Chapter 1

Analisi cinematica di velocità per meccanismi articolati piani

1.1 L'equazione di chiusura delle velocità

1.1.1 Esempio introduttivo

Il problema dell'analisi di velocità consiste nel calcolare la velocità di ogni punto del meccasmo o la velocità angolare di ogni suo membro.

Per rendere possibile l'analisi, debbono essere noti:

- la velocità delle coordinate indipendenti;

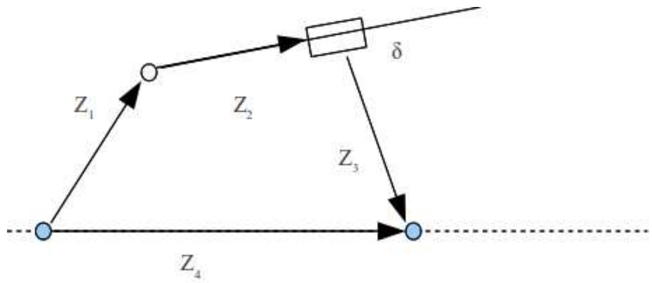
- le posizioni dei membri; per posizioni dei membri si intendono i valori degli angoli e dei moduli dei vettori che caratterizzano i meccanismi. Notare che questi valori sono noti una volta che viene effettuata l'analisi cinematica di posizione. Se ne deduce che l'analisi di velocità deve essere sempre preceduta dall'analisi cinematica di posizione.

- i dati geometrici del meccanismo.

Il risultato dell'analisi di velocità sono:

- la velocità dei membri (velocità angolare e/o velocità lineare).

Per comprendere come procedere, riprendiamo l'esempio già utilizzato nel capitolo precedente per l'intorduzione delle catene vettoriali.



Si tratta di un quadrilatero articolato ad 1 gdl.
Per prima cosa si DERIVA l'EQUAZIONE DI CHIUSURA
Equazione di partenza era

$$\overrightarrow{z_1} + \overrightarrow{z_2} + \overrightarrow{z_3} - \overrightarrow{z_4} = 0 \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 \cos(\varphi_1) + z_2 \cos(\varphi_2) + z_3 \cos(\varphi_2 - \delta) - z_4 \\ z_1 \sin(\varphi_1) + z_2 \sin(\varphi_2) + z_3 \sin(\varphi_2 - \delta) \end{array} \right\} = 0$$

Derivando rispetto al tempo, si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} -z_1 \sin(\varphi_1)\,\dot{\varphi}_1 + \dot{z}_2 \cos(\varphi_2) - z_2 \sin(\varphi_2)\,\dot{\varphi}_2 - z_3 \sin(\varphi_2 - \delta)\,\dot{\varphi}_2 \\ z_1 \cos(\varphi_1)\,\dot{\varphi}_1 + \dot{z}_2 \sin(\varphi_2) + z_2 \cos(\varphi_2)\,\dot{\varphi}_2 + z_3 \cos(\varphi_2 - \delta)\,\dot{\varphi}_2 \end{array} \right\} = 0$$

Come detto in precedenza, il valore della velocità della coordinata indipendente $\dot{\varphi}_1$deve essere un dato del problema, essendo la manovella motore. Le due uniche incognite del sistema sono $\dot{\varphi}_2$e $\dot{z}_2$.
Si pone il sistema in notazione matriciale in cui si separano le incognite dai dati noti

$$\left[\begin{array}{cc} -z_2 \sin(\varphi_2) - z_3 \sin(\varphi_2 - \delta) & \cos(\varphi_2) \\ z_2 \cos(\varphi_2) + z_3 \cos(\varphi_2 - \delta) & \sin(\varphi_2) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{z}_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} -z_1 \sin(\varphi_1) \\ z_1 \cos(\varphi_1) \end{array} \right\} \dot{\varphi}_1 = 0$$

La matrice quadra che ne deriva e che premoltiplica le velocità delle incognite è detta JACOBIANO o MATRICE JACOBIANA

$$J = \left[\begin{array}{cc} -z_2 \sin(\varphi_2) - z_3 \sin(\varphi_2 - \delta) & \cos(\varphi_2) \\ z_2 \cos(\varphi_2) + z_3 \cos(\varphi_2 - \delta) & \sin(\varphi_2) \end{array} \right] \tag{1.1}$$

mentre il termine noto
$A = \left\{ \begin{array}{c} -z_1 \sin(\varphi_1) \\ z_1 \cos(\varphi_1) \end{array} \right\}$ non ha una denominazione particolare.
Notare come il sistema nella 2 incognite $\dot{\varphi}_2, \dot{z}_2$ è LINEARE.
La soluzione del sistema risulta perciò

