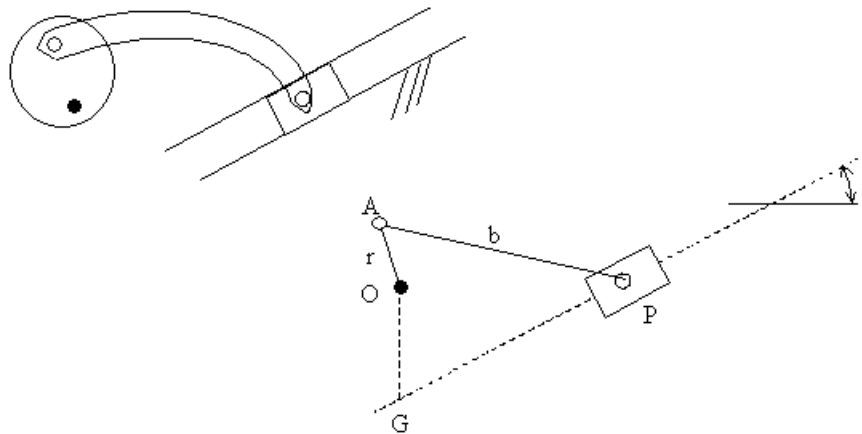


# Capitolo 1

## Analisi cinematica di posizione per meccanismi articolati piani

### 1.1 Definizione dello schema cinematico

Lo SCHEMA CINEMATICO di un meccanismo rappresenta graficamente il meccanismo solamente dal punto di vista cinematico e non funzionale. Consiste in uno schema nel quale sono messe in evidenza solo le geometrie e le dimensioni essenziali, come ad esempio la distanza tra due coppie rotoidali. Il meccanismo in alto a sinistra è equivalente cinematicamente al meccanismo in basso a destra. Notare come il disco che ruota in posizione eccentrica sia assimilabile ad una manovella, nel nostro caso alla manovella OA.



Il disco è imperniato a telaio nel punto indicato con un cerchietto nero. Per cui ruota attorno a quel punto. La biella indicata con “b” è collegata al disco ed al pattino. Pur possedendo essa una forma curva che, con ogni probabilità ha una qualche funzionalità pratica, nel meccanismo equivalente viene rappresentata con un segmento rettilineo che congiunge il punto A al punto P. Infatti, dal punto di vista cinematico, non è importante conoscere la funzionalità di ogni singolo corpo, bensì il movimento relativo che interviene tra i vari corpi interconnessi. Nello schema è stato aggiunto il punto G. E’ un punto fisso a telaio. In alternativa, si poteva scegliere un altro punto lungo l’asse di scorrimento del pattino fisso al telaio. Come sarà esemplificato in seguito, il punto G permette di creare una maglia chiusa utile alla soluzione cinematica del problema

## 1.2 L’equazione di chiusura

Si definiscono MECCANISMI ARTICOLATI PIANI quei meccanismi realizzati con accoppiamenti rotoidali o prismatici.

L’ANALISI CINEMATICA di un meccanismo consiste nello studiarne la posizione (cioè la sua configurazione geometrica o, se vogliamo, la disposizione dei suoi corpi nello spazio) e la sua evoluzione nel tempo.

In particolare si fa spesso riferimento alla cosiddetta ANALISI CINEMATICA DI POSIZIONE.

Tale analisi può essere descritta nel seguente modo.

Assegnati:

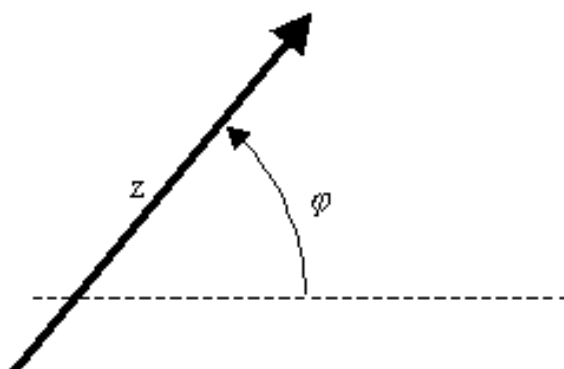
- un meccanismo con un numero  $n$  di gradi libertà;
- $n$  valori delle coordinate indipendenti;

calcolare la posizione di tutti i punti del meccanismo.

Per facilitare l’analisi cinematica di posizione, ad ogni membro del meccanismo può essere associato uno o più VETTORI.

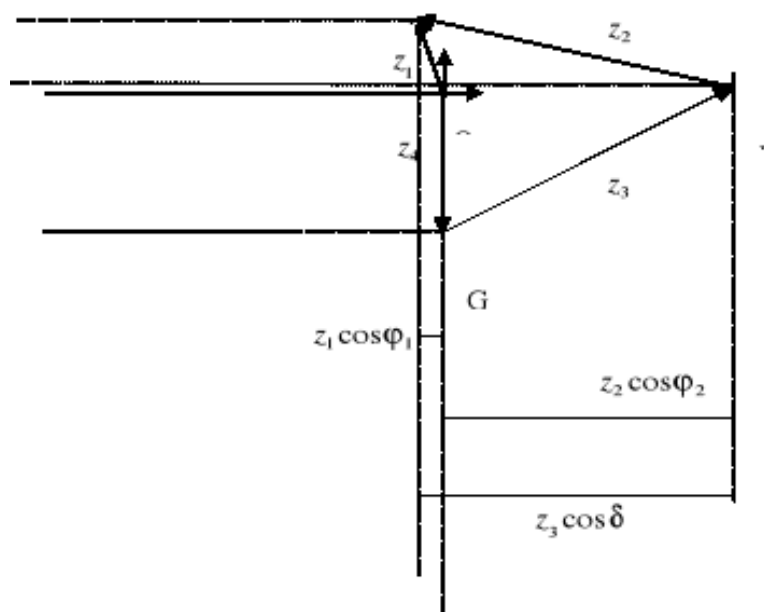
Si introduce quindi un SISTEMA DI RIFERIMENTO assoluto. In altre parole, se si lavora nel piano, introduciamo un’origine ed un sistema di coordinate  $x, y$ .

Solitamente le estremità del vettore congiungono 2 coppie cinematiche consecutive.



Ogni vettore è definito da due parametri: il modulo e la posizione angolare; l'angolo è considerato positivo quando la rotazione avviene in senso antiorario rispetto all'orizzontale (è semplicemente una convenzione che si adotterà d'ora in poi).

Tutti i vettori del meccanismo costituiscono un POLIGONO DI VETTORI. Si possono scegliere i vettori in maniera tale da ottenere un POLIGONO DI VETTORI CHIUSO. Lo schema sottostante si riferisce all'esempio precedente. Notare come l'orientazione dei vettori venga fissata arbitrariamente all'inizio.



