ogni funzione continua a tratti e limitata su un insieme misurabile secondo Riemann limitato è integrabile secondo Riemann e quindi per il risultato visto sopra è integrabile secondo Lebesgue.

5 Il teorema di convergenza dominata.

La proprietà principale dell'integrale di Lebesgue che ne rende così versatile l'utilizzo è probabilmente il suo comportamento relativamente alla convergenza delle successioni di funzioni. Esistono diversi importanti risultati in questa direzione (lemma di Fatou, lemma di Beppo Levi,...); noi ci limiteremo a enunciare il più utilizzato, il teorema di convergenza dominata di Lebesgue. Il teorema afferma che se una successione di funzioni puntualmente quasi ovunque convergente è uniformemente "controllata" da una funzione integrabile, allora il limite è integrabile e vale il passaggio del limite sotto il segno integrale.

Teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile. Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni misurabili $f_n : E \to \mathbb{C}$ che converge puntualmente q.o. in E ad una funzione $f : E \to \mathbb{C}$. Esista inoltre una funzione $g : E \to \mathbb{R}$ integrabile e tale che, per ogni n e per quasi ogni $x \in E$, si abbia $|f_n(x)| \leq g(x)$. Allora la funzione f è integrabile su E e si ha

$$\int_E f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\, dx\,.$$

• Esempio. Si calcoli il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\, dx.$$

Consideriamo la successione $(f_n)_n$ con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = e^{-nx^2}$. Si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ puntualmente quasi ovunque (per ogni $x \neq 0$). Si noti che la convergenza non è uniforme. Si ha tuttavia $|f_n(x)| \leq e^{-x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$; la funzione e^{-x^2} è integrabile su $\mathbb{R}$. Possiamo allora applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} e^{-nx^2}\, dx = 0.$$

• Esempio. Si calcoli il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$$

Consideriamo la successione $(f_n)_n$ con $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$. Si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$ puntualmente (non è del tutto evidente se la convergenza è anche uniforme). Possiamo osservare che si ha $|f_n(x)| \le e^{-x}$ per ogni $x \in [0, +\infty[$; la funzione e^{-x} è integrabile sull'intervallo $[0, +\infty[$. Possiamo allora applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx &= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} e^{-x}\,dx = 1.
\end{aligned}$$

• Esempio. Si calcoli il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2}\,dx.$$

Consideriamo la successione $(f_n)_n$ con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = \sqrt{n} e^{-nx^2}$. Si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$. Tuttavia si può calcolare

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2}\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} e^{-(\sqrt{n}x)^2} \sqrt{n}\,dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \lim_{b\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}b}^{\sqrt{n}b} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi},
\end{aligned}$$

mentre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2}\,dx = 0$. In questo caso non vale il teorema del passaggio del limite sotto il segno integrale.

Alcune conseguenze importanti. Elenchiamo di seguito alcune conseguenze importanti del teorema di convergenza dominata.

• Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile e $f : E \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Esista $g : E \to \mathbb{C}$ integrabile tale che $|f(x)| \le g(x)$ q.o. in E. Allora f è integrabile su E. In particolare, se f è misurabile e limitata su un insieme misurabile limitato, f è integrabile.

Infatti basta considerare la successione costante $(f_n)_n$ definita da $f_n(x) = f(x)$ per ogni n.

• Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile e $f : E \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Allora f è integrabile se e solo se $|f|$ è integrabile.

Infatti, se $|f|$ è integrabile, l'osservazione precedente implica immediatamente che f è integrabile. Viceversa, supponiamo f integrabile e sia $\big(\varphi_n\big)_n$ una successione di funzioni a scala che verifica 1. e 2. nella definizione. Non è difficile verificare che la successione $\big(|\varphi_n|\big)_n$ verifica le condizioni 1. e 2. per la funzione $|f|$.
Attenzione! Questa proprietà non vale per l'integrale di Riemann. Si noti che la funzione $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen} x$ è integrabile secondo Riemann mentre la funzione $|f(x)|$ non lo è; in particolare $f(x)$ non è integrabile secondo Lebesgue.

• Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile e $f : E \to \mathbb{C}$ una funzione integrabile. Sia $g : E \to \mathbb{C}$ una funzione che verifica $g(x) = f(x)$ q. o. su E. Allora g è integrabile e si ha

$$\int_E g(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

In particolare, ai fini dell'integrazione, due funzioni si possono identificare se differiscono su un insieme di misura nulla.

6 I teoremi di Fubini e Tonelli.

I teoremi di riduzione per l'integrale di Lebesgue sono più forti degli analoghi teoremi per l'integrale di Riemann. Enunciamo i due importanti teoremi di Fubini e Tonelli.

Teorema di Fubini. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ integrabile, allora
• per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ la restrizione $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile;
• la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da $g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,dy$, è integrabile;
• $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,dy\Big)\,dx;$

simmetricamente si ha inoltre

• per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ la restrizione $f(\cdot, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile;
• la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da $h(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,dx$, è integrabile;
• $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}} h(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,dx\Big)\,dy.$

Si è visto nei preliminari che il teorema così enunciato non vale per l'integrale di Riemann. Esistono infatti funzioni integrabili secondo Riemann che hanno restrizioni non integrabili. Si presti attenzione al fatto che anche per l'integrale di Lebesgue non possiamo ottenere l'integrabilità di tutte le restrizioni (ma solo di quasi tutte).

• Esempio. Si può considerare la funzione $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Si calcola facilmente

$$\iint_{B(0,1)} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \frac{1}{\rho}\,\rho\,d\rho \Big)\,d\vartheta = 2\pi.$$

Tuttavia la sezione $f(x,0) = \frac{1}{|x|}$ non è integrabile su $]-1,1[$.

Il teorema di Fubini richiede l'integrabilità della funzione f. Ci si può domandare se l'integrabliità delle restrizioni è sufficiente a garantire l'integrabilità della funzione f. La risposta è in generale negativa, come testimoniato dal seguente esempio.

• Esempio. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$. Ogni restrizione $f(\cdot,y)$, con $y \neq 0$, è integrabile su $\mathbb{R}$ perché infinitesima di ordine 3 a $\pm\infty$. Inoltre, essendo una funzione dispari, si ha $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = 0$ per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$. Tuttavia la funzione f non è integrabile su $\mathbb{R}^2$, infatti

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\mathbb{R}^2\setminus B_\varepsilon} \frac{|\cos\vartheta|}{\rho^2}\,d\rho d\vartheta = +\infty.$$

Nell'esempio descritto sopra la funzione f cambia segno. Il teorema di Tonelli garantisce che per funzioni di segno costante le cose funzionano bene.

Teorema di Tonelli. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ misurabile tale che $f(x,y) \geq 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ le restrizioni $f(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siano integrabili e che la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$ sia anch'essa integrabile.

Allora la funzione f è integrabile e si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

Naturalmente vale un teorema simmetrico scambiando il ruolo delle variabili.

7 Integrali dipendenti da parametri.

In questa sezione consideriamo le proprietà delle funzioni definite come integrali dipendenti da un parametro. Anche in questo caso il teorema di convergenza dominata di Lebesgue gioca un ruolo centrale.

Teorema di continuità. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $h : E \times I \to \mathbb{C}$ una funzione che soddisfa le proprietà

• $h(\cdot, t) : E \to \mathbb{C}$ è integrabile su E per ogni $t \in I$,

• $h(x, \cdot) : I \to \mathbb{C}$ è continua per quasi ogni $x \in E$,

• esista una funzione integrabile $g : E \to \mathbb{R}$ tale che $|h(x,t)| \leq g(x)$ per ogni $t \in I$ e quasi ogni $x \in E$.

Allora la funzione integrale $H : I \to \mathbb{C}$ definita da $H(t) = \displaystyle\int_E h(x,t)\,dx$ è continua in I.

Infatti, fissato $t_0 \in I$, si consideri una successione $(t_n)_n$ convergente a t_0 e si ponga $h_n(x) = h(x, t_n)$. Si ha $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = h(x, t_0)$ q.o. in E. Le funzioni h_n sono misurabili e dominate dalla funzione integrabile g. Pertanto si conclude che $\lim_{n\to+\infty} \int_E h(x,t_n)\,dx = \int_E h(x,t_0)\,dx$, cioè la funzione H è continua in t_0.