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{z}_2 \end{array} \right\} = -J^{-1} A\ \dot{\varphi}_1$$

1.1.2 Estensione al caso in cui vi sono $n$gradi di libertà

Lo stesso ragionamento può essere ripetuto nel caso generale con meccanismi più complicati, nei quali

n = numero di gradi di libertà (numero di coordinate indipendenti)

m = numero delle equazioni vettoriali di chiusura indipendenti

Estendendo il risultato ottenuto nel paragrafo precedente, si deduce che, una volta derivate rispetto al tempo le quazioni di chiusura proiettate, posto il sistema in forma matriciale, ponendo in evidenza le incognite, si approda ad un sistema lineare che ha la seguente struttura

$$2 \times m \overset{2\times m}{\begin{bmatrix} & \\ & J \end{bmatrix}} \left\{ \dot{x} \right\} = - \overset{n}{\begin{bmatrix} & \\ & A \end{bmatrix}} \left\{ \dot{q} \right\} \tag{1.2}$$

dove

$\dot{x}$ è il vettore delle velocità incognite le cui componenti possono essere velocità angolari o lineari.

$\dot{q}$ è il vettore delle velocità delle coordinate indipendenti.

L'ordine dello Jacobiano (pari a $2xm$) aumenta all'aumentare del numero delle equazioni vettoriali. Notare anche che, quando il sistema ha 1 gdl, la matrice Asi riduce ad un vettore colonna.

Possiamo riassumere i risultati fino a qui ottenuti, nelle seguenti considerazioni:

- L'analisi di velocità si riduce ad un problema LINEARE;
- Deve sempre essere preceduta dall'analisi di posizione;
- I risultati dell'analisi di velocità variano al variare della configurazione cinematica in cui ci si trova il meccanismo; se il meccanismo si sposta, è quaro che tutte le velocità istantanee cambiano.
- Lo JACOBIANO è una matrice quadrata la cui dimensione è pari al doppio delle equazioni vettoriali indipendenti;
- La matrice A ha numero di righe pari al doppio delle equazioni vettoriali indipendenti e numero di colonne pari al numero delle coordinate libere;
- Per meccanismi ad 1 G.d.L. la matrice A consiste in un vettore;

1.1.3 Determinazione della velocità di un punto generico del meccanismo

Effettuata l'analisi di velocità si può calcolare la velocità di qualsiasi punto del meccanismo.

Un punto nel piano può essere espresso come catena di vettori a partire dall'origine del sistema

$$\begin{aligned} P &= \vec{z}_1 + \ldots + \vec{z}_k = \\ &= \begin{matrix} z_1 \cos(\varphi_1) + \ldots + z_k \cos(\varphi_k) \\ z_1 \sin(\varphi_1) + \ldots + z_k \sin(\varphi_k) \end{matrix} \end{aligned}$$

Si DERIVA per calcolare la velocità assoluta del punto

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & -z_1 \sin(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) & z_1 \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z_1} \\ \dot{\varphi}_1 \end{Bmatrix} + \ldots + \tag{1.3}$$
$$+ \ldots + \begin{bmatrix} \cos(\varphi_k) & -z_k \sin(\varphi_k) \\ \sin(\varphi_k) & z_k \cos(\varphi_k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z_k} \\ \dot{\varphi}_k \end{Bmatrix}$$

Nell'ultimo passaggio, per rendere più compatta la notazione, si è scelto di porre il sistema in somma di prodotti di matrice per vettore, dove le matrici contengono i valori degli angoli e dei moduli dei membri ed i vettori contengono i valori delle velocità angolari e di traslazione dei membri.

Notare che:

- $\begin{Bmatrix} \dot{z_1} \\ \dot{\varphi}_1 \end{Bmatrix}$ ... $\begin{Bmatrix} \dot{z_{2k}} \\ \dot{\varphi}_k \end{Bmatrix}$sono stati calcolati con l'analisi di velocità; alcuni di loro hanno valore nullo;

- φ_1,z_1,...,φ_k,z_k sono stati calcolati con l'analisi cinematica di posizione;

1.1.4 I rapporti di velocità (o coefficienti di sensibilità)

Riprendiamo il sistema riguardante l'analisi di velocità scritto in forma compatta dato dall'eq. (1.4).

$$J\,\dot{x} = -A\,\dot{q} \tag{1.4}$$

Premoltiplicando per l'inverso dello Jacobiano si ottiene

$$\dot{x} = -J^{-1}A\,\dot{q}$$

$$\dot{x} = W_x\,\dot{q} \tag{1.5}$$

$W_x = -J^{-1}A$ è detta MATRICE DEI RAPPORTI DI VELOCITA' (tra le velocità incognite $\dot{x}$ e le velocità delle coordinate indipendenti $\dot{q}$)

Valutiamo le altre PROPRIETA' della matrice dei rapporti di velocità.

