

0.1 Numero dei gradi di libertà dei meccanismi

0.1.1 Sistemi meccanici e meccanismi

Risulta utile introdurre alcune definizioni:

- **MECCANISMO**: sistema meccanico composto da più corpi che hanno la possibilità di moto relativo tra di loro;

- **MEMBRI**: rappresentano i corpi del meccanismo;

- **ACCOPPIAMENTI CINEMATICI** o **COPPIE CINEMATICHE**: elementi che collegano i vari membri e permettono loro di muoversi relativamente (un classico esempio fisico è rappresentato dal cuscinetto a sfere). In altre parole le coppie cinematiche introducono dei vincoli che impediscono ad un membro di muoversi liberamente rispetto ad un altro;

- **GRADI DI LIBERTA'**: numero di coordinate indipendenti necessarie a definire la configurazione di un meccanismo;

- **TELAIO** o **MEMBRO A TELAIIO**: è quel membro del meccanismo che viene considerato fisso (solidale al sistema inerziale, ad esempio la struttura di una macchina, la base di un robot);

- Quando si ha a che fare con un meccanismo con nessun membro a telaio, lo si definisce più propriamente **CATENA CINEMATICA**. Si parla di catena cinematica anche quando ci si riferisce ad una parte del meccanismo.

Per semplificare lo studio cinematico dei meccanismi, nel seguito verranno introdotte due ipotesi:

- 1) I membri del meccanismo sono considerati corpi rigidi;
- 2) Gli accoppiamenti cinematici sono considerati privi di gioco.

0.1.2 Le coppie cinematiche

Tutte le considerazioni che seguono vengono fatte per lo spazio (in alternativa al piano), in cui un corpo rigido ha 6 gradi di libertà. La posizione di un corpo rigido, libero di muoversi, nello spazio è univocamente identificata dalla conoscenza delle 3 coordinate cartesiane di un suo punto rispetto ad un sistema di riferimento e di 3 angoli. Se si pensa ad un velivolo, la sua configurazione nello spazio è data da latitudine, longitudine, quota, **rollio**, **beccheggio** ed **imbardata**. Si ricorda che nel piano un corpo rigido ha 3 gradi di libertà, cioè le due coordinate x ed y e la posizione angolare.

CLASSE della coppia cinematica: rappresenta il numero di gradi di libertà di moto relativo che la coppia cinematica permette tra i due corpi vincolati dalla coppia cinematica stessa.

In parole semplici, pensiamo a due corpi rigidi: il telaio di una bicicletta e la ruota anteriore. Nel momento in cui si collega la ruota alla bicicletta, si introduce un vincolo. Il vincolo è garantito dal cuscinetto che rappresenta la coppia cinematica. Ora, rispetto al telaio, la ruota non è rigidamente vincolata. Può ruotare e per definire la sua posizione è sufficiente un unico parametro: la posizione ancolare. Si dice allora che la classe della coppia cinematica è 1.

La coppia cinematica può permettere rotazioni o traslazioni relative tra due corpi.

Il valore della classe varia tra un minimo di 1 ed un massimo di 5 (nello spazio). Mentre nel piano varia tra un minimo di 1 ed un massimo di 2.

I corpi si scambiano forze o momenti di reazione a causa del vincolo introdotto dalla coppia cinematica. Riprendendo la similitudine della bicicletta, la ruota reagisce alle sollecitazioni esercitando delle forze sulla forcella attraverso il mozzo. Vale anche il viceversa per il principio di azione e reazione, cioè la forcella esercita delle forze agenti sul mozzo della ruota. Questo avviene a causa di un vincolo. Il vincolo può essere pensato come una serie di forze che agiscono in maniera tale che non vi sia distacco tra i due corpi. Indichiamo con n_c = numero di coppie (momenti) e/o forze di reazione vincolare trasmesse da un corpo all'altro attraverso la coppia cinematica. Vale quindi la relazione:

$$n_c + CLASSE = 6 \text{ per meccanismi spaziali}$$

$$n_c + CLASSE = 3 \text{ per meccanismi piani}$$

Le relazioni sono interpretabili e giustificabili in questo modo. Se la classe diminuisce, per definizione diminuisce il numero di gradi di libertà del moto relativo tra i due corpi. Ciò significa che viene introdotto un ulteriore vincolo e tale vincolo è reso possibile grazie all'introduzione di una nuova forza di reazione. Questa forza di reazione fa aumentare il numero n_c . Riassumendo, se diminuisce la classe, deve aumentare il numero delle coppie (o forze).