Esiste una proprietà che sta alla base del calcolo cinematico: la somma vettoriale dei vettori di un poligono di vettori chiuso è nulla. Per cui vale

$$\vec{z}_1 - \vec{z}_2 - \vec{z}_3 - \vec{z}_4 = 0$$

L'equazione si ottiene nel modo seguente: si sceglie un verso di percorrenza del poligono di vettori (orario od antiorario). Se un vettore ha orientazione concorde con il verso di percorrenza del poligono, esso viene sommato positivamente, altrimenti negativamente. Nell'esempio, il poligono di vettori è stato percorso in senso orario, per cui ai vettori  $\vec{z}_2, \vec{z}_3$  e  $\vec{z}_4$ , che risultano discorsi al senso di percorrenza, viene anteposto il segno negativo.

L'equazione vettoriale può essere ora PROIETTATA sugli assi di riferimento orizzontale e verticale

$$\begin{aligned} z_1 \cos(\varphi_1) - z_2 \cos(\varphi_2) - z_3 \cos(\delta) - z_4 \cos(\varphi_4) &= 0 \\ z_1 \sin(\varphi_1) - z_2 \sin(\varphi_2) - z_3 \sin(\delta) - z_4 \sin(\varphi_4) &= 0 \end{aligned}$$

Quando si proietta, gli angoli sono misurati secondo la convenzione adottata.

L'analisi cinematica prevede che vengano forniti i valori delle coordinate indipendenti. Si fissa un valore dell'unica nostra coordinata indipendente, dato che il sistema è ad 1 grado di libertà:  $\varphi_1$  per esempio. La manovella (che, nell'esempio, è un disco contrato nel punto "O") avente posizione angolare  $\varphi_1$  viene interpretata in tal modo come elemento motore di tutto il sistema.

Nel sistema si possono suddividere le seguenti categorie di dati:

**DATI GEOMETRICI NOTI:**  $z_1, z_2, \delta, z_4, \varphi_4$

I dati geometrici rappresentano quei dati che rimangono costanti nel tempo e che sono dati dalla geometria stessa dei corpi e delle coppie cinematiche coinvolte. Infatti, nell'esempio  $z_1$  e  $z_2$  rappresentano rispettivamente le lunghezze della manovella e della biella.  $\delta$  rappresenta la posizione angolare del pattino rispetto all'orizzontale.  $z_4$  e  $\varphi_4$  rappresentano i parametri che definiscono la posizione del vettore che congiunge un punto dell'asse di scorrimento del pattino al centro di rotazione del disco. Tale vettore è fisso a telaio e quindi i suoi valori sono costanti nel tempo.

**COORDINATA INDIPENDENTE:**  $\varphi_1$

Le coordinate indipendenti rappresentano l'input del problema. Assegnato il loro valore, tutto il resto è calcolabile.

**INCOGNITE:**  $\varphi_2, z_3$

Le incognite sono le variabili che devono essere calcolate per definire in maniera univoca la posizione di tutti i vettori che compongono il meccanismo. In altre parole, data la posizione della manovella, il problema di analisi cinematica consiste nel calcolare la posizione di tutti i vettori che costituiscono il meccanismo.

Il sistema è costituito da 2 EQUAZIONI ALGEBRICHE NON LINEARI in 2 incognite, sistema che, in linea di principio è risolvibile. Il sistema è non lineare in quanto le incognite sono argomenti di funzioni trigonometriche. Ciò comporta che, pur essendoci una soluzione, non sempre è facile calcolarla in forma chiusa. In alcuni casi, è necessario calcolarla per via numerica.

Si supponga comunque di aver risolto il sistema e quindi di aver ottenuto, in un modo o nell'altro, il valore delle variabili  $\varphi_2, z_3$ . Ora qualsiasi coordinata del punto del meccanismo è calcolabile. Per esempio la posizione del punto P (posizione del punto del pattino) rispetto al sistema di riferimento è data da

$$P = \vec{z}_1 - \vec{z}_2 = \begin{Bmatrix} z_1 \cos(\varphi_1) - z_2 \cos(\varphi_2) \\ z_1 \sin(\varphi_1) - z_2 \sin(\varphi_2) \end{Bmatrix}$$

### 1.3 Problema cinematico diretto ed inverso

Introduciamo le seguenti definizioni:

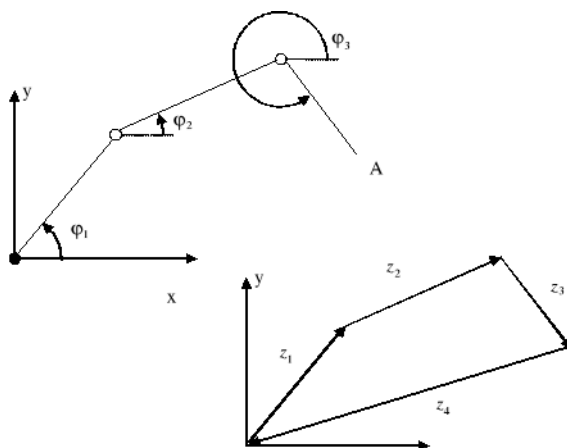
I MECCANISMI IN CATENA APERTA sono quei meccanismi per i quali il poligono dei vettori associati ai corpi che li compongono non è chiuso.

Un tipico esempio è dato dai robot cosiddetti **SERIALI**. Nell'immagine qui sotto, a sinistra, è fotografato un robot seriale. La catena cinematica dei vettori che ne definiscono la posizione parte dalla base e termina nel polso del robot. Vengono invece definiti robot **PARALLELI** quei robot nei quali tutte le catene cinematiche che li compongono si chiudono a "telaio". L'esempio è dato dal simulatore di volo in figura in basso a destra. I robot paralleli vengono impiegati per la loro **rigidezza** e **velocità**. Si intuisce facilmente come qualsiasi catena cinematica che parte da un pistone idraulico che sta alla base si richiude su un altro pistone sempre alla base. Si ha quindi a che fare con un MECCANISMO CON CATENE CHIUSE.



Per quanto riguarda i meccanismi in catena cinematica aperta, l'analisi cinematica può essere di due tipi.

Per focalizzare le idee, come esempio di calcolo, si consideri il seguente robot piano a 3 GdL. Si tratta dello schema di un robot piano che può disporre l'ultimo membro della catena, solitamente chiamato END-EFFECTOR, in qualsiasi punto del piano e con qualsiasi orientazione. L'ultima affermazione vale solamente se la posizione da raggiungere è all'interno dello spazio di lavoro del robot.