1) Ogni singola componente della matrice di velocità può essere interpretata nel modo seguente. La componente w_{ij} rappresenta la velocità incognita i-esima quando tutte le velocità delle coordinate libere sono nulle tranne la j-esima che assume valore unitario.

2) Poiché q è il vettore delle coordinate libere, tutte le altre grandezze del meccanismo (compreso il vettore x delle incognite dell'analisi di posizione) possono essere espresse univocamente in funzione delle coordinate indipendenti q (q è inteso come vettore nel seguito). Tale relazione è esprimibile a mezzo della seguente notazione

$$x = f(q)$$

Derivando la relazione si ottiene

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_{2\times m}}{\partial q_1} & & \frac{\partial f_{2\times m}}{\partial q_n} \end{bmatrix} \dot{q}$$

Confronto l'equazione appena scritta con l'eq. (??) , si ottiene l'uguaglianza

$$W_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_{2\times m}}{\partial q_1} & & \frac{\partial f_{2\times m}}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

La matrice dei rapporti di velocità tra incognite e coordinate libere è la matrice delle derivate parziali delle incognite rispetto alle coordinate libere.

3) W_x è funzione solo del meccanismo e non della velocità delle coordinate libere. $W_x = g(q)$.

4)W_x è interpretabile anche come matrice degli spostamenti infinitesimi, nel senso che vale

$$dx = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_{2\times m}}{\partial q_1} & & \frac{\partial f_{2\times m}}{\partial q_n} \end{bmatrix} dq$$

Per arrivare a quest'ultima relazione (in maniera intuitiva, ma poco ortodossa!) basta pensare alla relazione $\frac{dx}{dt} = W_x \frac{dq}{dt}$ e "semplifcare la componente dt"

5) Esistono infinite matrici dei rapporti di velocità per un meccanismo, nel senso che è sempre possibile associare la velocità di una serie si grandezze del meccanismo $\dot{l}$ (angoli, moduli o coordinate x ed y di punti) alle velocità delle coordinate indipendenti $\dot{q}$.

$$\dot{l} = W_l \; \dot{q}$$

6) Quando il meccanismo è ad 1 grado di libertà, la matrice dei rapporti di velocità diventa un vettore colonna e le sue componenti vengono detti RAPPORTI DI TRASMISSIONE (nella formula seguente q è considerato uno scalare).

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \\ \dot{l}_r \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \\ \tau_r \end{array} \right\} \dot{q} \tag{1.6}$$

Si vede dalla eq. (1.6) che i rapporti di trasmissione sono dati dai rapporti di velocità tra la velocità di una coordinata del meccanismo e la velocità della coordinata indipendente (questo relazione vale solamente per i sistemi ad 1 G.d.L.). Quanto detto lo si esplicita nella formula seguente

$$\left\{ \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \\ \tau_r \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{l}_1/\dot{q} \\ \dot{l}_2/\dot{q} \\ \\ \dot{l}_r/\dot{q} \end{array} \right\} \tag{1.7}$$

Quest'ultima osservazione suggerisce anche un modo operativo per calcolare i rapporti di trasmissione. Infatti, supponiamo di aver effettuato l'analisi cinematica di posizione. Successivamente supponiamo di effettuare l'analisi di velocità risolvendo il sistema lineare (1.2), cioè determiniamo $\dot{x}$. Per ultimo, calcoliamo la velocità della grandezza di cui vogliamo trovare il rapporto di trasmissione attraverso, ad es., l'eq. (**??**). Se tale grandezza è ha valore $\dot{l}$, allora, per l'eq. (1.7), il rapporto di trasmissione è $\dot{l}/\dot{q}$.