Per comprendere in dettaglio come agiscono e cosa sono le coppie cinematiche introduciamo altre definizioni:

SUPERFICI CONIUGATE: rappresentano le zone di contatto tra le parti dei due membri che costituiscono la coppia cinematica; possono essere costituite da superfici vere e proprie, linee o punti. Ad esempio, se si pensa ad una bronzina, la quale permette una rotazione tra due corpi rigidi, la superficie coniugata è un cilindro.

L'accoppiamento tra due corpi rigidi può essere di:

-**FORMA:** significa che il vincolo è bilaterale; non è necessaria alcuna forza esterna (oltre a quella del vincolo) per mantenere l'accoppiamento; un esempio è dato dal cuscinetto.

-**FORZA:** è necessaria una forza esterna per mantenere l'accoppiamento. Un esempio è dato da una sfera appoggiata su di un piano che rappresenta una coppia piano-sfera, oppure dalle guide di un tornio.



Figure 1: Guide del carrello di un tornio; accoppiamento di forza

Il carrello può traslare grazie a 2 guide laterali come mostrato in figura. Però non vi è un vincolo altrettanto forte che impedisca al carrello di essere sollevato. Questo non avviene perchè la forza di gravità stessa del carrello lo tiene in posizione.

Andiamo in dettaglio analizzando le coppie cinematiche una ad una:

COPPIA ROTOIDALE (cuscinetto a sfere)

G.d.L. del moto relativo	Forze e Momenti trasmessi	Classe
1 rotazione	3 forze e 2 momenti	1



COPPIA PRISMATICA (guida lineare)

G.d.L. del moto relativo	Forze e Momenti trasmessi	Classe
1 traslazione	2 forze e 3 momenti	1





COPPIA ELICOIDALE

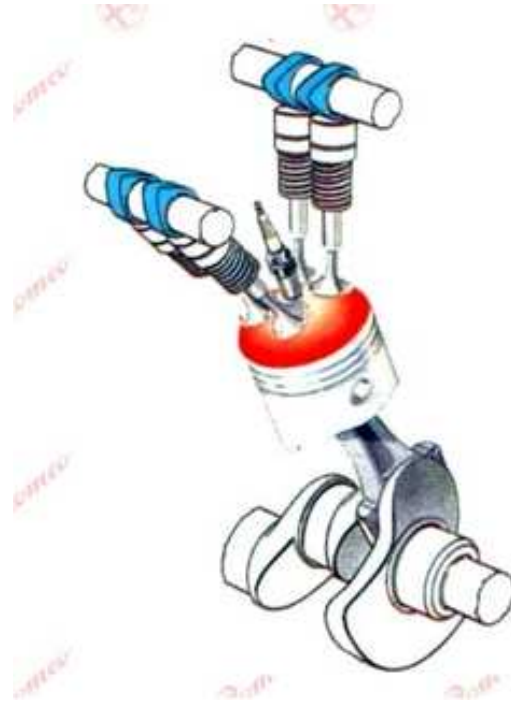
G.d.L. del moto relativo	Forze e Momenti trasmessi	Classe
rotazione e traslazione legate tra di loro 1 GdL	2 forze e 2 momenti 1 forza ed 1 momento interdipendenti	1



In figura è rappresentato un martinetto composto da una vite e da una chiocciola (che non si vede in quanto risulta incassata). Si può vedere il principio di funzionamento di questo accoppiamento nel [video](#). A volte è la chiocciola a ruotare facendo avanzare la vite, altre volte, come nel video, è la vite a ruotare facendo traslare la chiocciola.

