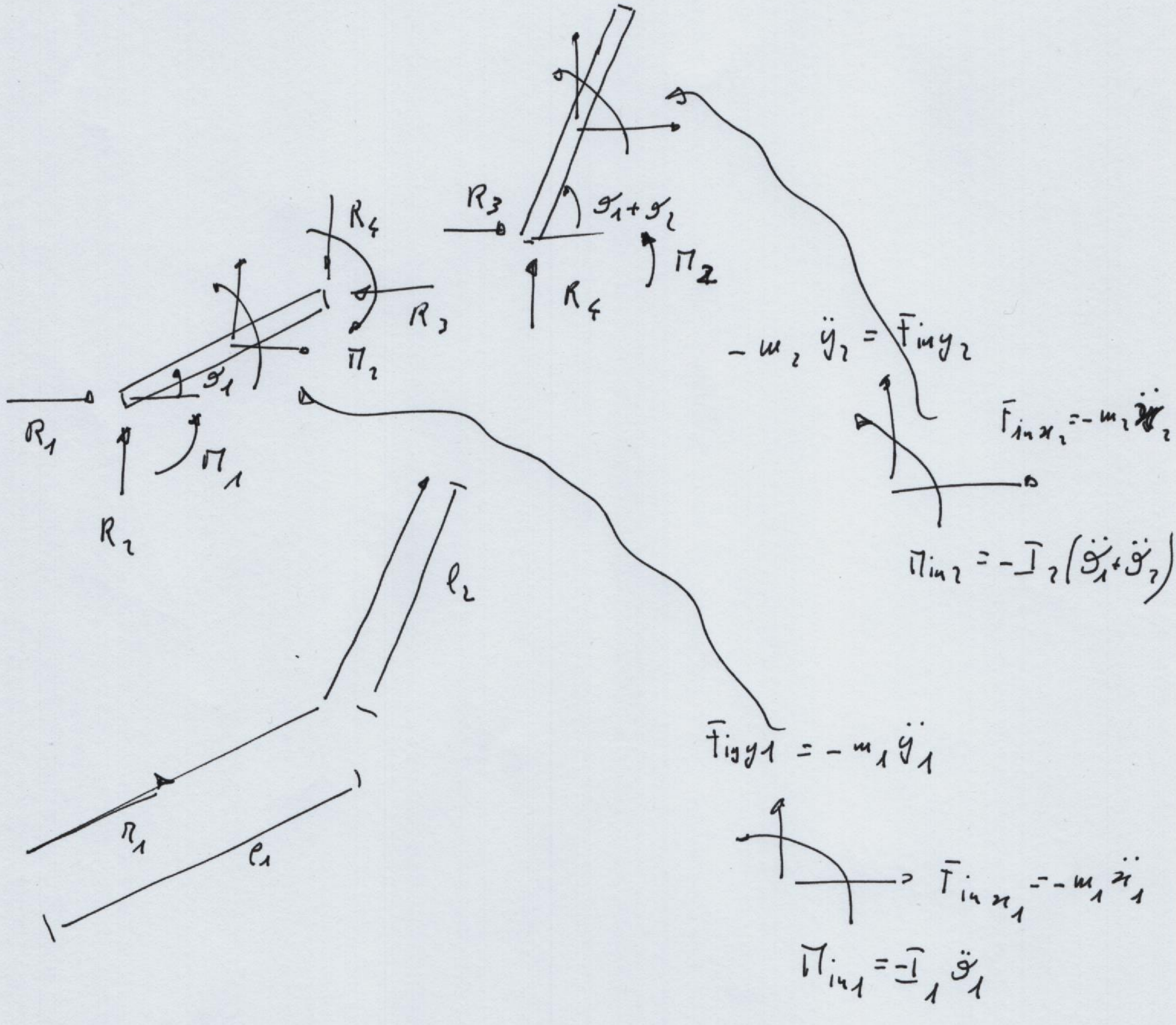
# Dinamica del robot



Eq. dinamico

$$
\begin{cases}
R_1 - R_3 + F_{in\,x_1} = 0 \\
R_2 - R_4 + F_{in\,y_1} = 0 \\
(R_1 + R_3)\dfrac{\ell_1}{2} s\vartheta_1 - (R_2 + R_4)\dfrac{\ell_1}{2} c\vartheta_1 + M_1 - M_2 + M_{in\,1} = 0 \\
\\
R_3 + F_{in\,x_2} = 0 \\
R_4 + F_{in\,y_2} = 0 \\
R_3 \dfrac{\ell_2}{2} s(\vartheta_1 + \vartheta_2) - R_4 \dfrac{\ell_2}{2} c(\vartheta_1 + \vartheta_2) + M_2 + M_{in\,2} = 0
\end{cases}
$$

Esplicitiamo $M_1$ ed $M_2$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\ell_1}{2} s\vartheta_1 & +\frac{\ell_1}{2} c\vartheta_1 & -\frac{\ell_1}{2} s\vartheta_1 & +\frac{\ell_1}{2} c\vartheta_1 \\ 0 & 0 & -\frac{\ell_2}{2} s(\vartheta_1+\vartheta_2) & +\frac{\ell_2}{2} c(\vartheta_1+\vartheta_2) \end{bmatrix}}_{A}
\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix}
-
\begin{Bmatrix} M_{in\,1} \\ M_{in\,2} \end{Bmatrix} = 0
$$

dove

$$
\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} -F_{in\,x_1} - F_{in\,x_2} \\ -F_{in\,y_1} - F_{in\,y_2} \\ -F_{in\,x_2} \\ -F_{in\,y_2} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} -m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2 \\ -m_1\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 \\ -m_2\ddot{x}_2 \\ -m_2\ddot{y}_2 \end{Bmatrix}
= -
\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & m_2 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{M}
\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix}
$$

## Calcolo delle accelerazioni

$$G_1 = \frac{l_1}{2} \begin{Bmatrix} c\vartheta_1 \\ s\vartheta_1 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{G}_1 = + \frac{l_1}{2} \begin{Bmatrix} -s\vartheta_1 \\ c\vartheta_1 \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1$$

$$\boxed{\ddot{G}_1 = \frac{l_1}{2} \begin{Bmatrix} -c\vartheta_1 \\ -s\vartheta_1 \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{l_1}{2} \begin{Bmatrix} -s\vartheta_1 \\ c\vartheta_1 \end{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1}$$

$$G_2 = l_1 \begin{Bmatrix} c\vartheta_1 \\ s\vartheta_1 \end{Bmatrix} + \left(l + \frac{l_2}{2}\right) \begin{Bmatrix} c(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ s(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{G}_2 = {} & l_1 \begin{Bmatrix} -c\vartheta_1 \\ -s\vartheta_1 \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1^2 + l_1 \begin{Bmatrix} -s\vartheta_1 \\ c\vartheta_1 \end{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 + \\ & + \left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right) \begin{Bmatrix} -c(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ -s(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{Bmatrix} (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + \left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right) \begin{Bmatrix} -s(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ c(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{Bmatrix} (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) \end{aligned}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = A\,M \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}}_{I} \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ D \\ \\ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ E(\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2) \\ \\ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix}$$

$$F \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = A\,M \left( D \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} + E \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} \right) + I \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{F^{-1}(A\,M\,D + I)}_{B} \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{F^{-1} A\,M\,E}_{C} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\tau = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = B \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} + C \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix}$$

- Più in generale, se vi sono forze gravitazionali

$$\tau = B(q)\,\ddot{q} + C(q, \dot{q})\,\dot{q} + g(q) \quad , \text{ dove } \quad q = \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix}$$