

Dispense di Meccanica Razionale

Prof. Maura Ughi

Contents

1	Sistemi materiali, vincoli, sistemi olonomi	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Sistemi Rigidi	4
1.3	Sistemi materiali deformabili	8
1.4	Vincoli	9
1.5	Sovrapposizione di vincoli, sistemi ipostatici, isostatici ed iperstatici	15
1.6	Sistemi articolati e travature	21
1.7	Classificazione delle forze agenti su un sistema materiale (esterne, interne, attive, reattive, concentrate, distribuite)	26
1.8	Soluzione degli esercizi	28
1.8.1	Esercizio 1.1	28
1.8.2	Esercizio 1.2	30
1.8.3	Esercizio 1.3	30

Chapter 1

Sistemi materiali, vincoli, sistemi olonomi

1.1 Introduzione

Presentiamo, per iniziare, una serie di *modelli* di corpi naturali che studieremo durante il corso. Quando si studiano le *Leggi di Keplero*, cioè il moto dei pianeti intorno al Sole, i pianeti e lo stesso Sole possono essere considerati come dei *punti materiali*. Un dato osservatore, per riuscire ad individuare la posizione rispetto a se stesso di uno di tali *punti*, in un dato istante di tempo, darà tre coordinate del punto in un sistema di riferimento (cartesiano ortogonale) da lui stesso scelto. Ad esempio, se lo studio riguarda il moto della Terra rispetto al Sole, il sistema materiale oggetto di studio sarà dato da *un punto materiale libero nello spazio fisico a tre dimensioni*; essendo tre le coordinate necessarie a dare la posizione del punto rispetto al dato osservatore Σ ; diremo che il sistema ha tre gradi di libertà. Essendo, inoltre, *libero* le tre coordinate del punto nel riferimento scelto da Σ (che individueremo dandone l'origine Ω ed i versori dei tre assi cartesiani coordinati $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$, brevemente in simboli: $\Sigma(\Omega; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$) sono libere di variare indipendentemente l'una dall'altra e si diranno *coordinate libere* del sistema (o in molti testi coordinate Lagrangiane). Se invece stiamo considerando tutto il sistema solare, cioè Sole e pianeti, l'osservatore Σ dovrà dare contemporaneamente la posizione di tutti i punti del sistema. Sia N il numero di tali punti: diremo che $3N$ sono i gradi di libertà del sistema \mathcal{S} (*sistema di N punti materiali liberi*) e le $3N$ coordinate, in un ordine definito una volta

per tutte, saranno le $3N$ coordinate libere del sistema \mathcal{S} .

È bene notare che il modello del *punto materiale* non ha niente a che vedere con le dimensioni *assolute* del corpo in esame, cioè non è un oggetto *piccolo*, nel senso comune. Come abbiamo detto, infatti, tutta la Terra può essere considerata un *punto materiale* se il problema ha scala cosmica, mentre un atomo non può essere considerato un *punto materiale* se ne studiamo la struttura a scala atomica. il concetto dipende sia dalle dimensioni relative dell'oggetto sia da quello che dello stesso oggetto vogliamo studiare.

Supponiamo ora di voler studiare i *moti propri della Terra* (rotazione diurna, precessione degli equinozi, rotazione dell'asse terrestre, ...)

È evidente che il modello del *punto materiale* non ha più senso (un punto geometrico non ha un asse proprio di rotazione) ha invece senso il modello di *sistema rigido* cioè, secondo il linguaggio comune, un solido.

Cosa intendiamo noi per *sistema rigido*?

Molto semplicemente un corpo che realizza idealmente (le idee di *Platone* !) una qualità dei solidi reali (travi, aste, lamine, ...) e precisamente che la distanza tra due punti qualsiasi del solido non varia comunque vari la sua *configurazione* (rispetto all'osservatore dato). È ovvio che in un solido fisico reale l'affermazione precedente è vera solo in modo approssimato e purché non si sottoponga il solido dato a trattamenti troppo distruttivi (una trave si può segare, bruciare o comunque col tempo si deforma un po'). Ma, appunto, in taluni casi il modello ideale *sistema rigido* dà buoni risultati (come nel caso dei moti propri terrestri) ed è comunque una solida base nello studio più approfondito dell'oggetto fisico (gli spostamenti di una *trave deformabile* saranno gli *spostamenti rigidi* della trave pensata rigida più le deformazioni che essa subisce). I sistemi rigidi saranno molto presenti nel corso quindi li studieremo in dettaglio (vedi paragrafo 1.2).

Se poi vogliamo studiare la forma della terra (geoide) oppure i terremoti, non ha più senso considerare la Terra come rigida, ma dovremo pensarla come un solido (continuo) deformabile (vedi paragrafo 1.3). Altro tipo di sistemi deformabili sono quelli costituiti in prima approssimazione da più rigidi articolati tra loro, ad esempio un compasso o un paio di forbici rientrano in tale categoria. (vedi paragrafo 1.6).

1.2 Sistemi Rigidi

L'idea fondamentale per studiare un rigido è quella di introdurre, oltre all'osservatore $\Sigma(\Omega; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, che è il soggetto che studia il rigido, un secondo osservatore *solidale* al rigido stesso. Denoteremo nel seguito tale osservatore con S , l'origine $O \in \mathcal{R}$, assi $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ (ortogonali al solito), brevemente utilizzeremo la notazione $S(O/\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$. Preso un punto qualsiasi B del rigido \mathcal{R} , la sua posizione rispetto ad S non varia, qualunque sia la posizione che S assume rispetto all'osservatore Σ . Quindi per determinare la posizione di un punto dato B di \mathcal{R} rispetto a Σ , basta che questo conosca come sono disposti l'origine e gli assi di S , ovviamente rispetto a se stesso, oltre che, naturalmente, i dati che individuano il punto B del rigido nel sistema dell'osservatore solidale al solido in movimento.

Esempio 1.1

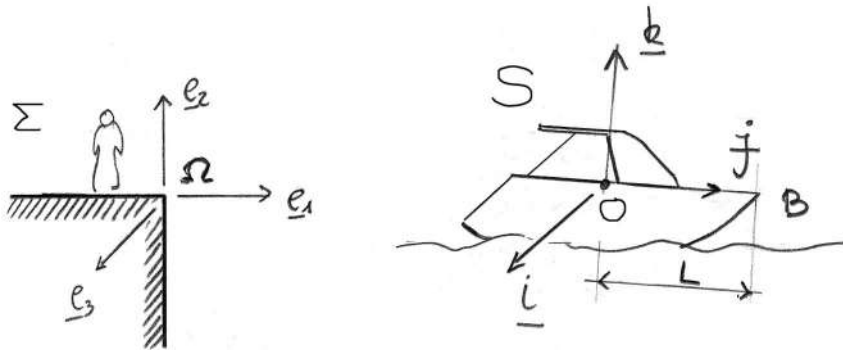


Figure 1.1:

B in S ha coordinate (cartesiane) $B = (0, L, 0)$ (denoteremo in seguito il vettore di posizione con queste componenti con la lettera maiuscola \underline{X}_B). Per determinare la posizione di B relativamente a Σ (di seguito denotata con la lettera minuscola \underline{x}_B) dovremo definire la *posizione* di S relativa a Σ :

1. la posizione di O in Σ ; per questo ci vogliono le tre coordinate di O in Σ

2. l'orientazione degli assi di S rispetto a quelli di Σ ; per trovare questi esistono vari modi (vedi in seguito, ad esempio, il capitolo 3, paragrafo 2), ad esempio:

- dare la posizione dell'asse \underline{i} di S relativo a Σ , essendo O già dato, si devono dare, in più, altre due coordinate angolari
- dare la posizione di \underline{j} in Σ , essendo \underline{j} ortogonale ad \underline{i} , ed essendo già dati O e \underline{i} , basta dare un'altra coordinata angolare per definire il problema
- essendo dati O, \underline{i} , \underline{j} in Σ , l'ultimo versore \underline{k} viene determinato di conseguenza, grazie all'orientazione della terna

Complessivamente quindi per dare quella che d'ora in poi chiameremo *configurazione* di S (e quindi del rigido \mathfrak{R}) rispetto a Σ abbiamo bisogno di sei coordinate (tre per l'origine e tre per l'orientazione degli assi di S). Tali coordinate possono variare indipendentemente le une dalle altre. Sono cioè *libere o lagrangiane*.

Diremo quindi che un rigido \mathfrak{R} libero di muoversi nello spazio fisico a tre dimensioni *ha sei gradi di libertà*. Da un punto di vista geometrico abbiamo semplicemente da esprimere le coordinate di un dato punto B in due diversi riferimenti cartesiani ortogonali cioè Σ ed S. Avremo quindi, per ogni punto B del rigido \mathfrak{R} che:

$$\begin{array}{ccc} \underline{x}_B & = & \underline{x}_0 + R \underline{X}_B \\ \text{in } \Sigma & \text{in } \Sigma & \text{in } S \end{array} \quad (1.1)$$

dove R è la matrice ortogonale 3 x 3 di trasformazione tra i due sistemi e dipende da tre coordinate libere (vedi in seguito Cap 3).

Nota:

Lo spazio fisico in cui si muove il rigido (es. la barca del disegno) è l'usuale spazio a tre dimensioni spaziali, però le coordinate di un punto qualsiasi del rigido, e così la sua velocità ed accelerazione, dipendono dalle sei coordinate libere (le tre di O più le tre di orientazione degli assi). Quindi un rigido libero è un *oggetto* che dipende da sei coordinate libere, da un punto di vista geometrico il suo *spazio* naturale ha sei dimensioni spaziali (ed in meccanica razionale viene detto *spazio delle configurazioni*). Ricordare quindi di studiare e capire bene l'analisi di funzioni con numero di variabili $n \geq 3$,

poichè un qualsiasi solido ne ha bisogno. Per approfondimenti sullo spazio delle configurazioni vedi e.g. [FM], [A]

Quanto sopra vale per un rigido nello spazio fisico tridimensionale; nelle applicazioni (ed anche per semplicità di comprensione e di calcolo) si usa considerare un rigido *piano* (e.g. lamine di varia forma, aste rettilinee o curve piane) che può spostarsi esclusivamente nel proprio piano e lo si denota come *sistema rigido piano*. Una squadra da disegno che viene spostata in varie posizioni in un piano è un esempio di *rigido piano*, mentre una porta che ruota intorno ai cardini non lo è perchè si muove nello spazio a tre dimensioni.