CAMMA PIANA

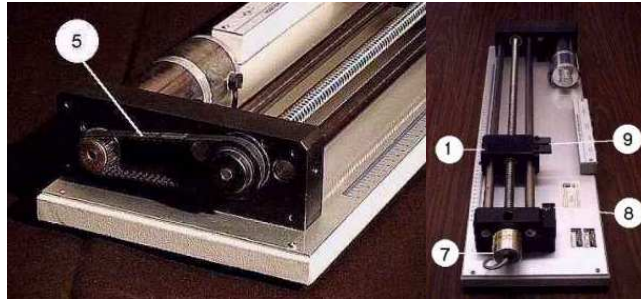
G.d.L. del moto relativo	Forze e Momenti trasmessi	Classe
1 rotazione ed 1 traslazione	2 forze e 2 momenti	2



Nell'esempio in figura la **camma** trasforma il moto rotatorio (dell'albero delle camme) nel moto traslatorio periodico delle valvole.

COPPIA CILINDRICA

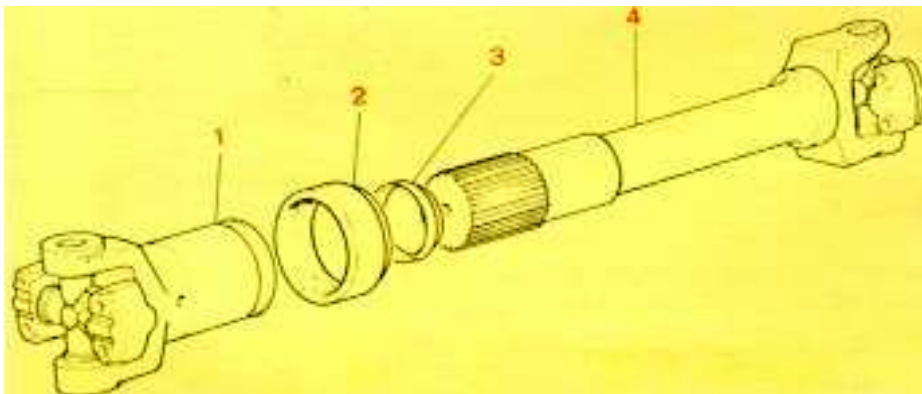
G.d.L. del moto relativo	Forze e Momenti trasmessi	Classe
1 rotazione ed 1 traslazione	2 forze e 2 momenti	2



Nell'esempio in figura vengono usate due guide cilindriche per supportare una slitta movimentata da una vite a ricircolo di sfere.

COPPIA SFERICA GUIDATA (giunto cardanico)

G.d.L. del moto relativo	Forze e Momenti trasmessi	Classe
2 rotazioni	3 forze ed 1 momento	2



COPPIA SFERICA

G.d.L. del moto relativo	Forze e Momenti trasmessi	Classe
3 rotazioni	3 forze	3



0.1.3 Coppie cinematiche nel piano

Si definisce MOTO PIANO il moto di un meccanismo quando tutti i punti dei suoi membri si muovono su piani paralleli.

Ogni corpo libero di muoversi nel piano ha 3 G.d.L.: due traslazioni ed una rotazione.

Nel moto piano le coppie cinematiche si riducono a

COPPIA ROTOIDALE	G.d.L. del moto relativo	Forze e Momenti trasmessi	Classe
	1 rotazione	2 forze	1
COPPIA PRISMATICA	G.d.L. del moto relativo	Forze e Momenti trasmessi	Classe
	1 traslazione	1 forze ed 1 momento	1
CAMMA PIANA	G.d.L. del moto relativo	Forze e Momenti trasmessi	Classe
	1 rotazione ed 1 traslazione	1 forza	2

Nel moto piano si considerano solo le forze trasmesse nel piano ed i momenti (vettoriali) perpendicolari al piano.