**PROBLEMA CINEMATICO DIRETTO:** Assegnate le coordinate libere  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , calcolare le coordinate del punto A

Non serve risolvere un sistema di equazioni (come nel problema cinematico diretto per un meccanismo in catena chiusa). Il risultato è semplicemente dato da

$$A = \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 = \begin{cases} z_1 \cos(\varphi_1) + z_2 \cos(\varphi_2) + z_3 \cos(\varphi_3) \\ z_1 \sin(\varphi_1) + z_2 \sin(\varphi_2) + z_3 \sin(\varphi_3) \end{cases}$$

**PROBLEMA CINEMATICO INVERSO:** Assegnate le coordinate del punto A e l'orientazione dell'ultimo membro 3 (posizione dell'utensile del robot), calcolare il valore delle coordinate indipendenti.

Si introduce il vettore  $z_4 = O-A \Rightarrow z_4 = -A$  per avere un poligono di chiusura. Scriviamo le equazioni vettoriali e proiettiamole lungo le coordinate cartesiane.

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 &= 0 \Rightarrow \\ \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 - A &= 0 \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} z_1 \cos(\varphi_1) + z_2 \cos(\varphi_2) + z_3 \cos(\varphi_3) - x_A \\ z_1 \sin(\varphi_1) + z_2 \sin(\varphi_2) + z_3 \sin(\varphi_3) - y_A \end{array} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Bisogna risolvere un sistema di EQUAZIONI NON LINEARI nelle variabili  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , in quanto le variabili sono argomenti di funzioni seni e coseni. Essendo il sistema composto da due equazioni in 2 incognite esiste una soluzione. Si

vede come generalmente, a causa della non linearità, l'analisi cinematica inversa abbia soluzione meno immediata dell'analisi cinematica diretta.

## 1.4 Poligoni di chiusura a più maglie

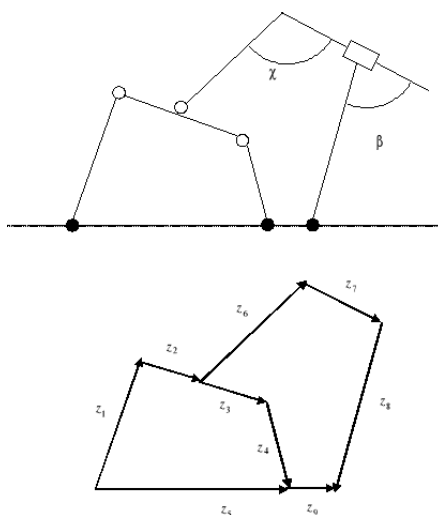
Fin'ora ci siamo occupati di meccanismi ad un'unica maglia. Però meccanismi complessi possono avere PIU' MAGLIE di chiusura.

L'analisi cinematica porta ad una soluzione quando il doppio del numero di maglie indipendenti è pari al numero delle incognite, cioè:

$$\text{numero maglie indipendenti} \times 2 = \text{numero incognite}$$

Viene definita **MAGLIA INDIPENDENTE** ogni maglia la cui equazione vettoriale associata non può essere combinazione lineare delle equazioni vettoriali associate alle altre maglie.

Consideriamo l'esempio in figura



Il meccanismo ha 1 GdL. Scriviamo 2 equazioni di chiusura vettoriali che si

ricavano dal percorrere le due maglie contigue in senso orario

$$\begin{aligned}\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 - \vec{z}_5 &= 0 \\ \vec{z}_6 + \vec{z}_7 + \vec{z}_8 - \vec{z}_9 - \vec{z}_4 - \vec{z}_3 &= 0\end{aligned}$$

$\implies$

$$\begin{aligned}z_1 \cos(\varphi_1) + z_2 \cos(\varphi_2) + z_3 \cos(\varphi_3) + z_4 \cos(\varphi_4) - z_5 \cos(\varphi_5) &= 0 \\ z_1 \sin(\varphi_1) + z_2 \sin(\varphi_2) + z_3 \sin(\varphi_3) + z_4 \sin(\varphi_4) - z_5 \sin(\varphi_5) &= 0 \\ z_6 \cos(\varphi_6) + z_7 \cos(\varphi_7) + z_8 \cos(\varphi_8) - z_9 \cos(\varphi_9) - z_4 \cos(\varphi_4) - z_3 \cos(\varphi_3) &= 0 \\ z_6 \sin(\varphi_6) + z_7 \sin(\varphi_7) + z_8 \sin(\varphi_8) - z_9 \sin(\varphi_9) - z_4 \sin(\varphi_4) - z_3 \sin(\varphi_3) &= 0\end{aligned}$$

Le due equazioni vettoriali, una volta proiettate, hanno portato ad un sistema scalare composto da 4 equazioni.

Si fissa una coordinata indipendente,  $\varphi_1$ , che assume quindi il significato di elemento motore del meccanismo

Per questioni geometrico, valgono le seguenti relazioni tra gli angoli coinvolti nel sistema:

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \varphi_2 \\ \varphi_7 &= \varphi_6 + \pi + \chi \\ \varphi_8 &= \varphi_7 - \beta = \varphi_6 + \pi + \chi - \beta \\ \varphi_5 &= 0 \\ \varphi_9 &= 0\end{aligned}$$

Dati geometrici noti sono  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_8, z_9, \chi$  e  $\beta$

Rimangono le 4cognite:  $\varphi_2, \varphi_4, \varphi_6$  e  $z_7$

Ancora una volta si ha a che fare con un sistema di 4 equazioni in 4 incognite, perciò risolvibile.

Non tutte le maglie scrivibili rappresentano equazioni linearmente indipendenti. Ad esempio la maglia esterna la cui equazione di chiusura è  $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_6 + \vec{z}_7 + \vec{z}_8 - \vec{z}_9 - \vec{z}_5 = 0$  si ottiene come somma delle precedenti.