Essendo ora lo spazio fisico in cui il rigido si muove uno spazio a due dimensioni, entrambi gli osservatori Σ *fisso* ed S *solidale* hanno bisogno solo di due assi cartesiani ortogonali (o se si preferisce restare nella visione precedente del problema si può prendere l'asse \underline{e}_3 di Σ ortogonale al piano in cui il rigido si muove e l'asse \underline{k} di S sempre parallelo e concorde in verso ad \underline{e}_3).

Esempio 1.2

Prendiamo una lamina triangolare (e.g. un triangolo rettangolo OQP di lati a e b)

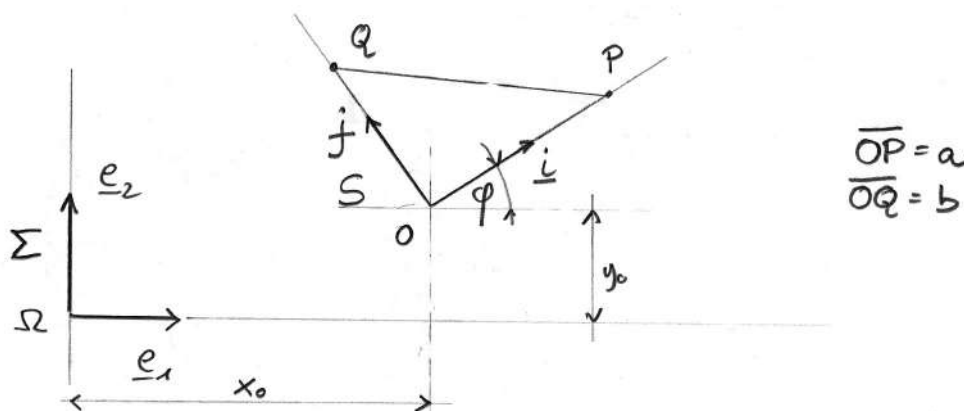


Figure 1.2:

Definiti x_0, y_0, φ come in figura, si ha dalla geometria che ogni punto B del triangolo è definito dalla relazione:

$$\begin{array}{ccc} \underline{x}_B & = & \underline{x}_0 + R \underline{X}_B \\ \text{in } \Sigma & \text{in } \Sigma & \text{in } S \end{array} \quad (1.2)$$

dove, usando la notazione algebrica, abbiamo:

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Abbiamo quindi in componenti che:

$$X_B = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ y_0 + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Cioè tornando alla notazione vettoriale si ha quindi:

$$\underline{x}_B = (x_0 + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi)\underline{e}_1 + (y_0 + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi)\underline{e}_2 \quad (1.4)$$

Una volta fissato il punto B, cioè le sue coordinate in S (ξ, η) , la sua posizione in Σ , data dalla 1.2 e 1.4 è una funzione di tre coordinate x_0, y_0, φ a valori in \mathfrak{R}^2 ($f : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$).

Da un punto di vista fisico:

1. variare solo x_0 equivale a traslare il rigido in direzione \underline{e}_1
2. variare solo y_0 equivale a traslare il rigido in direzione \underline{e}_2
3. variare solo φ equivale a ruotare il rigido intorno ad O

È evidente che se il rigido è libero di muoversi, le tre coordinate x_0, y_0, φ possono variare indipendentemente le une dalle altre ed esse sono quindi tre coordinate *libere o lagrangiane*. Diciamo quindi che il *rigido piano* ha tre gradi di libertà (pari al numero delle coordinate libere).

Esercizio 1.1

Nell'esempio 1.2 fissiamo il punto B come il punto medio dell'ipotenusa PQ

- Calcolare le coordinate di B in Σ sapendo che:

$$x_0 = 1, y_0 = 0, \varphi = \frac{\pi}{3}$$

- Scrivere le coordinate di B in Σ la variare del tempo t sapendo che:

$$x_0(t) = v_0 t, y_0(t) = h \sin(t), \varphi(t) = \frac{\pi}{4} \sin(t),$$

v_0 ed h costanti

Nota:

Ricordiamo qui che nei ragionamenti fatti precedentemente sono *nascosti* i postulati base della Meccanica Classica e cioè l'invarianza delle misure degli intervalli di lunghezza e di tempo dal moto dell'osservatore. Tali postulati derivano così naturalmente dalla nostra esperienza da essere *invisibili*. Va ricordato però che non possono essere ritenuti validi nell'ambito della Meccanica Relativistica (vedi ad esempio [GO]).

1.3 Sistemi materiali deformabili

Prendiamo in esame due diversi oggetti: un paio di forbici ed un pezzo di corda. Entrambi sono sistemi deformabili, nel senso che la distanza tra due punti del sistema non è costante. Mentre però le forbici sono "modellabili" come due componenti rigide incernierate tra di loro e quindi i gradi di libertà del sistema "forbici" saranno minori del doppio di gradi di libertà di un singolo rigido (per il calcolo preciso rimandiamo al paragrafo ...) un modello simile non è adattabile al pezzo di corda (e tanto meno ad una porzione di un liquido o di un gas).

Per descrivere la configurazione di un pezzo di corda si usa introdurre:



Figure 1.3:

Γ^* configurazione di riferimento

Γ configurazione generica

Si definisce una configurazione di riferimento della corda Γ^* (e.g. rettilinea); dare la generica configurazione equivale a dare una curva Γ i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con i punti di Γ^* (poiché dello stesso pezzo di corda si tratta). Quindi l'insieme delle configurazioni di un pezzo di corda è dato da un insieme di funzioni che rappresentano la curva Γ in corrispondenza biunivoca con Γ^* , cioè uno spazio di funzioni e non più uno spazio con un numero finito di coordinate libere.

Per evidenziare la differenza tra i due tipi di sistemi deformabili (tipo forbici o tipo corda) si usa dire che i primi hanno *un numero finito di gradi di libertà*. Durante il corso considereremo il primo tipo di sistemi deformabili, salvo che nel Capitolo 8 in cui daremo esempi di statica dei continui unidimensionali. Sarà allora evidente la maggiore difficoltà matematica per affrontare tali problemi.

1.4 Vincoli

I vincoli si distinguono innanzitutto in vincoli *di posizione o olonomi* che limitano le configurazioni di un dato sistema (per esempio sono vincoli olonomi le cerniere di una porta) e vincoli *anolonomi*. (Sul [LCA] vol 1 cap VI par 1 troviamo che la denominazione *olonomo* deriva dal greco olos (intero) e nomos (legge) e allude alla circostanza che, come si vedrà in seguito, il vincolo si traduca in una relazione funzionale in termini finiti tra le coordinate dei punti, tale denominazione fu introdotta da *H. Hertz* nell'800)

Tra i vincoli *anonomi* come esempio diamo una palla da biliardo o una ruota che rotola senza strisciare sul piano infinitamente esteso, le configurazioni della palla sono qualsiasi ma la velocità del punto di contatto col tavolo è nulla. Altro esempio di vincolo anonomo: se voglio parcheggiare un'automobile in una piazza posso metterla in una qualsiasi posizione ma non posso passare da una posizione ad un'altra in modo arbitrario perché l'auto ha un raggio minimo di sterzata, cioè ho limitazioni sul raggio di curvatura delle possibili traiettorie.

Durante il corso considereremo solo vincoli olonomi (per gli anonomi vedi e.g. [LCA]).

Cerchiamo di modellare i vincoli olonomi partendo da esempi semplici. Consideriamo un'asta rigida OA libera di muoversi su un piano. Come abbiamo visto l'asta ha tre gradi di libertà, scegliamo le sue coordinate libere nel modo usuale (vedi paragrafo 1.3)

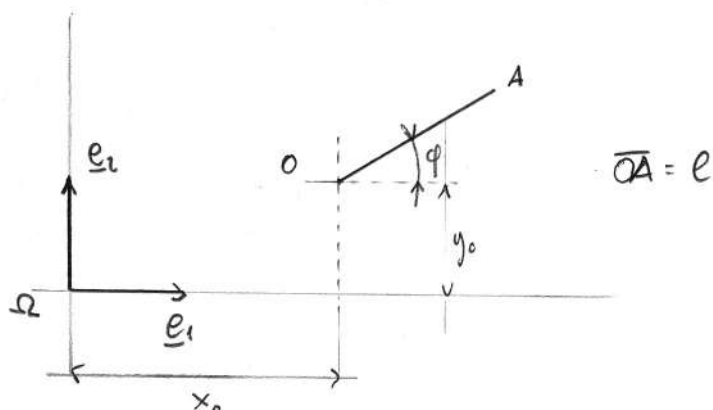


Figure 1.4:

Esempio 1.3

Supponiamo ora di vincolare il punto A a stare su una data retta r del piano. Materialmente il vincolo può essere realizzato con una “cerniera con carrello o mobile”

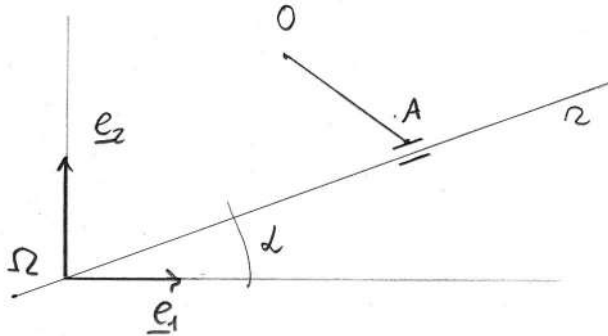


Figure 1.5:

Da un punto di vista geometrico dobbiamo imporre che le coordinate di A (in Σ) soddisfino all'equazione della retta r cioè che (vedi figura 1.5):

$$x_A \sin \alpha - y_A \cos \alpha = 0 \quad (1.5)$$

Essendo che (vedi figura 1.5 e equazione 1.2):

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + l \cos \varphi \\ y_A &= y_0 + l \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.6)$$

ne segue che x_0, y_0, φ non sono più arbitrarie ma debbono soddisfare all'equazione:

$$(x_0 + l \cos \varphi) \sin \alpha - (y_0 + l \sin \varphi) \cos \alpha = 0 \quad (1.7)$$

Se come nel disegno $\cos \alpha \neq 0$ possiamo ad esempio esplicitare y_0 dalla (1.7) come funzione di x_0, φ

$$y_0 = (x_0 + l \cos \varphi) \tan \alpha - l \sin \varphi \quad (1.8)$$

Avremo quindi che x_0 e φ sono ancora libere di variare indipendentemente ma y_0 è determinato una volta fissati x_0 e φ . Diremo che il vincolo 1.7 ha *tolto un grado di libertà* al sistema e che il sistema vincolato ha quindi due gradi di libertà, con coordinate libere x_0 e φ .