1.2 Le configurazioni singolari

Un meccanismo è in CONFIGURAZIONE SINGOLARE quando, il determinante dello Jacobiano è nullo

$$\det(J) = 0$$

Il fatto che il$\det(J) = 0$ significa che il rango della matrice J è minore della sua dimensione. Di conseguenza, il numero di equazioni del sistema $J\ \dot{x} = -A\ \dot{q}$ è minore del numero di incognite (dove le incognite sono le componenti del vettore $\dot{x}$). Questo indica, in conclusione, che alcune componenti delle incognite possono essere scelte arbitrariamente.

Altra considerazione geometrica importante è che, a causa del fatto che $\det(J) = 0$, J non è invertibile

PROPRIETA' da tenere in considerazione:

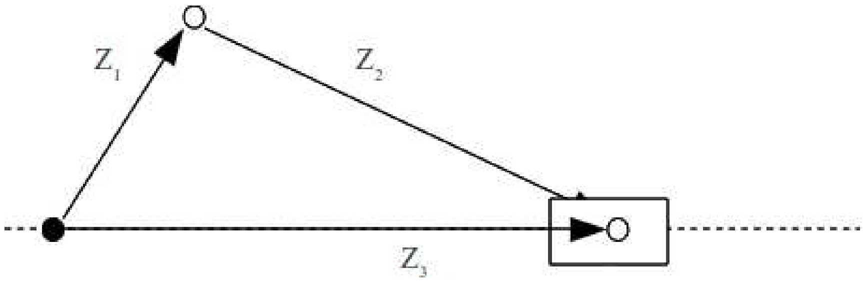
1) La condizione di singolarità dipende dalla configurazione cinematica (definita dai valori del vettore q) in cui si trova il meccanismo (e non dalle velocità delle coordinate indipendenti).

Questa prima proprietà è facilmente deducibile se si considera il fatto che J è funzione esclusivamente delle coordinate indipendenti q e non delle sue velocità$\dot{q}$, come si può anche vedere dalla struttura di esempio di J nell'eq. (1.1)

2) La condizione di singolarità dipende dalle grandezze scelte come coordinate indipendenti. Infatti in un meccanismo, l'elemento motore del meccanismo può essere scelto in molti modi. A seconda della scelta fatta, la condizione di singolarità cambia. Chiariamo questa proprietà col seguente esempio

ESEMPIO

Consideriamo un manovellismo centrato (meccanismo biella manovella nel quale l'asse di traslazione del pattino interseca il perno di manovella). Si tratta di un sistema ad 1 gdl. Scriviamo l'equazione di chiusura ed effettuiamo l'analisi di velocità in maniera tale da ricavare lo Jacobiano.



$$\vec{z_1} + \vec{z_2} + \vec{z_3} = 0$$

Derivando

$$\left\{ \begin{array}{l} -z_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - z_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 - \dot{z}_3 \\ z_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + z_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{array} \right\} = 0 \tag{1.8}$$

A questo punto dobbiamo decidere chi è l'elemento motore del meccanismo. Vi sono due possibilità. O si considera come elemento motore il pattino, oppure la manovella z_1. Nel primo caso il meccanismo rappresenta un motore a scoppio, dove l'azione motrice è data dal compressione nella camera di scoppio e dalla spinta che ne deriva sul pistone lungo la direzione del vettore z_3. Nel secondo caso il meccanismo rappresenta un compressore, nel quale l'azione motrice è data da un motore calettato sulla manovella. Il motore fa girare la manovella ed il pistone viene impiegato per comprimere alternativamente il gas. Si ricorda che, a seconda della scelta dell'elemento motore, e quindi a seconda della scelta della coordinata indipendente (se z_3 o φ_1) il risultato in termini di condizioni di singolarità, cambierà radicalmente.

Analizziamo separatamente i due casi e partiamo con il motore a combustione interna

Fissiamo come COORDINATA LIBERA $q = z_3$. Dal sistema (1.8) e considerando che le incognite sono $\dot{\varphi}_1$ e $\dot{\varphi}_2$, si ottiene

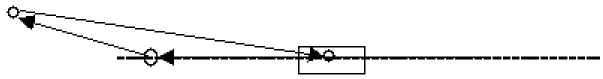
$$J = \begin{bmatrix} -z_1 \sin(\varphi_1) & -z_2 \sin(\varphi_2) \\ z_1 \cos(\varphi_1) & z_2 \cos(\varphi_2) \end{bmatrix}$$

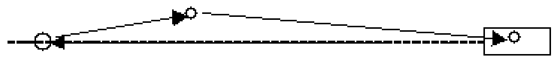
$\det(J) = 0 \Longrightarrow -z_1 z_2 \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + z_1 z_2 \sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1) = z_1 z_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$

La condizione di annullamento dello Jacobiano si verifica quando $\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$, e quindi quando l'argomento della funzione seno vale 0 oppure π, cioè

$$\varphi_2 = \varphi_1$$
oppure
$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$$

cioè quando i vettori z_1 e $z_2$sono allineati.