### 1.4.1 Metodo numerico di soluzione dell'equazione di chiusura di posizione

La soluzione delle equazioni di un sistema non lineare possono essere:

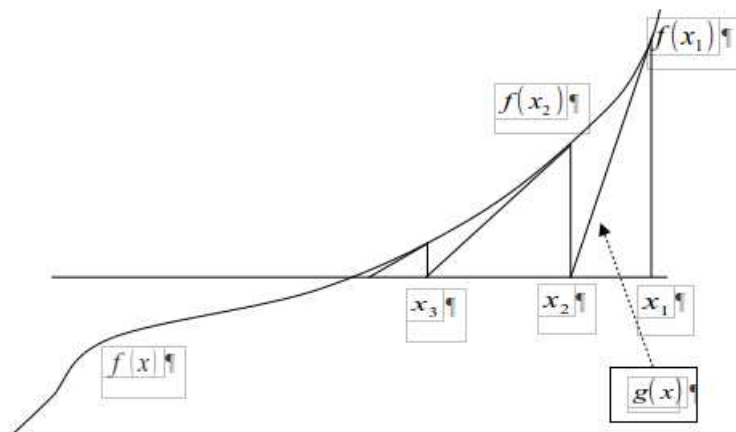
UNICHE

MOLTEPLICI

NON ESISTERE



Un metodo numerico usato per la soluzione del sistema è il metodo di NEWTON-RAPHSON



Consideriamo prima il caso di una unica equazione non lineare scalare rappresentata dalla curva generica in figura.

Obiettivo dell'analisi è quello di trovare lo zero della funzione  $f(x)$

$$f(x) = 0$$

Si parte da un punto qualsiasi  $x_1$  di primo tentativo.

Se  $f(x_1) = 0$  allora  $x_1$  è già la soluzione cercata, altrimenti si prosegue.

Si trova lo zero della retta tangente ad  $f(x)$  nel punto  $x_1$ . Tale retta è data dallo SVILUPPO DI TAYLOR di  $f(x)$  troncato al termine lineare (vedi figura)

$$g(x) = f(x_1) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_1} (x - x_1)$$

Lo zero di tale retta ( $g(x) = 0$ ) è

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_1}} f(x_1)$$

Consideriamo ora la retta tangente ad  $f(x)$  nel nuovo punto  $x_2 = x_1 - \frac{1}{\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_1}} f(x_1)$ . Da qui si trova una nuova retta tangente, se ne calcola lo zero e così via.

In generale l'iterazione è

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i}} f(x_i) \quad (1.1)$$

Si può facilmente notare come gli zeri delle successive rette tangenti  $x_i$  convergano alla soluzione cercata.

Il procedimento terminerà nel momento in cui is raggiungerà la condizione per il TERMINE DELL'ITERAZIONE

$$x_{i+1} - x_i < \varepsilon$$

per  $\varepsilon$  prefissato, oppure

$$f(x_{i+1}) < \varepsilon$$

La teoria, esplicitata per il caso di singola variabile, può essere facilmente estesa al caso con  $n$  variabili. Con tre variabili, ad esempio, il problema consiste nel trovare le soluzioni del seguente sistema

$$F(x, y, z) = \begin{Bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lo sviluppo di Taylor della funzione, troncato al primo ordine, fornisce

$$F(x, y, z) = \begin{Bmatrix} f_1(x_i, y_i, z_i) \\ f_2(x_i, y_i, z_i) \\ f_3(x_i, y_i, z_i) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \\ z_{i+1} - z_i \end{Bmatrix}$$

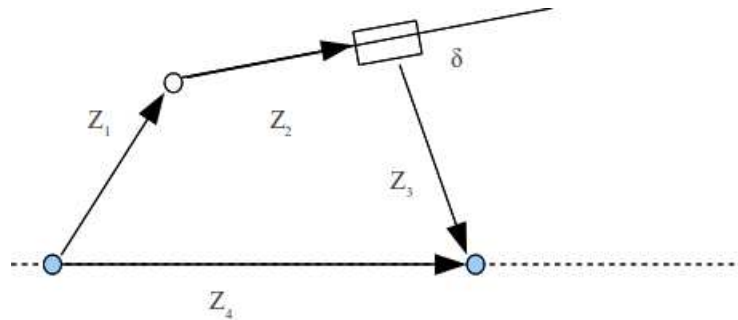
La formula iterativa, similmente alla formula 1.1, è

$$\begin{Bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1(x_i, y_i, z_i) \\ f_2(x_i, y_i, z_i) \\ f_3(x_i, y_i, z_i) \end{Bmatrix}$$

dove  $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$  è lo jacobiano della funzione.

ESEMPIO

Applichiamo quanto visto al quadrilatero articolato in figura



I dati geometri sono:  $z_1=0,1\text{m}$ ,  $z_3=0,17\text{m}$ ,  $z_4=0,4\text{m}$ ,  $\delta=84^\circ$ , mentre  $\varphi_1=60^\circ$  è il valore assegnato alla coordinata indipendente.

Dalla scrittura delle equazioni vettoriali di chiusura si ottiene

$$\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 - \vec{z}_4 = 0 \implies$$

$$\begin{cases} z_1 \cos(\varphi_1) + z_2 \cos(\varphi_2) + z_3 \cos(\varphi_2 - \delta) - z_4 \\ z_1 \sin(\varphi_1) + z_2 \sin(\varphi_2) + z_3 \sin(\varphi_2 - \delta) \end{cases} = 0 \implies$$

Formula iterativa risulta in conclusione

$$\begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}_i - J^{-1} F(\varphi_{2i}, z_{2i})$$

dove

$$J = \begin{bmatrix} -z_2 \sin(\varphi_2) - z_3 \sin(\varphi_2 - \delta) & \cos(\varphi_2) \\ z_2 \cos(\varphi_2) + z_3 \cos(\varphi_2 - \delta) & \sin(\varphi_2) \end{bmatrix}$$

$$F(\varphi_2, z_2) = \begin{Bmatrix} z_1 \cos(\varphi_1) + z_2 \cos(\varphi_2) + z_3 \cos(\varphi_2 - \delta) - z_4 \\ z_1 \sin(\varphi_1) + z_2 \sin(\varphi_2) + z_3 \sin(\varphi_2 - \delta) \end{Bmatrix}$$