Esempio 1.4

Un altro tipo di vincolo si ha se (vedi sempre figura 1.5) la retta r ruota attorno ad Ω con velocità angolare assegnata, ad esempio costante e pari ad ω_0 . In questo caso l'angolo α dipende dal tempo in modo noto, e.g. $\alpha = \omega_0 t$ e quindi procedendo come prima avremo:

$$(x_0 + l \cos \varphi) \cos(\omega_0 t) - (y_0 + l \sin \varphi) \sin(\omega_0 t) = 0 \quad (1.9)$$

Nella (equazione 1.9) il tempo compare esplicitamente e per questo motivo un tale vincolo viene detto mobile mentre il precedente (1.7) viene detto fisso. Nella maggior parte dei casi del corso parleremo di vincoli fissi per semplicità.

Esempio 1.5

Ancora un'altra possibilità è, sempre in riferimento alla stessa figura 1.5, che A debba stare sopra la retta r (vincolo di *appoggio in A*) Tale tipo di vincolo viene detto unilatero perché limita le configurazioni solo da una parte. Se l'asta è staccata dalla retta r essa conserva tutti i suoi tre gradi di libertà perché può spostarsi come vuole, se invece siamo in una configurazione di confine con A sulla retta, avremo invece che un'equazione, una disequazione del tipo:

$$(x_0 + l \cos \varphi) \sin \alpha - (y_0 + l \sin \varphi) \cos \alpha \leq 0 \quad (1.10)$$

Infatti

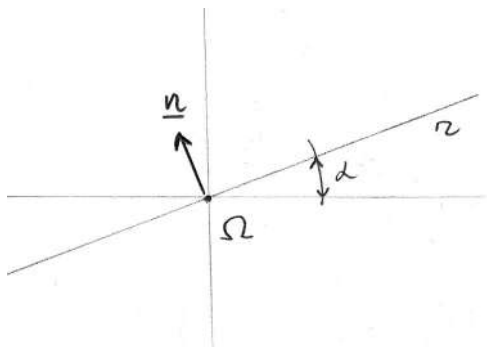


Figura 1.5'

$$\underline{n} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$$

Il vincolo adesso é

$$\underline{x}_A \cdot \underline{n} \geq 0$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \underline{x}_A \cdot \underline{n} &= (x_A \underline{e}_1 + y_A \underline{e}_2) \cdot (-\sin\alpha \underline{e}_1 + \cos\alpha \underline{e}_2) \\ &= -x_A \sin\alpha + y_A \cos\alpha \\ &= -(x_0 + l \cos\varphi) \sin\alpha + (y_0 + l \sin\varphi) \cos\alpha \geq 0 \end{aligned}$$

In contrapposizione a questo il vincolo dell'esempio 1.3, $A \in r$, espresso dalla (1.5) viene detto *bilatero*

Salvo avviso contrario avremo a che fare con vincoli di tipo $A \in r$ (Esempio 1.3), la cui denominazione completa, e un po' farraginoso, é: *vincolo olonomo fisso, bilatero e semplice*. L'ultimo aggettivo, semplice, significa che toglie un solo grado di libertà.

Per brevità parleremo in seguito di *vincolo semplice*.

Nota di approfondimento

Cerchiamo di generalizzare l'esempio 1.3. Siamo partiti da un certo sistema a tre gradi di libertà, quindi con tre coordinate libere: $q_1 = x_0, q_2 = y_0, q_3 = \varphi$ (nel seguito le coordinate libere verranno indicate da una q minuscola più un indice).

Il vincolo dell'esempio 1.3 é stato espresso dalla (1.7)

$$f(q_1, q_2, q_3) = (q_1 + l \cos q_3) \sin\alpha - (q_2 + l \sin q_3) \cos\alpha = 0 \quad (1.11)$$

Generalizzando, se un sistema materiale S_L ha n gradi di libertà di partenza, quindi con n coordinate libere $(q_1, \dots, q_n) = \underline{q} \in \mathbf{R}^n$, un vincolo semplice é definito dall'equazione:

$$f(\underline{q}) = f(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (1.12)$$

$f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$; f regolare. Dove con f regolare intendiamo una funzione C^2 continua con derivate prime e seconde anch'esse continue.

È chiaro però che ad f dobbiamo imporre delle condizioni (verificate nel caso dell'Esempio 1.3) che sono:

- *Esistenza*: vale a dire l'insieme C definito da $C = \{ \underline{q} : f(\underline{q}) = 0 \}$ non deve essere vuoto (altrimenti avremmo dei sistemi fantasma).

Esempio 1.6

Per capire meglio pensiamo alla solita asta rigida OA sul piano e consideriamo il “vincolo” $f = 0$ con $f(x_0, y_0, \varphi) = x_0^2 + y_0^2 + 1$ questo è un vincolo fantasma perchè $x_0^2 + y_0^2 \geq 0$ e quindi non può essere uguale a -1

- *toglie un solo grado di libertà = semplice*

Esempio 1.7

Sempre pensando alla solita asta OA consideriamo il vincolo $f = 0$, con $f(x_0, y_0, \varphi) = x_0^2 + y_0^2$, abbiamo allora che deve essere $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, cioè O deve coincidere con Ω e l'asta può solo ruotare attorno ad O , quindi il sistema ha un solo grado di libertà ed il vincolo ha tolto due gradi di libertà al sistema, quindi non è un vincolo semplice.

Per capire come esprimere la condizione di *semplicità* in modo operativo torniamo all'Esempio 1.3

In quel caso avevamo esplicitato la (1.7) rispetto ad una coordinata (la y_0) che era quindi diventata funzione delle altre due. Quindi la condizione di *semplicità* si può precisare chiedendo che “l'equazione $f = 0$ sia esplicitabile rispetto ad una delle coordinate in ogni punto dell'insieme C ”. Il teorema di Dini (vedi e.g. [BPS] Cap II Teor. 5.1) ci permette di verificare la condizione sopra scritta (per f regolare). Precisamente la condizione diventa, operativamente:

$$\|\nabla f\|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial q_n} \right)^2 \neq 0 \text{ in } C = \{ \underline{q} : f(\underline{q}) = 0 \} \quad (1.13)$$

Nell'esempio 1.7, si ha che $f(x_0, y_0, \varphi) = x_0^2 + y_0^2$

$$C = \{x_0 = 0, y_0 = 0, \varphi \text{ generico}\}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 = (2x_0)^2 + (2y_0)^2 = 0 \text{ in } C$$

e quindi tale vincolo non é di tipo semplice (in effetti toglie due gradi di libert )


Esercizio 1.2

Verificare la condizione (1.13) nell'Esempio 1.3

1.5 Sovrapposizione di vincoli, sistemi ipostatici, isostatici ed iperstatici

Al solito iniziamo a parlare di tali sistemi mediante un esempio:

Esempio 1.8

Prendiamo un'asta \overline{OA} e supponiamo sia vincolata con una cerniera in O ad un punto fisso di Σ e.g. Ω (simbolo tecnico )

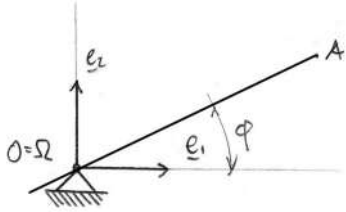


Figure 1.6:

L'asta può solo ruotare attorno ad O , φ é l'unica coordinata libera, l'asta ha un gradi di libertà quindi la cerniera fissa ha tolto due gradi di libertà. Partendo dalle tre coordinate lagrangiane dell'asta libera sul piano x_0, y_0, φ il vincolo *cerniera in O* viene espresso analiticamente attraverso le seguenti due equazioni:

$$(V_1) : x_0 = 0$$

$$(V_2) : y_0 = 0$$

Ciascuna di queste due equazioni si può interpretare come un vincolo semplice (vedi 1.11). Precisamente V_1 come un carrello che vincola O all'asse \underline{e}_2 e V_2 come un carrello che vincola O all'asse \underline{e}_1 .

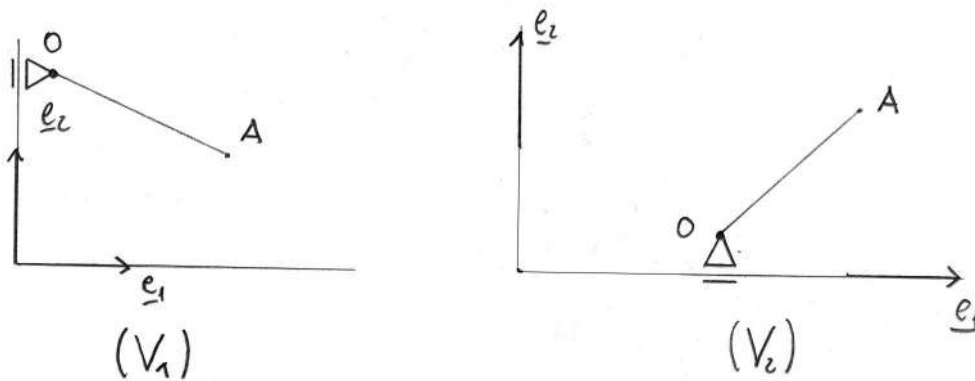


Figure 1.7:

Quindi il vincolo *fisico* cerniera in O fissata ad Ω , si può vedere come la sovrapposizione di due vincoli semplici, ciascuno dei quali toglie un grado di libertà al sistema libero di partenza.

In questa operazione di *sovrapposizione di vincoli* bisogna però usare una certa cautela, consideriamo a tal proposito il seguente esempio:

Esempio 1.9

Solita asta OA libera sul piano e sottoposta ai due vincoli semplici:

$$\begin{aligned} (V_1') : O \in r \\ (V_2') : O \in r' \end{aligned}$$

con r ed r' rette date nel piano.