La figuara aiuta a comprendere qual'è l'interpretazione fisica della configurazione di singolarità. Quando un meccanismo si trova in una configurazione di singolarità significa che perde la capacità di essere movimentato attraverso l'applicazione di una forza all'elemento motore. Basta osservare la figura soprastante. Se il pistone si trova nei cosidetti punto morto inferiore o punto morto superiore, la forza applicata al pistone non fornirà alcun contributo alla rotazione.

Analizziamo le velocità attraverso le equazioni coinvolte quando ci troviamo nelle configurazioni di singolarità.

Le equazioni di velocità nel caso $\varphi_2 = \varphi_1 = 0$ sono (ad esempio)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_3 \\ z_1\dot{\varphi}_1 + z_2\dot{\varphi}_2 \end{array} \right\} = 0$$

Si deduce che la coordinata libera non può assumere valori arbitrari ma deve essere necessariamente nulla. Infatti, istantaneamente, come si deduce dalla figura, il pattino non può non rimanere fermo. Per contro, ci sono infinite combinazioni di $\dot{\varphi}_1$ e $\dot{\varphi}_2$ che soddisfano il sistema.

Passiamo al caso del meccanismo che rappresenta la modalità di funzionamento di un compressore. In questo caso l'elemento motore è la manovella.

Fissiamo come COORDINATA LIBERA $q = \varphi_1$. lo Jacobiano cambia e diventa

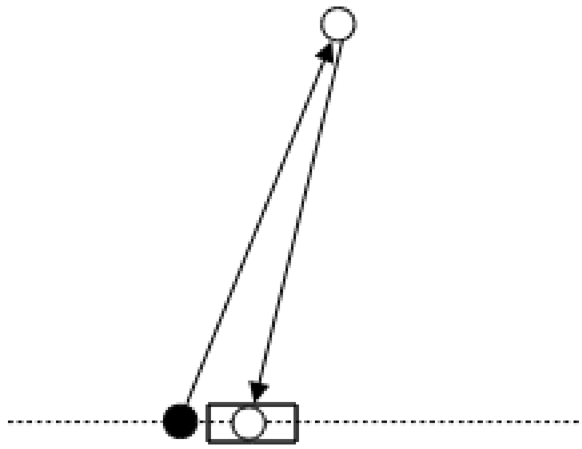
$$J = \left[\begin{array}{cc} -1 & -z_2 \sin(\varphi_2) \\ 0 & z_2 \cos(\varphi_2) \end{array} \right]$$

Il$\det(J) = 0$ porta alla condizione $-z_2 \cos(\varphi_2) = 0$

La condizione si verifica quando

$$\varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}$$

Questa condizione può verificarsi solamente quando biella e manovella hanno pari lunghezza e sono allineate. Vedi figura sottostante.



1.3 Gruppi di Assur ed analisi di velocità

Il meccanismo può essere scomposto in sottomeccanismi a mobilità nulla (diadi). Si utilizza la stessa scomposizione impiegata per l'analisi cinematica di posizione. Anche in questo caso, per effettuare un'analisi di velocità, invece di ricorrere alla soluzione del sistema (1.2), che per quando lineare, comporta una certa complessità, si può risolvere le diadi in cascata.

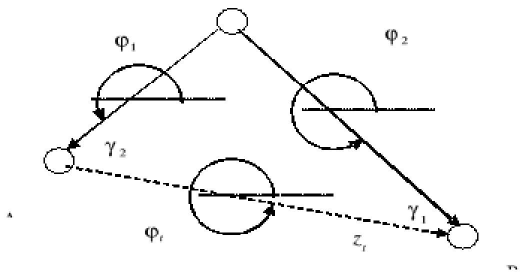
L'analisi di velocità può essere svolta in sequenza, seguendo lo stesso ordine adottato per la soluzione del problema cinematico.

Il problema di velocità è in ogni caso lineare.

Come esempio riportiamo l'analisi di velocità della diade RRR.