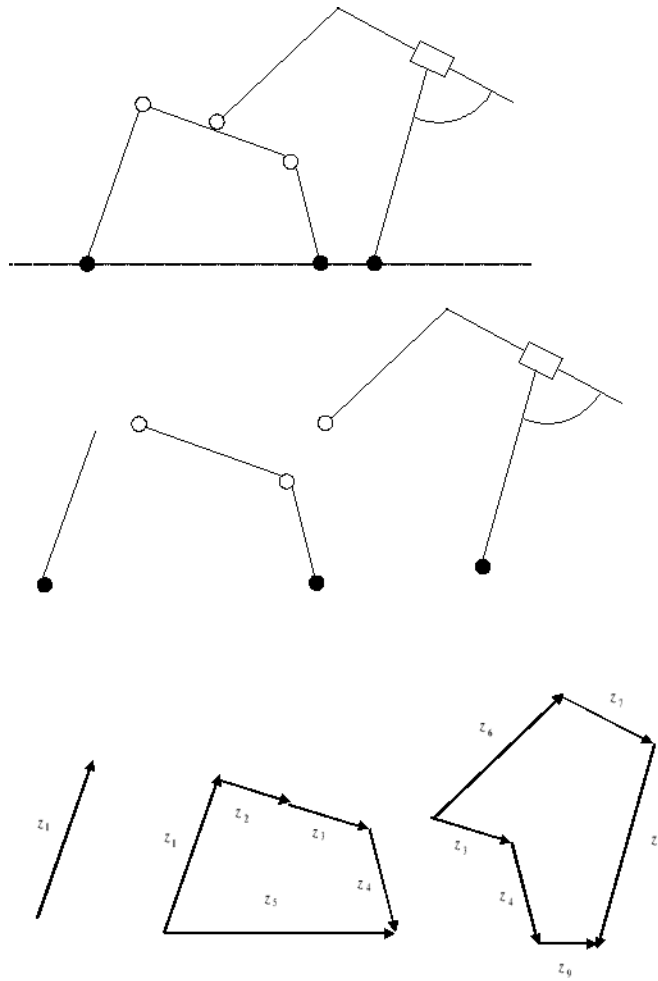
### 1.4.2 Scomposizione in sottopoligoni risolubili separatamente

Svantaggi del metodo di Newton-Raphson:

- aumento delle dimensioni di J all'aumentare della complessità del meccanismo;
- aumento delle soluzioni multiple, che a propria volta, introduce difficoltà nello scegliere quella corretta.

In alternativa, per semplificare la soluzione cinematica, è possibile scomporre il meccanismo in

SOTTOMECCANISMI, a patto che questi sottomeccanismi abbiano una cinematica sufficientemente semplificata tale da fornire una soluzione. Questo approccio permette di scomporre il problema complessivo cinematico in sottoproblemi.



I sottomeccanismi, per essere risolubili, devono essere a MOBILITA' NUL-LA. Un meccanismo (o sottomeccanismo) si dice a mobilità nulla quando possiede 0 gradi di libertà.

Per capire come funziona il processo di soluzione facciamo riferimento alla figura sopra che rappresenta il consueto meccanismo a 2 maglie ad 1 grado di libertà. Lo si può scomporre in 3 sottomeccanismi (figura centrale). Partendo da sinistra si avrà una manovella, la cui posizione è data dal valore della coordinata indipendente.

Nella parte sottostante della figura sono rappresentate la manovelle e 2 catene cinematiche. La prima, partendo da sinistra è risolubile, perchè, scrivendo l'equazione di chiusura, si ottiene un sistema di due equazioni in 2 incognite. Una volta risolta questa catena, risultano noti anche gli angoli  $\varphi_3$  e  $\varphi_4$ . Attraverso la conoscenza di questi angoli è possibile risolvere anche la catena cinematica a destra, dato che il sistema che ne deriva è caratterizzato dall'aver 2 equazioni

in 2 incognite. Il problema complessivo è stato scomposto in due sottoproblemi. Osservazione: non era possibile risolvere la catena cinematica di destra e poi quella di sinistra. Quando si scompone un meccanismo in sottomeccanismi bisogna seguire un percorso obbligato.

Il sottomeccanismo la cui analisi cinematica di posizione viene risolta può essere interpretato come un telaio per il sottomeccanismo che gli sta a valle.

## 1.5 Diadi, triadi e tetradi

Quali sono i meccanismi a mobilità nulla? Come si fa a riconoscerli? Per individuare i sottomeccanismi piani a mobilità nulla (detti anche GRUPPI DI ASSUR) basta ricorrere all'equazione di Grübler (si considerano solo coppie cinematiche di classe  $c_1$ ). Se un meccanismo è a mobilità nulla l'equazione di Grübler dovrà fornire un risultato nullo.

$$3(m - 1) - 2 \cdot c = 0$$

Per capire la struttura di un meccanismo a mobilità nulla bisogna individuare quando l'equazione ottenuta è soddisfatta. Le combinazioni di soluzioni più interessanti sono

$m = 3$	$c = 3$	DIADE
$m = 5$	$c = 6$	TRIADE o TETRADE

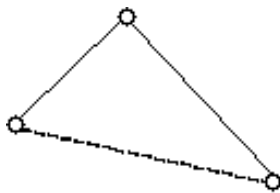
Occupiamoci delle diadi, non sono perchè sono più semplici da trattare, ma anche perchè la stragrande maggioranza dei meccanismi sono costituiti da assemblati di diadi.

La diade è composta da tre MEMBRI BINARI, dato che  $m = 3$ . Si definisce membro binario un membro con 2 coppie cinematiche agli estremi. Nella diade vi sono 3 coppie cinematiche presenti.

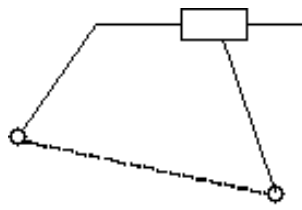
L'aspetto significativo delle diadi è che offrono una SOLUZIONE ANALITICA al problema cinematico

Considerando tutte le combinazioni di coppie cinematiche, si possono ottenere 5 tipi differenti di diadi.

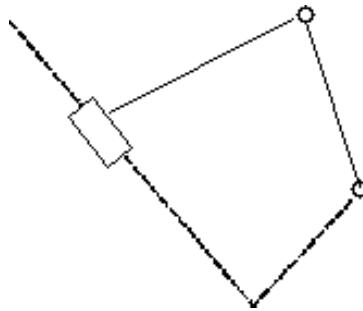
RRR



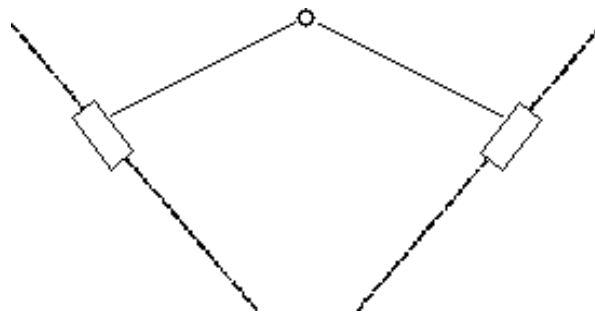
RPR



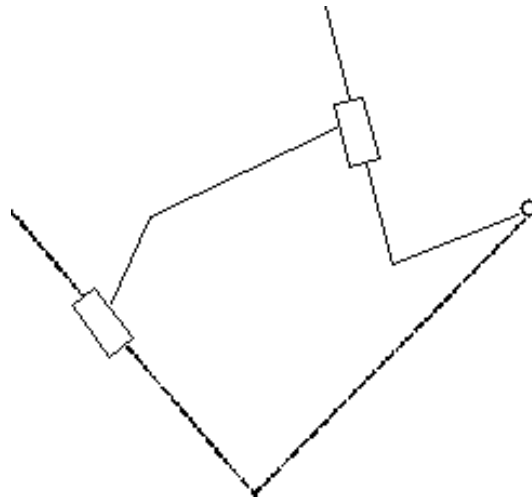
PRR



PRP



PPR



La diade PPP non è presa in considerazione perché non rappresenta un meccanismo a mobilità nulla.