0.1.4 Equazioni di struttura

Una equazione di struttura fornisce il numero di gradi di libertà del meccanismo.
Per il caso spaziale vale

$$k = 6(m - 1) - 5 c_1 - 4 c_2 - 3 c_3 - 2 c_4 - c_5$$

dove

k = numero G.d.L. del meccanismo
 m = numero di membri compreso il telaio
 c_1 = numero di coppie cinematiche di classe 1
 c_j = numero di coppie cinematiche di classe j

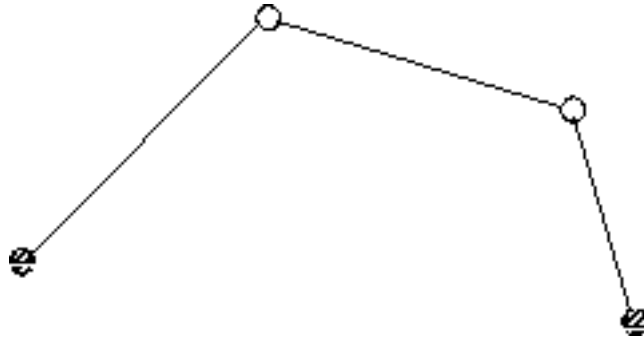
Nel caso di moto piano si ha invece (Equazione di Grübler)

$$n = 3(m - 1) - 2 c_1 - c_2$$

dove

n = numero G.d.L.
 m = numero di membri compreso il telaio
 c_1 = numero di coppie cinematiche di classe 1
 c_2 = numero di coppie cinematiche di classe 2

Esempi:

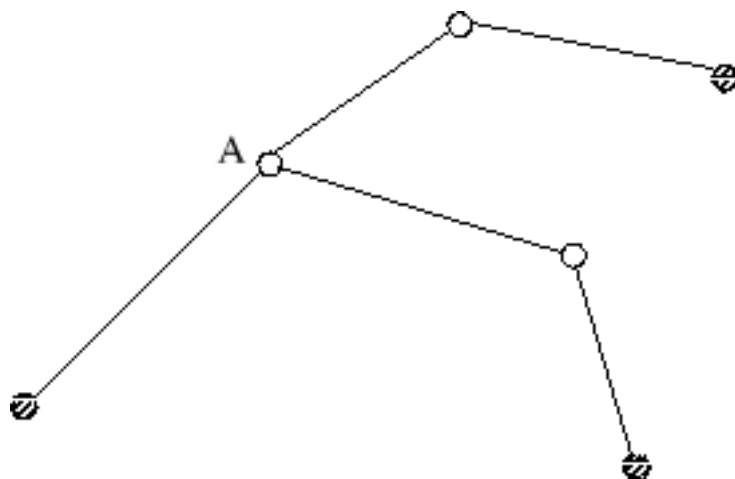


L'esempio riguarda un quadrilatero le cui coppie rotoidali estreme sono fisse al telaio. Tutte le 4 coppie, rappresentate da cerchi bianchi se non fisse al telaio e da cerchi neri se fisse al telaio, sono coppie rotoidali (permettono la rotazione) e quindi di classe 1. L'equazione di struttura fornisce il risultato

$$n = 3(4 - 1) - 2 \times 4 = 1$$

Il meccanismo ha quindi 1 grado di libertà. Infatti è sufficiente definire la posizione di una manovella per identificare univocamente la sua configurazione spaziale.

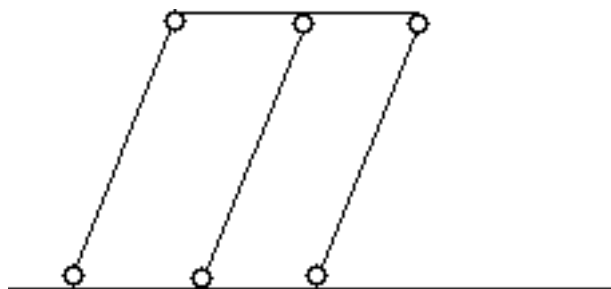
Bisogna fare attenzione quando vi sono coppie rotoidali sovrapposte come nel seguente caso in cui nel punto A vi sono due coppie rotoidali anziché una come potrebbe sembrare.