Tipo	Dati geometrici	Dati noti	Dati calcolati	Incognite
RRR	z_1, z_2	$\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_B, \dot{y}_B$ x_A, y_A, x_B, y_B	φ_1, φ_2	$\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$

Come si vede dalla tabella, i dati geometrici sono gli stessi che erano coinvolti nell'analisi cinematica di posizione. I dati noti comprendono le poizioni e le velocità dei punti delle due coppie rotoidali vincolati al telaio fittizio. Per dati calcolati si intendono i valori delle posizioni angolari che sono state precedentemente calcolate con l'analisi cinematica di posizione. Per cui, anche nell'analisi di velocità per gruppi di Assur, l'analisi di velocità di ogni singola diade deve essere preceduta dalla rispettiva analisi cinematica di posizione. Le incognite sono date dalle velocità dei due angoli che erano incogniti nell'analisi di posizione.



Se sono note solamente le velocità dei punti A e B si calcola la variazione rispetto al tempo del vettore che rappresenta il telaio fittizio

$$\dot{\vec{z}_t} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_B - \dot{x}_A \\ \dot{y}_B - \dot{y}_A \end{array} \right\}$$

Derivando l'equazione di chiusura $\vec{z}_t - \vec{z}_2 + \vec{z}_1 = 0$ si ottiene

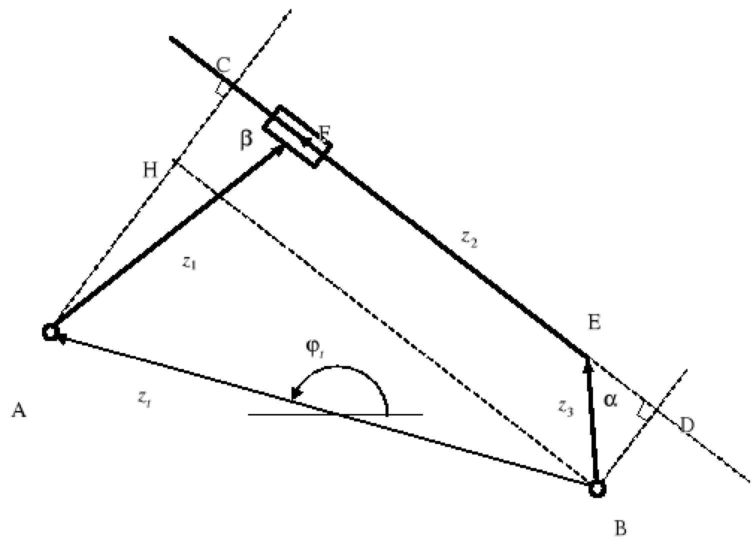
$$\left[\begin{array}{cc} -z_1 \sin(\varphi_1) & z_2 \sin(\varphi_2) \\ z_1 \cos(\varphi_1) & -z_2 \cos(\varphi_2) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_A - \dot{x}_B \\ \dot{y}_A - \dot{y}_B \end{array} \right\}$$

In conclusione

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{z_1 z_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \left[\begin{array}{cc} -z_2 \cos(\varphi_2) & -z_2 \sin(\varphi_2) \\ -z_1 \cos(\varphi_1) & -z_1 \sin(\varphi_1) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_A - \dot{x}_B \\ \dot{y}_A - \dot{y}_B \end{array} \right\}$$

Anche con una diade di tipo RPR, si procede nella stessa maniera

Tipo	Dati geometrici	Dati noti	Dati calcolati	Incognite
RPR	z_1, z_3, α, β	$\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_B, \dot{y}_B$ x_A, y_A, x_B, y_B	φ_1, z_2	$\dot{\varphi}_1, \dot{z}_2$



Se sono noti solamente le velocità dei punti A ed B si calcola

$$\dot{\vec{z}}_t = \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_A - \dot{x}_B \\ \dot{y}_A - \dot{y}_B \end{array} \right\}$$

Nota che $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3$
Dall'equazione di chiusura $\vec{z}_1 - \vec{z}_2 - \vec{z}_3 + \vec{z}_t = 0$, derivando si ottiene

$$\left[\begin{array}{cc} -z_1 \sin(\varphi_1) + z_2 \sin(\varphi_2) + z_3 \sin(\varphi_3) & -\cos(\varphi_2) \\ z_1 \cos(\varphi_1) - z_2 \cos(\varphi_2) - z_3 \cos(\varphi_3) & -\sin(\varphi_2) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{z}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_B - \dot{x}_A \\ \dot{y}_B - \dot{y}_A \end{array} \right\}$$

la cui soluzione è banale.