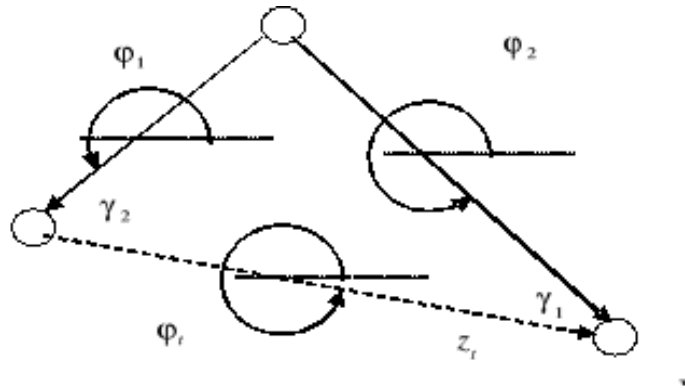
Valutiamo come sia sempre possibile ricavare la soluzione analitica delle varie diadi in forma chiusa.

### 1.5.1 Diade RRR (rotoidale-rotoidale-rotoidale)

Partiamo dalla diade più semplice, la diade RRR. I dati sono forniti dalla tabella.

Tipo	Dati geometrici	Dati noti	Incognite
RRR	$z_1, z_2$	$x_A, y_A, x_B, y_B$ oppure $z_t, \varphi_t$	$\varphi_1, \varphi_2$

Osserviamo la figura. La diade RRR è in sostanza un arco a tre cerniere. Affinchè l'analisi cinematica sia possibile debbono essere note le posizioni delle due coppie rotoidali estreme. Queste ultime possono essere fisse a telaio, oppure possono essere collegate ad altri sottomeccanismi del sistema complessivo. Per cui, risolti cinematicamente questi ultimi meccanismi, si riesce a conoscere la posizione delle coppie rotoidali A e B. Ripetiamo quindi che la scomposizione in gruppi prevede una soluzione cinematica "in cascata", partendo dai sottomeccanismi prossimi al membro motore e proseguendo alle diadi successive. Affermare che le posizioni di A e B diventano note (calcolate) equivale a dire che la diadi RRR è "bloccata" ad un telaio fittizio.



Se sono noti solamente le coordinate dei punti A e B, si calcola modulo e posizione angolare del vettore che congiunge le coppie rotoidali estreme

$$z_t = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

$$\varphi_t = \arctan 2((y_B - y_A), (x_B - x_A))$$

L'[arctan2](#) è una funzione simile all'arcotangente. L'arcotangente fornisce un valore che è compreso tra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ . L'[arctan2](#) fornisce un valore che può essere compreso tra 0 e  $2\pi$ . L'[arctan2](#) fornisce la posizione angolare di un vettore rispetto all'orizzontale secondo la convenzione data. Notare che per fornire il valore angolare, la funzione ha bisogno di due argomenti: la proiezione lungo la direzione y del vettore e la proiezione del vettore lungo la direzione x. La notazione [arctan2](#) si rifà alla stessa sintassi utilizzata in Matlab.

Per il teorema di CARNOT si calcolano gli angoli interni del triangolo che è sovrapposto alla diade

$$\gamma_1 = \arccos\left(\frac{z_t^2 + z_2^2 - z_1^2}{2z_t z_2}\right)$$

$$\gamma_2 = \arccos\left(\frac{z_t^2 + z_1^2 - z_2^2}{2z_t z_1}\right)$$

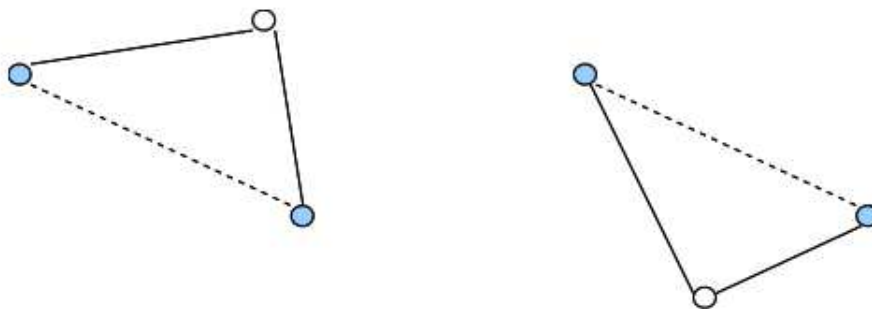
infine, sommando gli angoli in maniera appropriata all'angolo del vettore rappresentante il "telaio fittizio" si ottengono gli angoli delle 2 manovelle che rappresentavano le incognite del sistema.

$$\varphi_2 = \varphi_t - \gamma_1$$

$$\varphi_1 = \varphi_t - \pi + \gamma_2$$

Notare che, a parità di dati iniziali, si poteva trovare un'altra soluzione, come è evidenziato dalla seguente figura.



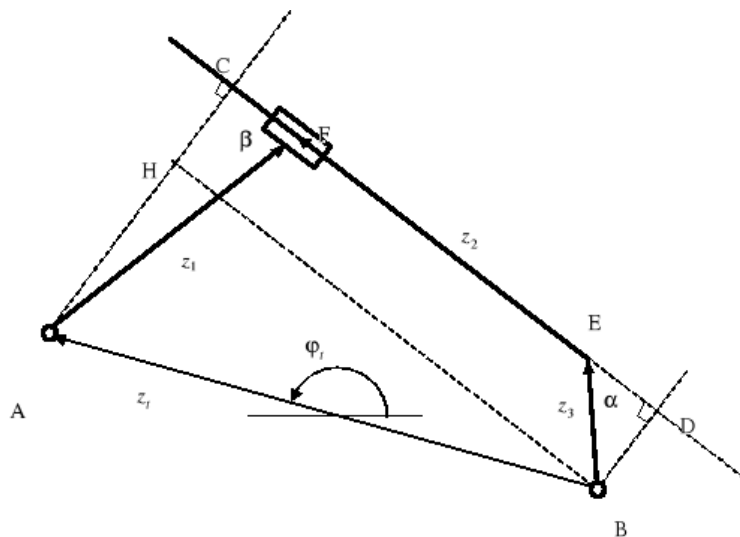


Infatti, fissate le posizioni delle coppie rotoidali estreme, l'arco a 3 cerniere potrebbe essere rivolto verso l'alto od il basso. La configurazione corretta la si ricava dal contesto

### 1.5.2 Diade RPR (rotoidale-prismatica-rotoidale)

Tipo	Dati geometrici	Dati noti	Incognite
RPR	$z_1, z_3, \alpha, \beta$	$x_A, y_A, x_B, y_B$ oppure $z_t, \varphi_t$	$\varphi_1, z_2$ oppure $\varphi_3, z_2$

Ancora una volta sono note le posizioni delle due coppie rotoidali estreme.