É evidente che se i due vincoli devono valere insieme e togliere due gradi di libertà al sistema dobbiamo avere le seguenti due condizioni:

1. compatibilità tra i due vincoli, cioè r ed r' non possono essere delle rette tra loro parallele e distinte

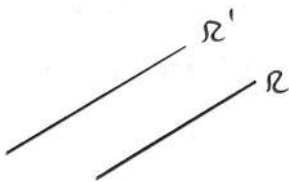


Figura 1.7'

2. indipendenza tra i due vincoli, cioè r ed r' non devono essere coincidenti altrimenti di fatto reimpongo due volte lo stesso vincolo e quindi tolgo un solo grado di libertà al sistema

Una volta verificate le condizioni 1 e 2, e quindi che r ed r' siano due rette distinte ed incidenti, i due vincoli insieme mi daranno che O deve coincidere col punto di intersezione tra r ed r' , cioè un vincolo di tipo *cerniera fissa* (quindi tolgo due gradi di libertà). Il sistema così vincolato ha un grado di libertà, si può cioè muovere, diremo allora che é un sistema *ipostatico* (o anche in alcuni testi di Meccanica Razionale: *labile*).

Tralasciando per il momento il modo operativo di verificare le condizioni precedenti (vedi Cap. 2 par. 6) consideriamo altri esempi prendendo in esame l'asta OA

Esempio 1.10 (*Incastro*)

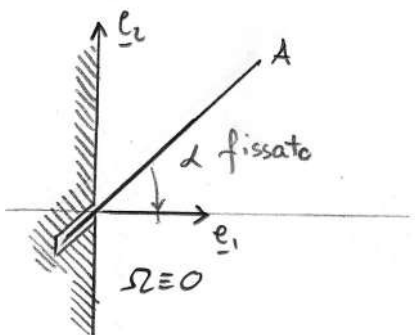


Figure 1.8:

Questo vincolo si può vedere come la sovrapposizione dei tre vincoli semplici seguenti:

$$\begin{aligned} (V_1) \quad x_0 &= 0 \\ (V_2) \quad y_0 &= 0 \\ (V_3) \quad \varphi - \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Esempio 1.11 (*Cerniera fissa e appoggio*)

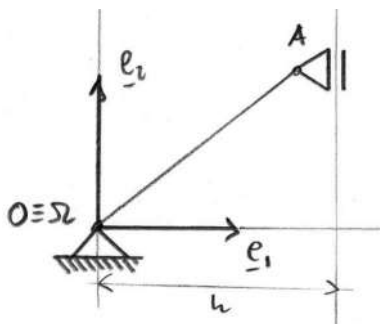


Figure 1.9:

Di nuovo si ha la sovrapposizione di tre vincoli come in precedenza:

$$\begin{aligned}
(V_1) \quad & x_0 = 0 \\
(V_2) \quad & y_0 = 0 \\
(V_3) \quad & x_A - h = x_0 + l \cos(\varphi) - h = 0, \quad h < l
\end{aligned}$$

In entrambi gli esempi 1.10 e 1.11 tutti i gradi di libertà di partenza sono stati tolti dai tre vincoli semplici. In tal caso si dice che il sistema è vincolato in modo isostatico. Il termine deriva dal greco isos (uguale), notiamo che, se si toglie uno dei tre vincoli il sistema si può muovere.

Continuiamo con un altro esempio:

Esempio 1.12 (*Due cerniere fisse*)

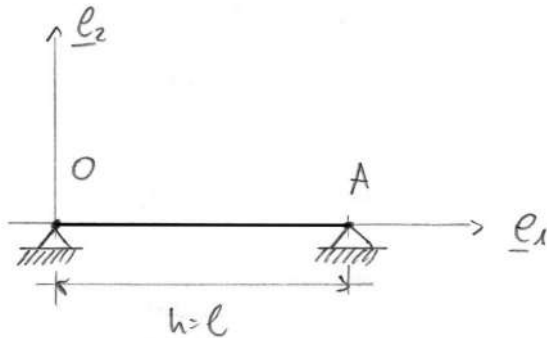


Figure 1.10:

Qui abbiamo quattro vincoli semplici:

$$\begin{aligned}
(V_1) \quad & x_0 = 0 \\
(V_2) \quad & y_0 = 0 \\
(V_3) \quad & x_A - h = x_0 + l \cos \varphi - h = 0, \quad h = l \\
(V_4) \quad & y_A = y_0 + l \sin \varphi = 0
\end{aligned}$$

I gradi di libertà di partenza erano 3 mentre i vincoli semplici imposti sono 4, la differenza è -1. Si dice allora che il sistema è vincolato in modo iperstatico (uno dei vincoli può essere tolto senza che per questo il sistema diventi labile)

Table 1.1: Quadro Riassuntivo

Dato un sistema materiale S con n gradi di libertà di partenza e sottoposto ad m vincoli semplici tali che valgano le condizioni di:

1. Compatibilità dei vincoli
2. Indipendenza dei vincoli

diremo che:

$m < n$ IPOSTATICO (labile), S ha $l = n - m$ gradi di libertà ed l coordinate libere

$m = n$ ISOSTATICO

$m > n$ IPERSTATICO

Vedremo in statica (Cap. 3) l'importanza di tali differenziazioni

Esercizio 1.3

Dire di che tipo sono i seguenti sistemi:

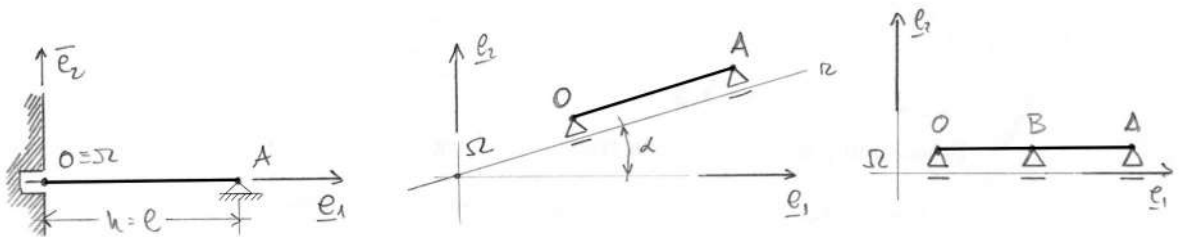


Figure 1.11:

e scrivere analiticamente tutti i vincoli semplici imposti al sistema.

Nota:

Nel capitolo dedicato al lavoro virtuale ed agli spostamenti virtuali vedremo come si possono operativamente verificare le condizioni di indipendenza dei vincoli (vedi Cap 2 Par 6)

1.6 Sistemi articolati e travature

Con il termine sistemi *articolati o travature* si intendono sistemi composti da più componenti rigidi tra loro articolati mediante cerniere. Facciamo un po' di esempi partendo da due aste rigide libere nel piano:

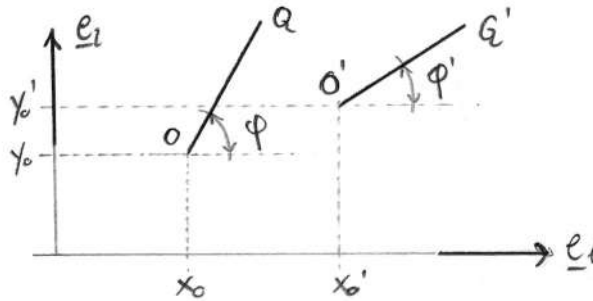


Figure 1.12:

coordinate libere di partenza

$$(x_0, y_0, \varphi, x_0', y_0', \varphi')$$

per semplicità $\overline{OQ} = \overline{O'Q'} = l$

In questo stadio il sistema delle due aste ha in totale 6 gradi di libertà.

Esempio 1.13 (cerniera mobile interna)

Pensiamo in tal caso in pratica ad un paio di forbici o ad un compasso, cioè ad una cerniera che *congiunga* O ad O'

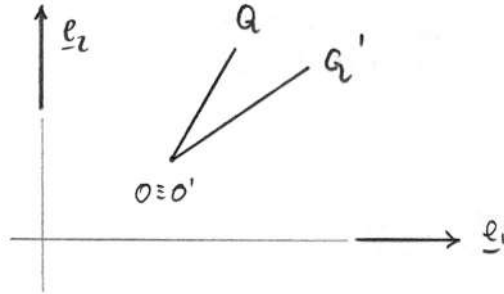


Figure 1.13:

Analiticamente il vincolo fisico é espresso da due *vincoli semplici*

$$\begin{aligned} x_0 = x'_0 &\Rightarrow x_0 - x'_0 = 0 \\ y_0 = y'_0 &\Rightarrow y_0 - y'_0 = 0 \end{aligned}$$

Essendo rispettate le condizioni di compatibilità ed indipendenza vengono tolti 2 gradi di libertà ed il sistema così ottenuto ha quindi 4 gradi di libertà. Verifichiamo che bastano 4 coordinate libere per dare la configurazione, basta a tal proposito prendere, ad esempio, le coordinate $x_0, y_0, \varphi, \varphi'$ (essendo $x'_0 = x_0$ e $y'_0 = y_0$)

Esercizio 1.4

Determinare i gradi di libertà dei seguenti sistemi (vedi fig 1.14 1.15 1.16 1.17) (quante cose si possono fare con 2 aste !) individuando e scrivendo le equazioni dei vincoli semplici coinvolti (se ipostatici indicare le coordinate libere).

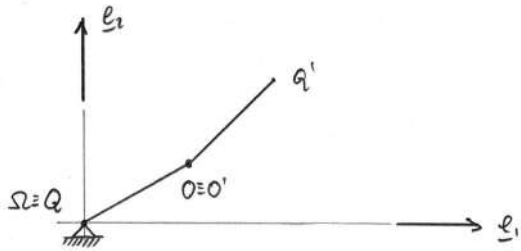


Figure 1.14:

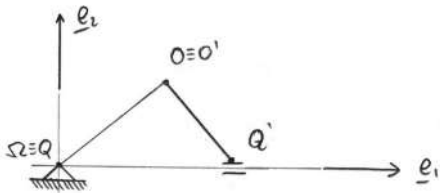


Figure 1.15: Biella - Manovella

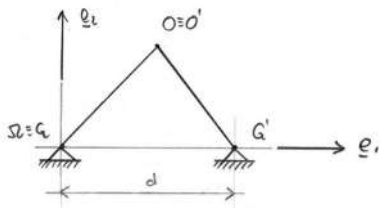


Figure 1.16: Arco a Tre Cerniere

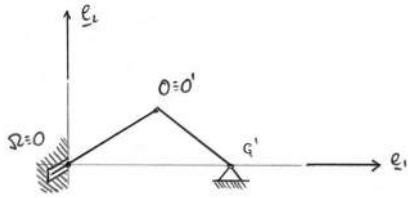


Figure 1.17:

Tra i sistemi articolati hanno particolare importanza per le applicazioni in ingegneria le travature reticolari, che indicheremo brevemente come travature.