Il meccanismo ha 3 coppie fisse a telaio. Nel punto A confluiscono 3 aste. Serve un cuscinetto per vincolare una prima asta alla seconda. E serve un ulteriore cuscinetto per vincolare la seconda asta alla terza. per cui nel punto A, anche se si vede un unico cerchietto, sono presenti 2 coppie cinematiche di classe 1. L'equazione di struttura fornisce il seguente risultato

$$n = 3(6 - 1) - 2 \times 7 = 1$$

Un'eccezione nella quale l'equazione di struttura fallisce nel fornire il risultato riguarda la presenza di vincoli sovrabbondanti come nel seguente esempio



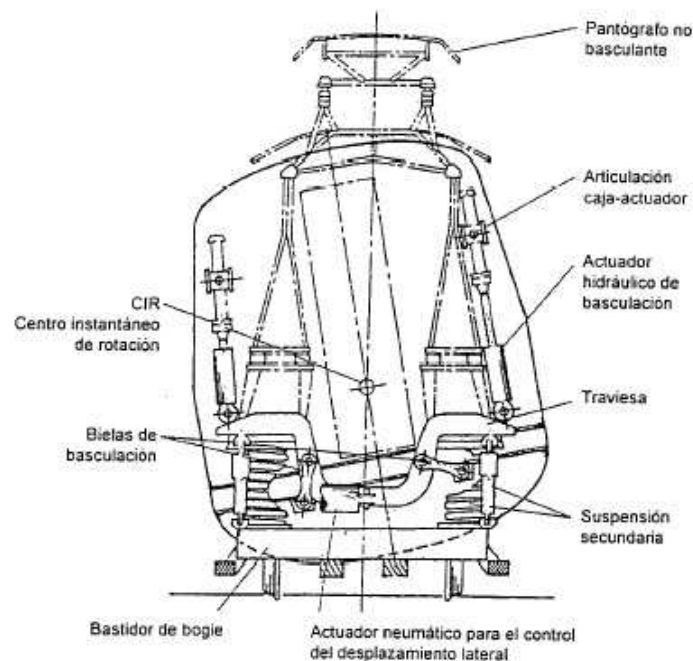
Se non ci si accorgesse che ci sono vincoli sovrabbondanti, il calcolo dei gradi di libertà porterebbe all'errato risultato

$$n = 3(5 - 1) - 2 \times 6 = 0$$

Questo risultato afferma che il sistema non ha gradi di libertà, e che quindi il meccanismo è fermo. In realtà la terza asta a destra, dal punto di vista cinematico, non introduce un vincolo aggiuntivo rispetto a quello già realizzato dalle prime due aste a sinistra. Per questo motivo il meccanismo ha 1 G.d.L.

Passiamo all'analisi di un caso concreto.

ESEMPIO: calcolo dei gradi di libertà del meccanismo cassa oscillante del pendolino. Si tratta di un meccanismo piano se si considera solo il movimento ondulatorio del vagone del treno rispetto all'asse longitudinale. La piattaforma del vagone è collegata con la struttura principale a mezzo di 2 balle con 4 coppie rotoridali.



Il numero dei gradi di libertà è dato da

$$n = 3(m - 1) - 2c_1 - c_2 = 3(4 - 1) - 2 \cdot 4 = 1$$

ESEMPIO: calcolo dei gradi di libertà di una piattaforma di Stewart (robot di tipo parallelo) (meccanismo spaziale). Nell'esempio la [piattaforma di Stewart](#) è applicata ad una [interfaccia aptica](#) con la quale un operatore può interagire.

In questo caso bisogna impiegare l'equazione di struttura per lo spazio, essendo quello in figura un meccanismo spaziale.

Sono presenti 12 coppie cinematiche di tipo sfera-guidata (giunti cardani; classe 2) e 6 coppie cinematiche cilindriche (classe 2). Gli attuatori agiscono su queste ultime.



L'equazione di struttura porta ad avere

$$\begin{aligned} k &= 6(m - 1) - 5c_1 - 4c_2 - 3c_3 - 2c_4 - c_5 = \\ &= 6(14 - 1) - 4 \cdot 18 = 6 \end{aligned}$$

Infatti la mano può disporsi nello spazio con 6 gradi di libertà.