$z_t$  e  $\varphi_t$  si determinano come per la diade precedente, con l'avvertenza di osservare che il vettore  $z_t$  è orientato verso sinistra in alto

$$z_t = \sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_A - x_B)^2}$$

$$\varphi_t = \arctan 2((y_A - y_B), (x_A - x_B))$$

Si procede tracciando una retta passante per il punto A e perpendicolare alla direzione di traslazione del pattino. Successivamente si traccia un'altra retta passante per il punto B e perpendicolare alla retta AC tracciata precedentemente.

Si calcola la lunghezza dei seguenti segmenti:

$$BD = z_3 \sin(\alpha)$$

$$DE = z_3 \cos(\alpha)$$

$$AC = z_1 \sin(\beta)$$

$$CF = z_1 \cos(\beta)$$

Poiché  $CD = HB$  ed osservando il triangolo AHB, si ottiene il valore di HB la posizione del pattino definita dal modulo del vettore  $z_2$  (che rappresentava una delle due incognite)

$$HB = \sqrt{z_t^2 - (AC - BD)^2}$$

$$z_2 = HB - CF - DE$$

Si calcolano i seguenti angoli, che servono per individuare la seconda incognita e cioè la posizione angolare del membro AF.

$$H\hat{A}B = \arccos\left(\frac{AC - BD}{z_t}\right)$$

$$F\hat{A}B = H\hat{A}B - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$\varphi_1 = \varphi_t - \pi + F\hat{A}B$$

Notiamo che, una volta noto l'angolo  $\varphi_1$  tutti i rimanenti angoli sono facilmente calcolabili

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi - \beta$$

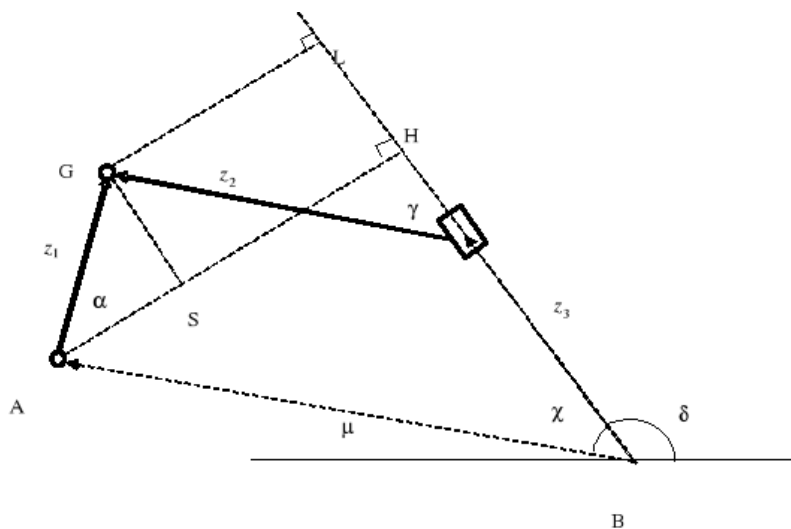
$$\varphi_3 = \varphi_2 - \alpha$$

### 1.5.3 Diade RRP (rotoidale-prismatica-prismatica)

La particolarità di questa tipologia di diade rispetto alle precedenti è che questa volta non vi sono due coppie rotoidali agli estremi. Si ha a che fare con una coppia rotoidale. Per cui, in questo caso, i dati noti sono la posizione della coppia

rotoidale A e la configurazione dell'asse di scottimento del pattino. Quest'ultimo è definito una volta che siano noti un qualsiasi suo punto (punto B in figura) e la sua posizione angolare (angolo  $\delta$ ).

Tipo	Dati geometrici	Dati noti	Incognite
RRP	$z_1, z_2, \gamma$	$x_A, y_A, x_B, y_B, \delta$	$\varphi_1, z_3$



Il vettore di “telaio fittizio” è rappresentato dal segmento BA. Si procede tracciando la retta passante per A e perpendicolare all'asse di traslazione. Successivamente si traccia un'altra retta, passante per G e perpendicolare alla precedente AH.

Calcoliamo prima l'angolo  $\varphi_1$ , cioè la prima incognita, lavorando sul triangolo GSA

$$\mu = \arctan\left(\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}\right)$$

$$\chi = \pi - \mu - \delta$$

$$AH = z_2 \sin(\chi)$$

$$LG = z_1 \sin(\gamma)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{AH - LG}{z_1}\right)$$

$$\varphi_1 = \delta - \frac{\pi}{2} + \alpha$$

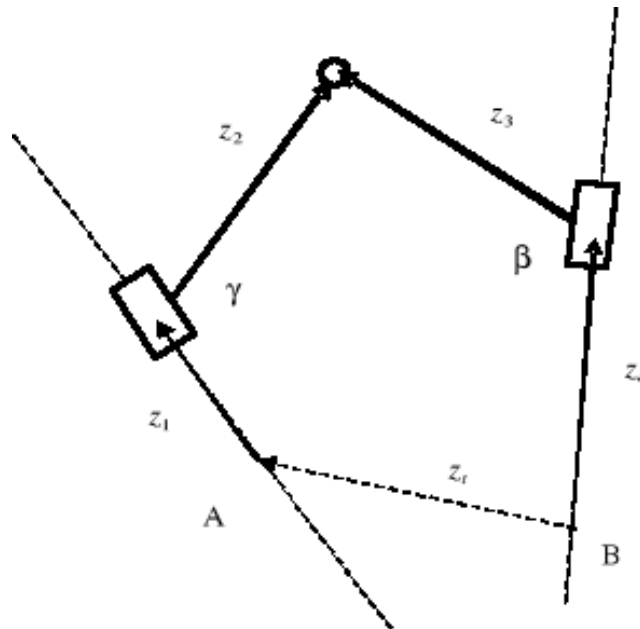
Calcoliamo  $z_3$  (seconda incognita) lavorando col segmento LB

$$\begin{aligned} LB &= HB + LH = \\ &= z_t \cos(\chi) + z_1 \sin(\alpha) \\ z_3 &= LB - z_2 \cos(\gamma) \end{aligned}$$