Teorema di derivazione sotto il segno integrale. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $h : E \times I \to \mathbb{C}$ una funzione che soddisfa le proprietà

• $h(\cdot, t) : E \to \mathbb{C}$ è integrabile su E per ogni $t \in I$,

• $h(x, \cdot) : I \to \mathbb{C}$ è derivabile su I per quasi ogni $x \in E$,

• esista una funzione integrabile $g : E \to \mathbb{R}$ tale che $\left|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$ per ogni $t \in I$ e quasi ogni $x \in E$.

Allora la funzione integrale $H : I \to \mathbb{C}$ definita da $H(t) = \displaystyle\int_E h(x,t)\,dx$ è derivabile su I e si ha

$$H'(t) = \int_E \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,dx\,.$$

Infatti, fissato $t_0 \in I$, si consideri una successione $(\delta_n)_n$ convergente a 0 e si ponga

$$\phi_n(x) = \frac{h(x, t_0 + \delta_n) - h(x, t_0)}{\delta_n}.$$

Si ha $\lim_{n\to+\infty} \phi_n(x) = \frac{\partial h}{\partial t}(x,t_0)$ q.o. in E. Le funzioni ϕ_n sono misurabili e, per il teorema del valor medio, per ogni n esiste un t_n appartenente all'intervallo di estremi t_0 e $t_0+\delta_n$ tale che

$$|\phi_n(x)| = \left|\frac{h(x,t_0+\delta_n)-h(x,t_0)}{\delta_n}\right| = |\frac{\partial h}{\partial t}(x,t_n)| \leq g(x),$$

per ogni n e quasi ogni $x \in E$. Pertanto si conclude che

$$H'(t_0) = \lim_{n\to+\infty} \int_E \phi_n(x)\,dx = \int_E \lim_{n\to+\infty} \phi_n(x)\,dx = \int_E \frac{\partial h}{\partial t}(x,t_0)\,dx,$$

cioè la funzione H è derivabile in t_0.

8 Spazi L^p.

Definiamo in questa sezione una classe di spazi di funzioni molto importanti. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile. In quanto segue identificheremo due funzioni $f, g : E \to \mathbb{C}$ se sono uguali quasi ovunque. La definizione può essere formalizzata usando la nozione di insieme quoziente relativamente alla relazione di equivalenza $f \sim g$ se $f(x) = g(x)$ q.o. in E.

8.1 Lo spazio $L^1(E)$.

Denotiamo con $X^1(E)$ l'insieme delle funzioni integrabili su E:

$$X^1(E) = \{f : E \to \mathbb{C} : \ f \text{ è integrabile su } E\ \}\ .$$

Definiamo $L^1(E)$ l'insieme quoziente $\frac{X^1(E)}{\sim}$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza $f \sim g$ se e solo se $f(x) = g(x)$ q.o. su E. Confonderemo un elemento di $L^1(E)$, cioè una classe di equivalenza, con uno qualsiasi dei suoi elementi. Pertanto scriveremo $f \in L^1(E)$ anche se $f \in X^1$.

• $L^1(E)$ è uno spazio vettoriale. Infatti l'insieme $L^1(E)$ è chiuso rispetto alle combinazioni lineari.

• $L^1(E)$ è uno spazio normato.
Definiamo la *norma* L^1 come segue:

$$\|f\|_1 = \int_E |f(x)|\,dx.$$

La funzione $\|\cdot\|_1$ è una norma perché soddisfa le proprietà di positività, non degeneratezza, omogeneità, subadditività:

- $\star$ $\|f\|_1 \geq 0$ per ogni $f \in L^1(E)$;
- $\star$ $\|f\|_1 = 0$ se e solo se $f = 0$ (qui si utilizza l'identificazione $f \sim 0$ se $f(x) = 0$ q.o. in E);
- $\star$ $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$ per ogni $f \in L^1(E)$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$;
- $\star$ $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ per ogni $f, g \in L^1(E)$.

• $L^1(E)$ è uno spazio di Banach.
Ricordiamo che ogni spazio normato con norma $\|\cdot\|$ è anche uno spazio metrico, definendo la distanza $d(f, g) = \|f - g\|$. Uno spazio normato per il quale la metrica indotta è completa, nel senso che ogni successione di Cauchy è convergente, si dice *spazio di Banach*.