Molti *rigidi* reali sono composti da aste incernierate tra loro con cerniere interne, denominate usualmente nodi (delle travature)

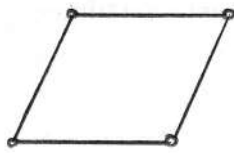


FIG 1

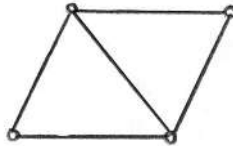


FIG 2

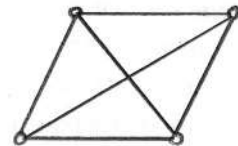


FIG 3

Figure 1.18:

Si usa distinguere tra:

$$\text{Travature} \begin{cases} \textit{deformabili} \\ \textit{indeformabili} \end{cases} \begin{cases} \textit{strettamente indeformabili} \\ \textit{ad aste sovrabbondanti} \end{cases}$$

La nomenclatura appare evidente, comunque per completezza specifichiamo che:

Travature deformabili = presi due punti su due aste diverse della travatura la loro distanza non rimane fissa

Travature indeformabili = presi due punti qualsiasi nella travatura la loro distanza é fissata

Travature strettamente indeformabili = se si toglie un'asta qualsiasi la travatura diventa deformabile

Travature ad aste sovrabbondanti = anche togliendo un'asta particolare del sistema esso rimane indeformabile

La ragione di tale precisazione sarà chiara in statica (vedi Cap 6) al momento di calcolare gli sforzi interni alle aste (e quindi l'affidabilità statica delle travature in esame). Negli esempi di figura (1.18) é ovvio che:

1. é deformabile
2. strettamente indeformabile
3. ad aste sovrabbondanti

Una domanda naturale é: volendo costruire una travatura *indeformabile* con un numero di nodi assegnato (diciamo N) quale é il numero minimo di aste da utilizzare? Oppure, formulata in un altro modo: dati N nodi, quante aste devo avere perchè la travatura sia strettamente indeformabile?

Per rispondere conviene mettersi in uno schema mentale in cui si focalizza l'attenzione sui nodi, guardare cioè ai nodi come *punti materiali* e alle aste come *vincoli* che rendono fissa la distanza tra due cerniere date (vincoli di rigidità) (cioè pensiamo a cerniere *pesanti* ed ad aste *leggere*). Limitandoci alle travature piane possiamo allora riformulare la domanda come segue: dato un sistema di N punti liberi sul piano quanti sono i vincoli che devo imporre perchè il sistema vincolato sia un rigido? Detto m il numero di vincoli (cioè delle aste) poiché un rigido piano ha tre gradi di libertà ed un sistema piano di N punti ha $2N$ gradi di libertà deve essere che: $2N - m = 3$ e quindi $m = 2N - 3$.

Data quindi una travatura reticolare piana e contando il numero N dei nodi ed m delle aste si ha che: Se $m < 2N - 3$ la travatura é deformabile.

Esercizio 1.5

Una travatura con N nodi ed $m = 2N - 3$ aste é sempre strettamente indeformabile?

Esercizio 1.6

Definire il carattere delle seguenti travature:

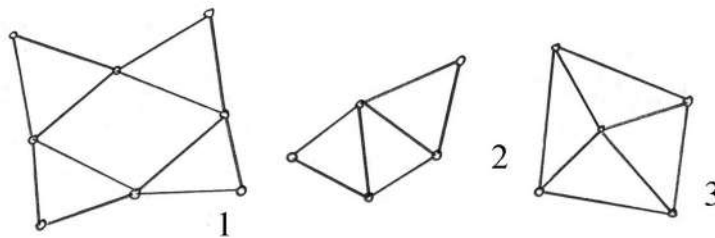


Figure 1.19:

Per approfondimenti sulle travature reticolari vedi [FDRM] , [LCA].

1.7 Classificazione delle forze agenti su un sistema materiale (esterne, interne, attive, reattive, concentrate, distribuite)

Una volta definito un certo sistema materiale, e prima di studiarne la statica, oggetto dei prossimi capitoli, diamo una classificazione dei vari tipi di forze che agiscono sul sistema. Vi sono varie suddivisioni che verranno chiarite meglio nel seguito e di cui diamo per ora una definizione intuitiva.

1. forze *attive* (tipo forza peso)
forze *reattive* dovute ai vincoli eventualmente presenti e di *risposta* alle forze attive
2. forze *esterne* esercitate da agenti esterni al sistema in esame
forze *interne* esercitate da una parte del sistema su un'altra

3. forze *concentrate* (dette anche carichi concentrati) ciascuna applicata ad un punto definito del sistema, di cui quindi si deve dare sia il punto di applicazione che il vettore forza
- forze *distribuite* (dette anche carichi distribuiti) applicate ad ogni punto del sistema, esempio tipico la forza peso.

Esempio 1.14

Arco a tre cerniere, soggetto alle forze attive disegnate in figura ed al peso, l'elemento tra i punti D ed E rappresenta una molla tesa tra i due punti.

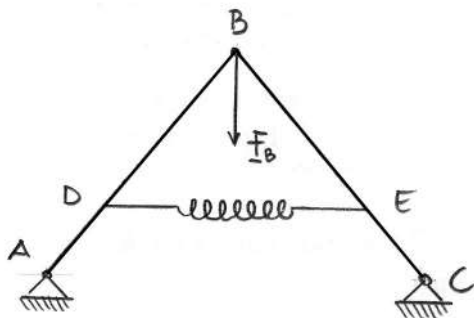


Figure 1.20:

1. forze attive: peso, F_B in B, forze elastiche in D ed E
forze reattive: reazioni delle cerniere in A, B e C
2. forze esterne: peso, F_B in B, reazioni delle cerniere in A e C
forze interne: forze elastiche in D ed E, reazioni della cerniera in B
3. forze concentrate: tutte tranne la forza peso
forze distribuite: forza peso

Anticipiamo qui che:

- la suddivisione tra forze attive e reattive é importante nel Principio dei Lavori Virtuali (Vedi Cap 2)

- la suddivisione tra forze esterne ed interne é importante per le Equazioni Cardinali della Statica (Vedi Cap 5)
- la suddivisione tra forze concentrate e distribuite é importante nello studio degli Sforzi Interni ad ogni singola componente rigida (Vedi Cap 6)

Nota

Nella suddivisione tra forze esterne ed interne é essenziale prima di tutto definire il sistema materiale di cui si parla (ovviamente).

1.8 Soluzione degli esercizi

1.8.1 Esercizio 1.1

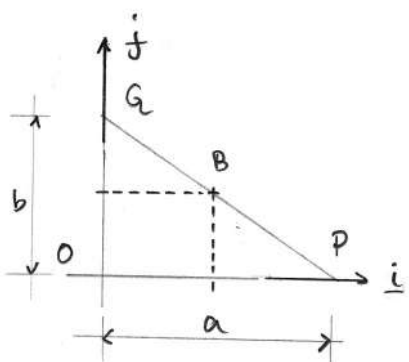


Figure 1.21:

- le coordinate di B in S sono:

$$\underline{X}_B = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix}$$

dalla (1.2) abbiamo che (essendo $\cos(\pi/3) = 1/2$)

$$\underline{x}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a/4 - b\sqrt{3}/4 \\ a\sqrt{3}/4 + b/4 \end{pmatrix}$$

Verifica su disegno

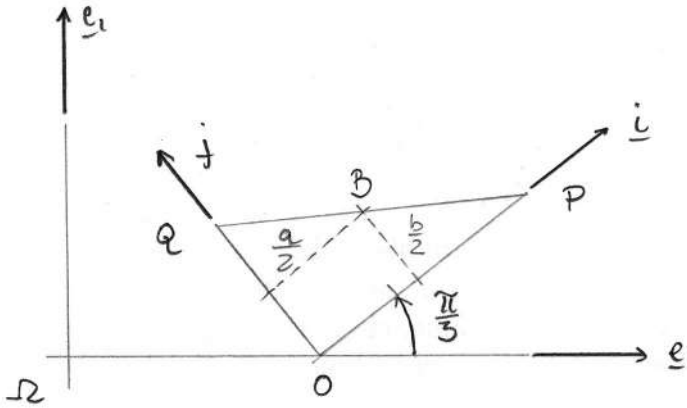


Figure 1.22:

- Da (1.2) si ha inoltre che:

$$\begin{aligned} \underline{x}_B &= \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} v_0(t) \\ h\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2\cos(\frac{\pi}{4}\sin(t)) - b/2\sin(\frac{\pi}{4}\sin(t)) \\ a/2\sin(\frac{\pi}{4}\sin(t)) - b/2\cos(\frac{\pi}{4}\sin(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi

$$x_B(t) = v_0(t) + a/2\cos(\frac{\pi}{4}\sin(t)) - b/2\sin(\frac{\pi}{4}\sin(t))$$

$$y_B(t) = h\sin(t) + a/2\sin(\frac{\pi}{4}\sin(t)) - b/2\cos(\frac{\pi}{4}\sin(t))$$

1.8.2 Esercizio 1.2

$$\begin{aligned} f &= (x_0 + l\cos\varphi)\sin\alpha - (y_0 + l\sin\varphi)\cos\alpha \\ \|\nabla f\|^2 &= (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 + [-l\sin\varphi\sin\alpha - l\cos\varphi\cos\alpha]^2 \\ &= 1 + l^2\cos^2(\varphi - \alpha) \geq 1 > 0 \end{aligned}$$

1.8.3 Esercizio 1.3

- l'incastro in O fornisce i tre vincoli semplici espressi analiticamente nel seguente modo:

$$\begin{aligned} V_1) \quad x_0 &= 0 \\ V_2) \quad y_0 &= 0 \\ V_3) \quad \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Mentre la cerniera fissa in A fornisce i vincoli seguenti:

$$\begin{aligned} V_4) \quad x_A - h &= 0 \quad \rightarrow \quad x_0 + l\cos\varphi - h = 0 \\ V_5) \quad y_A &= 0 \quad \rightarrow \quad y_0 + l\sin\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$n = 3, m = 5, n - m = -2$$

Il sistema é iperstatico di ragione 2.