#### 1.5.4 Diade PRP (prismatica-rotoidale-prismatica)

In questa diade vi sono due coppie prismatiche agli estremi. Per cui i dati di input del problema sono le configurazioni degli assi di scorrimenti, che risultano note una volta che vengono forniti 2 punti qualsiasi (A e B) sui quali passano gli assi e le loro posizioni angolari ( $\varphi_1, \varphi_4$ )

Tipo	Dati geometrici	Dati noti	Incognite
PRP	$z_2, z_3, \gamma, \beta$	$x_A, y_A, x_B, y_B, \varphi_1, \varphi_4$	$z_1, z_4$



Notare che le incognite sono moduli di vettori. Non vi è alcun angolo incognito. Ciò permette di impostare una equazione di chiusura ottenendo, a differenza delle altre diadi, una soluzione lineare del sistema.

Gli angoli sono tutti ricavabili

$$\begin{aligned} z_t &= \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \\ \varphi_t &= \arctan 2((y_A - y_B), (x_A - x_B)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \varphi_1 - \pi + \gamma \\ \varphi_3 &= \varphi_4 + \pi - \beta\end{aligned}$$

Si percorre la maglia dei vettori in senso orario ottenendo l'equazione vettoriale che viene poi proiettata lungo le due coordinate

$$\begin{aligned}\vec{z}_1 + \vec{z}_2 - \vec{z}_3 - \vec{z}_4 + \vec{z}_t &= 0 \\ \implies \\ z_1 \cos(\varphi_1) + z_2 \cos(\varphi_2) - z_3 \cos(\varphi_3) - z_4 \cos(\varphi_4) + z_t \cos(\varphi_t) &= 0 \\ z_1 \sin(\varphi_1) + z_2 \sin(\varphi_2) - z_3 \sin(\varphi_3) - z_4 \sin(\varphi_4) + z_t \sin(\varphi_t) &= 0\end{aligned}$$

Sapendo che le incognite sono  $z_1, z_4$ , si pone il sistema in notazione matriciale

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & -\cos(\varphi_4) \\ \sin(\varphi_1) & -\sin(\varphi_4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned}d_1 &= -z_2 \cos(\varphi_2) + z_3 \cos(\varphi_3) - z_t \cos(\varphi_t) \\ d_2 &= -z_2 \sin(\varphi_2) + z_3 \sin(\varphi_3) - z_t \sin(\varphi_t)\end{aligned}$$

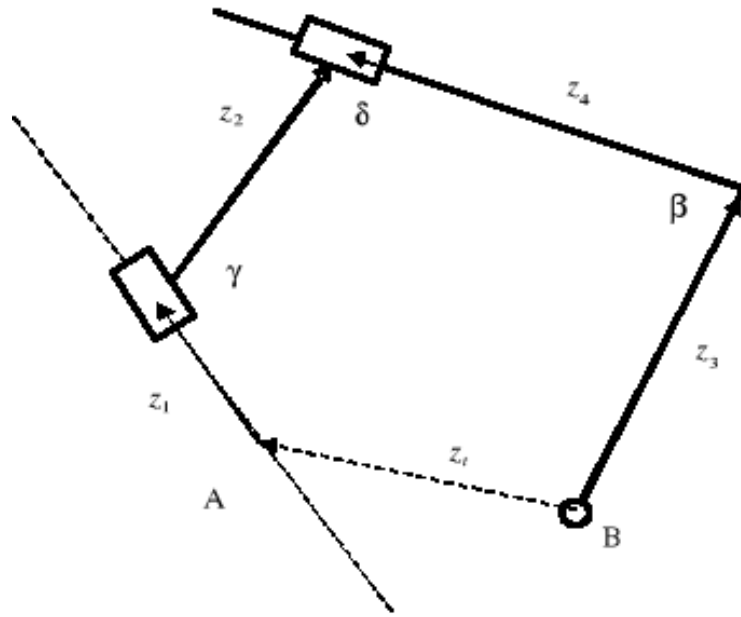
La soluzione è

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_4 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & -\cos(\varphi_4) \\ \sin(\varphi_1) & -\sin(\varphi_4) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\cos(\varphi_4) \sin(\varphi_1) - \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_4)} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_4) & \cos(\varphi_4) \\ -\sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_4)} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_4) & \cos(\varphi_4) \\ -\sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

#### 1.5.4.1 Diade PPR (prismatica-rotoidale-prismatica)

L'analisi di questa diade non si discosta di molto dalla precedente, dato che vi sono due incognite  $z_1, z_4$  che non sono argomenti di funzioni trigonometriche. Si otterrà alla fine un sistema lineare sfruttando l'equazione di chiusura.

Tipo	Dati geometrici	Dati noti	Incognite
PPR	$z_2, z_3, \gamma, \beta, \delta$	$x_A, y_A, x_B, y_B, \varphi_1$	$z_1, z_4$



Gli angoli sono tutti ricavabili

$$z_t = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

$$\varphi_t = \arctan 2((y_A - y_B), (x_B - x_A))$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \pi + \gamma$$

$$\varphi_4 = \varphi_2 + \delta$$

$$\varphi_3 = \varphi_4 + \beta - \pi$$

L'equazione di chiusura ed il sistema sono

$$\vec{z}_1 + \vec{z}_2 - \vec{z}_3 - \vec{z}_4 + \vec{z}_t = 0$$

$\implies$

$$z_1 \cos(\varphi_1) + z_2 \cos(\varphi_2) - z_3 \cos(\varphi_3) - z_4 \cos(\varphi_4) + z_t \cos(\varphi_t) = 0$$

$$z_1 \sin(\varphi_1) + z_2 \sin(\varphi_2) - z_3 \sin(\varphi_3) - z_4 \sin(\varphi_4) + z_t \sin(\varphi_t) = 0$$

In notazione matriciale

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & -\cos(\varphi_4) \\ \sin(\varphi_1) & -\sin(\varphi_4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

dove

$$d_1 = -z_2 \cos(\varphi_2) + z_3 \cos(\varphi_3) - z_t \cos(\varphi_t)$$

$$d_2 = -z_2 \sin(\varphi_2) + z_3 \sin(\varphi_3) - z_t \sin(\varphi_t)$$

La soluzione è

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_4 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & -\cos(\varphi_4) \\ \sin(\varphi_1) & -\sin(\varphi_4) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_4)} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_4) & \cos(\varphi_4) \\ -\sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$