Dire che $L^1(E)$ è uno spazio di Banach significa quindi che, se $(f_n)_n$ è una successione di funzioni integrabili su E che verifica

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E |f_{n+p}(x) - f_n(x)|\, dx = 0\,, \qquad \forall p > 0\,,$$

allora esiste una funzione integrabile f a cui la successione converge nella metrica di $L^1(E)$, cioè

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0\,,$$

e in particolare si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx\,.$$

Questo non significa però che la successione sia convergente quasi ovunque su E alla funzione f. Si consideri ad esempio la successione di funzioni $(f_n)_n$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definita come segue:

$f_1(x) = \chi_{[0,1]}(x) = 1$;
$f_2(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$; $f_3(x) = \chi_{[\frac{1}{2},1]}$;
$f_4(x) = \chi_{[0,\frac{1}{3}]}$; $f_5(x) = \chi_{[\frac{1}{2},\frac{1}{3}]}$; $f_6(x) = \chi_{[\frac{1}{3},1]}$;
$\ldots$

Si vede facilmente che $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, dx = 0$. Tuttavia non esiste limite puntuale della successione perché in ogni punto ci sono infiniti indici n in cui la funzione vale 1 e infiniti indici n in cui la funzione vale 0.

Si può comunque provare il risultato seguente.

Teorema di esistenza di una sottosuccessione convergente puntualmente quasi ovunque. Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni integrabili su E che converge nella metrica di $L^1(E)$ a una funzione integrabile f, cioè tale che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\,dx = 0\,.$$

Allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ della successione $(f_n)_n$ che converge quasi ovunque alla funzione f, cioè

$$\lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x) = f(x)\,, \text{q.o. in } E.$$

8.2 Lo spazio $L^2(E)$.

Denotiamo con $L^2(E)$ l'insieme quoziente $\frac{X^2(E)}{\sim}$, dove $X^2(E)$ è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile su E e $\sim$ è la relazione di equivalenza $f\sim g$ se e solo se $f(x)=g(x)$ q.o. su E.

$$L^2(E)=\frac{X^2(E)}{\sim};\qquad X^2(E)=\big\{f:E\to\mathbb{C}\,:\;\; |f|^2 \text{ è integrabile su } E\;\big\}\,.$$

• $L^2(E)$ è uno spazio di Banach. La *norma* L^2 è definita come segue:

$$\|f\|_2=\left(\int_E |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

• Il prodotto scalare in $L^2(E)$. Definiamo sullo spazio $L^2(E)$ un prodotto scalare (hermitiano) come segue:

$$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_2 : L^2(E)\times L^2(E)\to\mathbb{C}\,,$$

$$\langle f\,,\,g\rangle_2=\int_E f(x)\,\overline{g(x)}\,dx\,.$$

(Attenzione: in alcuni testi, soprattutto di fisica, nella definizione si prende il coniugato del primo termine e non del secondo termine.)

La funzione $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_2$ si dice *prodotto scalare* o *prodotto hermitiano* perché verifica le seguenti proprietà:

⋆ $\langle f\,,\,f\rangle_2\geq 0$ per ogni $f\in L^2(E)$. Inoltre $\langle f\,,\,f\rangle_2=0$ se e solo se $f=0$;

⋆ $\langle f\,,\,g\rangle_2=\overline{\langle g\,,\,f\rangle_2}$ per ogni $f,g\in L^2(E)$;

- ⋆ $\langle \lambda f_1 + \mu f_2\,,\, g\rangle_2 = \lambda \langle f_1\,,\, g\rangle_2 + \mu \langle f_2\,,\, g\rangle_2$ per ogni $f_1, f_2, g \in L^2(E)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;
- ⋆ $\langle f\,,\, \lambda g_1 + \mu g_2\rangle_2 = \overline{\lambda} \langle f\,,\, g_1\rangle_2 + \overline{\mu} \langle f\,,\, g_2\rangle_2$ per ogni $f, g_1, g_2 \in L^2(E)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Se in uno spazio vettoriale è definito un prodotto scalare $\langle \cdot\,,\, \cdot\rangle$, si può definire una norma ponendo $\|v\| = \sqrt{\langle v\,,\, v\rangle}$. Nel nostro caso

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f\,,\, f\rangle_2}.$$

Ricordiamo che in ogni spazio vettoriale dotato di prodotto scalare (e quindi di norma) vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Pertanto si ha

$$\langle f\,,\, g\rangle_2 \leq \|f\|_2\, \|g\|_2\,, \quad \forall f, g \in L^2(E)\,.$$

• $L^2(E)$ è uno spazio di Hilbert. Uno spazio di Banach la cui norma è indotta da un prodotto scalare si dice uno spazio di Hilbert.