- (Vedi anche Esempio 1.3) é ovvio che il sistema si può muovere, e risulta quindi ipostatico. Precisamente il vincolo offerto dalla cerniera con carrello in O, con $O \in r$ é del tipo:

$$(V_1) \quad x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha = 0$$

Mentre quello offerto dalla cerniera con carrello in A con $A \in r$ é del tipo:

$$(V_2) \quad x_A\sin\alpha - y_A\cos\alpha = (x_0 + l\cos\varphi)\sin\alpha - (y_0 + l\cos\varphi)\cos\alpha = 0$$

$$n = 3, m = 2, l = n - m = 1$$

Il sistema ha un grado di libertà ed è quindi in grado di muoversi, labile.

Verifica: contare le coordinate necessarie a determinare la posizione dell'asta.

È evidente che basta conoscere la distanza di O da r, quindi una sola coordinata libera ed un unico grado di libertà

- È intuitivamente evidente che, anche se vi sono tre vincoli, essi non sono indipendenti (e.g. data la cerniera O e B la cerniera in A è inutile) ed il sistema può traslare ed ha quindi un grado di libertà. Analiticamente le equazioni dei tre vincoli sono ($\overline{OB} = 1/3L, \overline{OA} = L$)

$$\begin{aligned} (V_1) \quad & y_0 = 0 \\ (V_2) \quad & y_B = y_0 + L/3\sin\varphi = 0 \\ (V_3) \quad & y_A = y_0 + L\sin\varphi = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 1.4

1. Vincoli imposti

cerniera interna

$$\begin{pmatrix} x_0 = x'_0 \\ y_0 = y'_0 \end{pmatrix}$$

cerniera esterna

$$\begin{pmatrix} x_Q = x_0 + l\cos\varphi = 0 \\ y_Q = y_0 + l\sin\varphi = 0 \end{pmatrix}$$

Quattro vincoli semplici quindi $6 - 4 = 2$ gradi di libertà.

Verifica “conto delle coordinate libere”

Dati i due angoli ϑ e ϑ' in figura la configurazione è determinata.

Notare che in questo caso come in molti altri casi conviene cambiare le coordinate libere rispetto a quelle scelte all'inizio per le due aste libere.

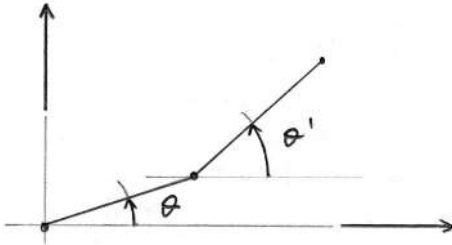


Figure 1.23:

2. oltre i 4 vincoli del caso 1 abbiamo il seguente vincolo:

$$y_{Q'} = y'_0 + l \sin \varphi' = 0$$

Quindi $6 - 5 = 1$ grado di libertà. Verifica coordinate libere: dato l'angolo ϑ di figura la configurazione di tutto il sistema è determinata.

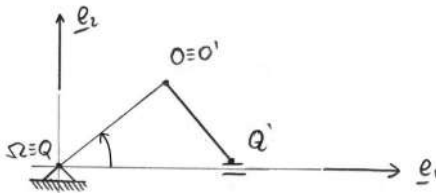


Figure 1.24:

3. oltre i 5 vincoli del caso 2 abbiamo:

$$x_{Q'} = x_{O'} + l \cos \varphi' = d$$

(ovviamente purché $d < 2l$ altrimenti, e vedremo la conseguenza in statica, saltano le condizioni di compatibilità ed indipendenza)

Quindi $6 - 6 = 0$ cioè il sistema è isostatico.

4. Avendo un incastro in Q anche l'angolo φ è fissato, cioè rispetto al caso 3 abbiamo un vincolo in più ($\varphi = \alpha$), quindi questo sistema è iperstatico.

Esercizio 1.5

NO, perché i vincoli devono essere tra loro indipendenti. Esempio $N = 6$
 $m = 12 - 3 = 9$

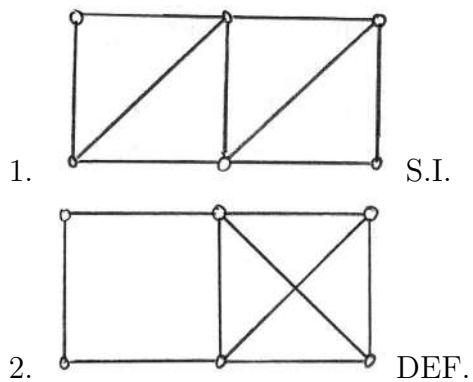


Figure 1.25:

Esercizio 1.6

1. Deformabile
2. Strettamente indeformabile
3. Indeformabile ad aste sovrabbondanti

Dispense di Meccanica Razionale

Prof. Maura Ughi

20 Marzo 2003

Contents

2	Principio dei Lavori Virtuali	2
2.1	Introduzione	2
2.2	Prime applicazioni del P.L.V.	7
2.3	Sistemi materiali soggetti al solo peso	11
2.4	P.L.V. per sistemi ad un grado di libertà	13
2.5	P.L.V. per sistemi ad l gradi di libertà regolari	19
2.6	Approfondimento su spostamenti virtuali con applicazione alle condizioni di indipendenza per i vincoli	24
2.7	Soluzione degli esercizi Proposti nel capitolo	30
2.7.1	Risoluzione Esercizio 2.1	30
2.7.2	Risoluzione Esercizio 2.2	30

Chapter 2

Principio dei Lavori Virtuali

2.1 Introduzione

Consideriamo un sistema materiale a vincoli olonomi, che per brevità chiameremo semplicemente sistema materiale olonomo, sottoposto all'azione di forze e ci proponiamo di studiarne l'equilibrio. Il Principio dei Lavori Virtuali (nel seguito P.L.V.), noto in forme varie fin dall'antichità, focalizza l'attenzione nelle forze agenti sul sistema (forze attive) e tiene conto della presenza dei vincoli solo attraverso le limitazioni geometriche che essi impongono al sistema, senza quindi considerare le forze che i vincoli esercitano appunto per tenere vincolato il sistema (forze di reazione o reattive).

Iniziamo con un esempio molto semplice. Consideriamo un blocchetto, assimilabile per ora ad un punto materiale B, appoggiato ad un tavolo orizzontale. Palesemente il blocchetto é in equilibrio, chiediamoci sotto l'azione di quali forze. Una forza é il peso del blocchetto, mg , (con m massa del blocchetto e g accelerazione di gravità), ma non può esserci solo la forza peso, altrimenti il blocchetto cadrebbe, ci deve essere un'altra forza, dovuta alla presenza del tavolo e che equilibra la forza peso. Tale forza viene detta forza di reazione (del vincolo, in questo caso del tavolo), F^r , con ovvio significato del nome. Per contrasto la forza peso viene detta forza attiva. L'idea base del P.L.V. é di prendere in considerazione le forze attive ed il lavoro che esse compiono se si pensa di *spostare* il sistema materiale in modo qualsiasi purché compatibile con i vincoli.

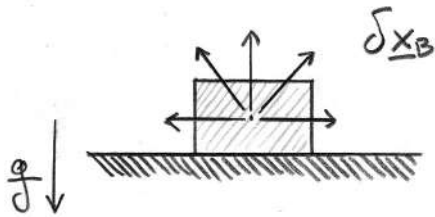


Figure 2.1:

Per il nostro blocchetto appoggiato al tavolo gli spostamenti possibili consentiti dal vincolo tavolo sono quelli disegnati in figura 2.1; useremo il simbolo classico in Meccanica Razionale $\delta \underline{x}_B$ in quanto sono spostamenti solo immaginati (di qui l'aggettivo *virtuale*) e non compiuti effettivamente dal sistema.

Si vede allora che: *All'equilibrio il lavoro virtuale delle forze attive é minore o uguale a zero per ogni spostamento virtuale consentito dai vincoli.* Per verificare che quanto scritto sopra vale solo nella configurazione di equilibrio, pensiamo al blocchetto sospeso sopra al tavolo.

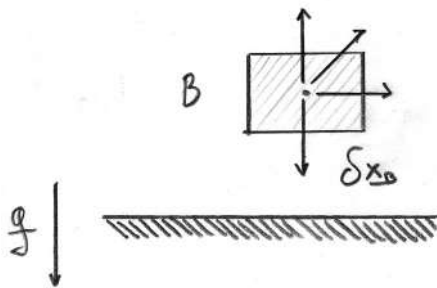


Figure 2.2:

In questa configurazione uno degli spostamenti virtuali é quello verticale verso il basso ed il corrispondente lavoro virtuale del peso é quindi positivo, cioè é violato il P.L.V. ed in effetti il sistema non é in equilibrio, (il blocchetto certo non resta sospeso in aria bensì cade).

Notiamo subito, con riferimento alla figura 2.1, che mentre gli spostamenti tangenti al tavolo sono

invertibili (o reversibili) ; cioè se $\delta \underline{x}_B$ é uno spostamento virtuale anche $-\delta \underline{x}_B$ é uno spostamento virtuale.

gli spostamenti con una componente verso l'alto sono *non invertibili* (o *irreversibili*), negazione di invertibili.

Per gli spostamenti invertibili all'equilibrio il lavoro virtuale delle forze attive é nullo. Questo si vede subito nell'esempio di figura 2.1 perchè il peso é ortogonale al tavolo e quindi agli spostamenti invertibili, ma deve essere vero in genere. Infatti:

se $\delta \underline{x}_B$ é invertibile e $L.V. = \underline{F}_B \cdot \delta \underline{x}_B \leq 0$

• $-\delta \underline{x}_B$ é ancora virtuale $\Rightarrow L.V. \underline{F}_B \cdot (-\delta \underline{x}_B) \leq 0 \Rightarrow$

• $\underline{F}_B \cdot \delta \underline{x}_B = 0$, dovendo essere contemporaneamente:

$\underline{F}_B \cdot \delta \underline{x}_B \leq 0$ e $\underline{F}_B \cdot \delta \underline{x}_B \geq 0$

Consideriamo ora il solito blocchetto di figura 2.1 e applichiamo, oltre al peso, una forza \underline{F} tangente al tavolo.

