Esame Scritto di Geometria

II appello

9 febbraio 2021

1) Consideriamo i vettori v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ e t_1, t_2, t_3 di $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,0), & v_2 &= (-1,1,1), & v_3 &= (0,1,1) \\ t_1 &= (2,-1), & t_2 &= (1,1), & t_3 &= (3,1). \end{aligned}$$

(a) Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_i) = t_i$, per ogni $i = 1, 2, 3$, e scriverne la matrice rispetto alle basi canoniche.

(b) Trovare $\operatorname{rg} f$, una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$.

(c) Determinare una base per $\mathbb{R}^3$ e una base per $\mathbb{R}^2$ rispetto alle quali la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale ortogonale al vettore $v = (1, -1, 0)$. Determinare una base ortonormale di W. Sia $p_W\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su W; calcolare esplicitamente $p_W(x_1, x_2, x_3)$ e scrivere la sua matrice rispetto alla base canonica. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza p_W.

3) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Trovare una matrice ortogonale speciale $M \in \mathrm{SO}(2)$ e una matrice diagonale $D \in M_2(\mathbb{R})$ tali che $A = {}^t\!MDM$.

(b) Trovare una matrice $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tale che $A = {}^t\!SS$.

4) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, e sia $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo tale che $\operatorname{rg} f = 1$ e $f^2 := f \circ f \neq 0$. Dimostrare che f è diagonalizzabile. Trovare un controesempio nel caso $f^2 = 0$.

5) Sia V uno spazio vettoriale complesso unitario, e sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Siano $\lambda \neq \mu$ autovalori di f. Dimostrare che gli autospazi relativi agli autovalori λ e μ sono ortogonali.