8.3 Lo spazio $L^\infty(E)$.

Sia $f : E \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Diremo che f è essenzialmente limitata su E se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq M$ per quasi ogni $x \in E$. Denotiamo con $L^\infty(E)$ l'insieme quoziente $\frac{X^\infty(E)}{\sim}$, dove $X^\infty(E)$ è lo spazio delle funzioni essenzialmente limitate su E e $\sim$ è la relazione di equivalenza $f \sim g$ se e solo se $f(x) = g(x)$ q.o. su E.

$$L^\infty(E) = \frac{X^\infty(E)}{\sim};$$

$$X^\infty(E) = \{f : E \to \mathbb{C} : \ f \text{ essenzialmente limitata su } E\ \}\,.$$

• $L^\infty(E)$ è uno spazio di Banach. Diremo *norma* L^∞ l'estremo superiore essenziale di $|f|$, definito come segue:

$$\|f\|_\infty = \operatorname{supess}_E f = \min\{M \,:\, f \leq M \text{ per quasi ogni } x \in E\}\,.$$

Si può verificare che lo spazio $L^\infty(E)$ dotato della norma L^∞ è uno spazio di Banach.

8.4 Gli spazi $L^p(E)$, con $p \in [1, +\infty]$.

In generale si può definire lo spazio $L^p(E)$ per qualunque $p \in [1, +\infty]$. Se $p \in [1, +\infty[$ si pone

$$L^p(E) = \frac{X^p(E)}{\sim}; \qquad X^p(E) = \{ f : E \to \mathbb{C} \ : \ |f|^p \text{ è integrabile su } E \ \}$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza $f \sim g$ se e solo se $f(x) = g(x)$ q.o. su E. La *norma* L^p è definita come segue:

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Gli spazi $L^p(E)$ sono tutti spazi di Banach ma soltanto $L^2(E)$ è uno spazio di Hilbert.

Inclusione tra spazi L^p. Sia E un insieme misurabile di misura finita. Allora si ha

$$L^q(E) \subset L^p(E) \quad \text{ per ogni } p, q \in [1, +\infty], \text{ con } p < q,$$

e l'inclusione tra gli spazi è stretta.

Dimostriamo l'inclusione nei casi $q = \infty, p = 2$ e $q = 2, p = 1$. Sia dunque $f \in L^\infty(E)$. Allora

$$\|f\|_2^2 = \int_E |f(x)|^2 \, dx \leq \int_E \|f\|_\infty{}^2 \, dx \leq \|f\|_\infty{}^2 \cdot m_L(E) < +\infty,$$

e quindi $f \in L^2(E)$.

Sia ora $f \in L^2(E)$. La funzione costante 1 appartiene a $L^2(E)$, quindi si ha, grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\|f\|_1 = \int_E |f| \cdot 1 \, dx = \langle |f| \, , \, 1 \rangle_2 \leq \|f\|_2 \ \|1\|_2 = \|f\|_2 \cdot \sqrt{m_L(E)} < +\infty,$$

e quindi $f \in L^1(E)$.

Esempio. Si consideri la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} & \text{se } x > 0 \, , \\ 0 & \text{se } x = 0 \, . \end{cases}$$

Si ha $f \in L^1([0,1]) \setminus L^2([0,1])$.

Esempio. Si consideri la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{4}} & \text{se } x > 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

Si ha $f \in L^2([0,1]) \setminus L^\infty([0,1])$.

Attenzione! Il teorema non vale se la misura di E è infinita. Si consideri ad esempio la funzione $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^{-1}$. Si ha $f \in L^2([1,+\infty[) \setminus L^1([1,+\infty[)$.

• Si può verificare che, se E ha misura finita e $f \in L^\infty(E)$, si ha

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$