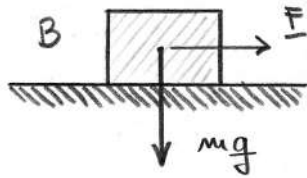


Figure 2.3:

Dall'esperienza si vede che il blocchetto rimane in equilibrio purché:

$$\|\underline{F}\| \leq \gamma \|\underline{mg}\|$$

dove γ é un coefficiente, detto di attrito statico, che dipende dalla natura delle superfici a contatto fra blocchetto e tavolo ed é tanto più piccolo quanto più le superfici sono lisce (se pensiamo ad un blocchetto su ruote lisce ed ad un tavolo di marmo ben levigato, ci convinciamo facilmente che per spostare il blocchetto, cioè per distruggere l'equilibrio, basta una forza orizzontale molto piccola relativamente al peso).

Cosa ci dice nell'esempio di figura 2.3 il P.L.V. ?

Essendo \underline{F} tangente al tavolo, c'è uno spostamento virtuale di B per cui $\underline{F} \cdot \delta \underline{x}_B > 0$ cioè L.V. > 0 quindi per P.L.V. la configurazione in esame non può essere di equilibrio e questa previsione è confermata dall'esperienza se non c'è attrito ($\gamma = 0$ almeno approssimativamente). Quindi: *Il P.L.V. caratterizza l'equilibrio in assenza di attrito* cioè se i vincoli sono *lisci*.

Da qui l'importanza del P.L.V. per studiare l'equilibrio di sistemi, che vogliamo stiano fermi strutturalmente anche senza l'aiuto dell'attrito, che ovviamente favorisce l'equilibrio.

Ci sarà utile in seguito caratterizzare i vincoli lisci tramite il lavoro virtuale che essi compiono. Pensando sempre al blocchetto sul tavolo:

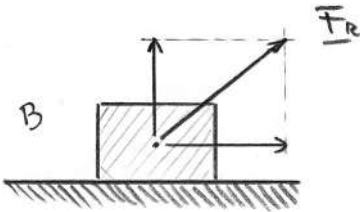


Figure 2.4:

La componente di \underline{F}^r tangente al tavolo è dovuta all'attrito, ed è nulla se il vincolo è liscio. Si vede subito che se il vincolo è liscio, cioè, nell'esempio semplice in figura, \underline{F}^r è ortogonale al tavolo, il L.V. della reazione è ≥ 0 (e $= 0$ per gli spostamenti di B invertibili, vedi a proposito la figura 2.1).

Riassumiamo schematicamente quanto osservato fin'ora:

Equilibrio di sistemi olonomi a vincoli lisci

↕
P.L.V.

All'equilibrio il lavoro virtuale totale delle forze attive deve essere minore o uguale a zero per ogni sistema di spostamenti virtuali consentito dai vincoli (e per spostamenti invertibili deve essere uguale a zero)

Inoltre:

Vincoli Lisci



Il lavoro virtuale totale delle forze di reazione é positivo o nullo per ogni sistema di spostamenti virtuali consentito dai vincoli (ed é pari a zero nel caso di spostamenti tutti invertibili).

Esercizio 2.1

Dato un punto materiale B di massa m soggetto al proprio peso e vincolato alla curva in figura posta in un piano verticale (ad esempio un anellino infilato in un filo di ferro con la forma in figura)

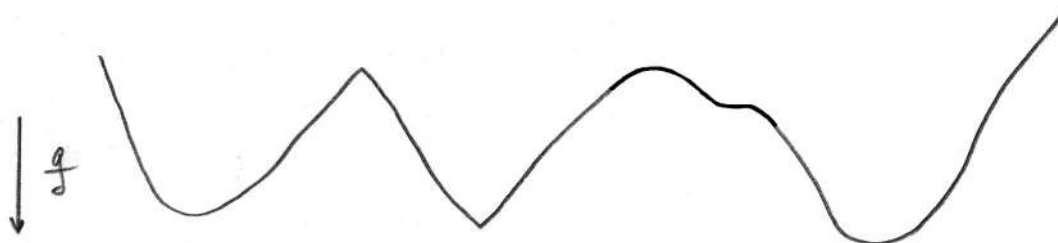


Figure 2.5:

Determinare le configurazioni di equilibrio nell'ipotesi di vincolo liscio.

2.2 Prime applicazioni del P.L.V.

É evidente che per applicare concretamente il P.L.V. é essenziale capire bene cosa sono gli *spostamenti virtuali* e saperli calcolare. Iniziamo con un esempio:

Esempio 2.1 (*Leva*)

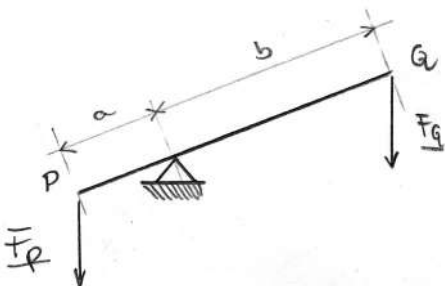


Figure 2.6:

Nell'ottica del P.L.V. le forze da prendere in considerazione sono solo quelle attive, cioè \underline{F}_P applicata in P ed \underline{F}_Q applicata in Q.

É evidente che se il sistema é in equilibrio su P e Q agiscono altre forze dovute all'asta che collega i due punti e alla cerniera fissa in Ω (se su P agisse solo \underline{F}_P non potrebbe fare a meno di muoversi) ma tali forze sono appunto dovute ai vincoli (forze di reazione) e in questa sede non interessano. Quello che invece é essenziale é che la presenza dei vincoli limita gli spostamenti possibili dei punti P e Q, essi non possono piú essere due vettori qualsiasi del piano proprio perchè P e Q non sono *liberi* di muoversi come vogliono ma sono punti di un sistema vincolato. Per determinare tutti gli spostamenti di P e Q concessi dai vincoli, dimentichiamo le forze agenti (e quello che possono far fare ai rispettivi punti di applicazione) e consideriamo il sistema vincolato, introducendo un osservatore fisso $\Sigma (\Omega, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ come in figura 2.7

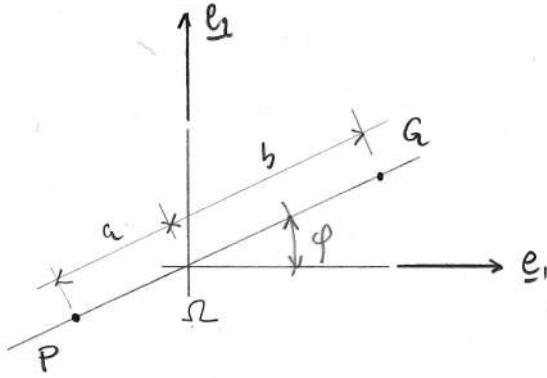


Figure 2.7:

L'asta così vincolata ha un grado di libertà, scegliamo φ come coordinata libera, per ogni φ sono determinate le posizioni di P e Q e tutte le possibili variazioni di tali posizioni si otterranno facendo variare φ di una quantità arbitraria. In analisi si usa in genere la lettera h (o il simbolo $d\varphi$) per gli incrementi arbitrari di una variabile, in Meccanica Razionale storicamente si usa il simbolo $\delta\varphi$, dove δ serve a ricordare che stiamo facendo fare al sistema un movimento *virtuale* per vedere cosa i vincoli permettono di fare indipendentemente da quello che il sistema reale con le forze date effettivamente farà. Detto allora φ un angolo generico e $\varphi + \delta\varphi$ una sua variazione, avremo per la posizione ad esempio di Q che

$$\begin{aligned}\underline{x}_Q(\varphi) &= b\cos\varphi \underline{e}_1 + b\sin\varphi \underline{e}_2 \\ \underline{x}_Q(\varphi + \delta\varphi) &= b\cos(\varphi + \delta\varphi)\underline{e}_1 + b\sin(\varphi + \delta\varphi)\underline{e}_2\end{aligned}$$

Quindi

$$\underline{x}_Q(\varphi + \delta\varphi) - \underline{x}_Q(\varphi) = b[\cos(\varphi + \delta\varphi) - \cos\varphi]\underline{e}_1 + b[\sin(\varphi + \delta\varphi) - \sin\varphi]\underline{e}_2$$

Utilizzeremo lo sviluppo in serie di funzione ad una variabile ed avremo che:

$$\underline{x}_Q(\varphi + \delta\varphi) - \underline{x}_Q(\varphi) = (-b\sin\varphi \underline{e}_1 + b\cos\varphi \underline{e}_2)\delta\varphi + \underline{f}(\delta\varphi)$$

con \underline{f} , vettore infinitesimo di ordine superiore al primo, cioè tale che:

$$\lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{f(\delta\varphi)}{\delta\varphi} = 0$$

Chiameremo *Spostamento Virtuale di Q* e indicheremo con $\delta\underline{x}_Q$ la parte lineare in $\delta\varphi$ dello spostamento $\underline{x}_Q(\varphi + \delta\varphi) - \underline{x}_Q(\varphi)$, cioè nell'esempio

$$\delta\underline{x}_Q = (-b\sin\varphi \underline{e}_1 + b\cos\varphi \underline{e}_2)\delta\varphi = \frac{d\underline{x}_Q}{d\varphi} \delta\varphi$$

Da un punto di vista analitico quindi lo spostamento virtuale di Q é il differenziale della funzione $\underline{x}_Q(\varphi)$. Un tempo si usava chiamare $\delta\underline{x}_Q(\varphi)$ lo spostamento *infinitesimo*, ancora si parla di spostamenti *linearizzati* (cioè appunto la parte lineare in $\delta\varphi$ dello spostamento di Q).

Analogamente avremo per P:

$$\begin{aligned} \underline{x}_P &= -a \cos\varphi \underline{e}_1 - a \sin\varphi \underline{e}_2 \\ \delta\underline{x}_P &= (a \sin\varphi \underline{e}_1 - a \cos\varphi \underline{e}_2)\delta\varphi \end{aligned}$$

Notiamo che *tutti* gli spostamenti virtuali sono invertibili.

A questo punto, posto $\underline{F}_P = -p\underline{e}_2$ e $\underline{F}_Q = -q\underline{e}_2$ il principio dei lavori virtuali chiede che :

Lavoro virtuale totale =

$$\begin{aligned} \underline{F}_P \cdot \delta\underline{x}_P + \underline{F}_Q \cdot \delta\underline{x}_Q &= & (2.1) \\ &= -p\underline{e}_2 \cdot (a\sin\varphi \underline{e}_1 - a\cos\varphi \underline{e}_2)\delta\varphi + \\ &- q\underline{e}_2 \cdot (-b\sin\varphi \underline{e}_1 + b\cos\varphi \underline{e}_2)\delta\varphi = \\ &= (-qb\cos\varphi + pacos\varphi)\delta\varphi = 0 \\ &\text{per ogni spostamento virtuale , cioè per ogni } \delta\varphi \end{aligned}$$

Prendendo allora $\delta\varphi \neq 0$ e notando che $a\cos\varphi$ é il braccio di leva in Q e $b\cos\varphi$ é il braccio di leva in P, otteniamo la legge della leva (cioè che l'asta é in equilibrio in una posizione qualsiasi, cioè per ogni angolo φ , se

$$p(a\cos\varphi) = q(b\cos\varphi)).$$

Passando al caso generale di un sistema olonomo \mathbf{S} , denotando genericamente con B i punti di applicazione delle forze attive \underline{F}_B^a e con $\delta\underline{x}_B$ i loro spostamenti virtuali (= spostamenti *linearizzati* concessi dai vincoli) il principio dei lavori virtuali espresso in una formula é:

$$\sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \delta\underline{x}_B \leq 0 \text{ per ogni insieme di } \delta\underline{x}_B \text{ virtuali} \Leftrightarrow \text{equilibrio di } \mathbf{S}$$

$$\sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \delta\underline{x}_B = 0 \text{ se tutti gli spostamenti virtuali sono invertibili}$$

Quest'ultima equazione viene detta in Meccanica Razionale *Equazione simbolica della statica* dei sistemi olonomi lisci. L'aggettivo *simbolico* sta a ricordare che per usare concretamente l'equazione bisogna esprimere le relazioni imposte dai vincoli agli spostamenti virtuali dei punti B del sistema e che fanno sì che tali spostamenti *non* siano liberi e tra loro indipendenti, in generale. Insistiamo anche sul *per ogni sistema di spostamenti virtuali* perchè per applicare correttamente il principio bisogna considerare *tutti* gli spostamenti virtuali consentiti dai vincoli.

2.3 Sistemi materiali soggetti al solo peso

Consideriamo un sistema \mathbf{S} discreto di punti materiali anche vincolato e soggetto alla forza peso. Per ogni punto B di \mathbf{S} la forza attiva é $m_B \underline{g}$, con m_B massa di B e \underline{g} accelerazione di gravità. Quindi il lavoro virtuale totale delle forze peso é:

$$\begin{aligned} LV. &= \sum_{B \in \mathbf{S}} m_B \underline{g} \cdot \delta \underline{x}_B = & (2.2) \\ &= \underline{g} \cdot \sum_{B \in \mathbf{S}} m_B \delta \underline{x}_B \\ &= \underline{g} \cdot \sum_{B \in \mathbf{S}} \delta (m_B \underline{x}_B) \\ &= \underline{g} \cdot \delta \left(\sum_{B \in \mathbf{S}} m_B \underline{x}_B \right) \end{aligned}$$

Ricordando infine che il centro di massa del sistema di punti B , ciascuno di massa m_B e di vettore di posizione nel sistema di riferimento dato \underline{x}_B , si definisce proprio come il punto tale che:

$$M \underline{x}_G = \sum_{B \in \mathbf{S}} m_B \underline{x}_B, \quad M = \sum_{B \in \mathbf{S}} m_B \quad (2.3)$$

otteniamo per il lavoro virtuale totale:

$$\begin{aligned} L. V. & & (2.4) \\ &= \underline{g} \cdot \delta M \underline{x}_G = \\ &= M \underline{g} \cdot \delta \underline{x}_G \end{aligned}$$

Dove utilizziamo in modo inverso le proprietà già applicate nell'equazione 2.2.

Detto a parole quindi il lavoro virtuale totale delle forze peso é pari al peso totale ($M \underline{g}$) scalare lo spostamento virtuale del centro di massa. Si può

cioè calcolare il lavoro virtuale *come se* il peso complessivo fosse applicato nel centro di massa del sistema. Va però ricordato che questo viene dalla formula dimostrata sopra e in realtà il *peso* agisce in ogni parte del sistema, anzi è il classico esempio di forza distribuita. Quando andremo a studiare gli sforzi interni ad un dato sistema vedremo che non si può in generale *pensare* al peso come ad un'unica forza concentrata nel centro di massa (vedi cap 6)

Nota 2.1

Abbiamo ricavato la formula del lavoro virtuale delle forze peso (2.4) per i sistemi materiali discreti per comodità di esposizione. La stessa relazione vale per i sistemi materiali continui o composti da parti continue purché si definisca opportunamente il centro di massa, essenzialmente trasformando le \sum_B in un integrale.

Se ora applichiamo il P.L.V. ai sistemi olonomi soggetti unicamente al peso come forza attiva ritroviamo il *Principio di Torricelli* cioè (vedi [LCA] vol 1 Cap XV, par 4)

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema soggetto al peso è che il suo centro di massa non sia suscettibile di abbassamento per effetto di alcuno spostamento virtuale del sistema.

Esempio 2.2

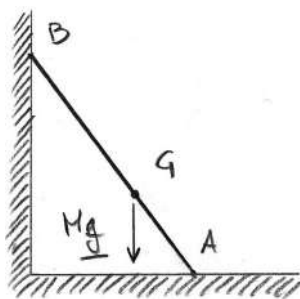


Figure 2.8:

$$\overline{AB} = l$$

AB = asta rigida

G = centro di massa di AB
forze attive = peso

Si vede facilmente che le uniche posizioni di equilibrio previste dal P.L.V. sono quelle con AB orizzontale o verticale: infatti in tali configurazioni gli spostamenti virtuali di G (ricordare che sono linearizzati o infinitesimi) sono orizzontali o con una componente verso l'alto.

In tutte le altre configurazioni invece c'è una componente verticale in basso per lo spostamento di G . Ora, se abbiamo in mente una normale scala in legno appoggiata al terreno ed alla parete, la conclusione tratta dal P.L.V sembra sorprendente perchè:

1. non ammette configurazione di equilibrio obliqua, mentre chissà quante volte non solo abbiamo appoggiato la scala obliquamente, ma ci siamo pure saliti sopra!
 2. dà anche una configurazione di equilibrio *verticale* che è praticamente irraggiungibile
1. Vediamo il dubbio 1. Il punto è che nelle situazioni reali ci ha aiutato l'attrito, tra le estremità della scala ed il terreno e la parete verticale. Pensate ad una situazione in cui il terreno e la parete siano ghiaccio liscio e le estremità della scala siano arrotondate e lisce e vi convincerete che le posizioni di equilibrio oblique sono impossibili. Come già evidenziato, l'importanza, anche applicata all'ingegneria, del P.L.V. è proprio che esso prevede solo la configurazione di equilibrio *senza attrito* (nel seguito considereremo sempre problemi senza attrito).
 2. le configurazioni di equilibrio orizzontale e verticale hanno *qualità* diverse. Mentre quella orizzontale è facilmente ottenibile, quella verticale non solo è difficile da ottenere ma è facile da distruggere, basta un minimo spostamento e.g. di A perchè la scala scivoli giù. Torneremo in seguito su tale problema, distinguendo tra configurazioni di equilibrio stabile (tipo quella orizzontale) ed instabile (tipo quella verticale).

2.4 P.L.V. per sistemi ad un grado di libertà

Approfondiremo l'applicazione del P.L.V. ai sistemi olonomi *bilateri lisci*, iniziando da quelli ad un grado di libertà.

Nominando q l'unica coordinata libera, abbiamo che la posizione (in un riferimento dato) di ogni punto B del sistema \mathbf{S} dipende da q , in formule:

$$\underline{x}_B = \underline{x}_B(q) , \forall B \in \mathbf{S} \quad (2.5)$$

Supponendo che la funzione $\underline{x}_B(q)$ sia *regolare* si ha che:

$$\delta \underline{x}_B = \frac{d\underline{x}_B}{dq} \delta q \quad (2.6)$$

ed é sempre invertibile.

Detta quindi \underline{F}_B^a la risultante delle forze attive agenti sul punto B avremo che:

$$\begin{aligned} L. V. &= \sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \delta \underline{x}_B = & (2.7) \\ &= \sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \frac{d\underline{x}_B}{dq} \delta q \\ &= \left(\sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \frac{d\underline{x}_B}{dq} \right) \delta q \\ &= Q \delta q \end{aligned}$$

dove abbiamo posto:

$$Q = \sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \frac{d\underline{x}_B}{dq} \quad (2.8)$$

Definizione 2.4.1 Q viene detta forza attiva generalizzata relativa a q .

La ragione del nome apparirà evidente in seguito.

L'equilibrio del sistema \mathbf{S} sarà dato dal P.L.V. e quindi:

$$L. V. = \sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \delta \underline{x}_B = 0 , \forall \delta \underline{x}_B \text{ virtuale} \quad (2.9)$$

$$\Rightarrow Q \delta q = 0 \quad \forall \delta q \in \mathbf{R} \quad (2.10)$$

In quanto gli spostamenti virtuali $\delta \underline{x}_B$ dipendono tutti, tramite la (2.6), dallo spostamento arbitrario di q , cioè δq . Mentre però i vari spostamenti $\delta \underline{x}_B$ non erano tra loro indipendenti, e quindi *non* potevamo usare direttamente la (2.9), possiamo subito dedurre dalle (2.10), prendendo $\delta q \neq 0$, che:

$$\text{condizione di equilibrio} \Leftrightarrow Q = 0 \quad (2.11)$$

cioè *All'equilibrio la forza generalizzata deve essere nulla* (per sistemi ad un grado di libertà regolari). In questa forma, la condizione dedotta dal P.L.V. è molto simile al *principio d'inerzia* per un punto materiale su una retta, da cui il sostantivo *forza* dato a Q .

L'aggettivo *generalizzata* viene dal fatto che Q è una somma di più termini in generale (vedi la sua definizione nella (2.8)). Per esempio, nel caso della leva, $Q = pa \cos \varphi - qb \cos \varphi$ e dimensionalmente è un momento di forza).

Esempio 2.3

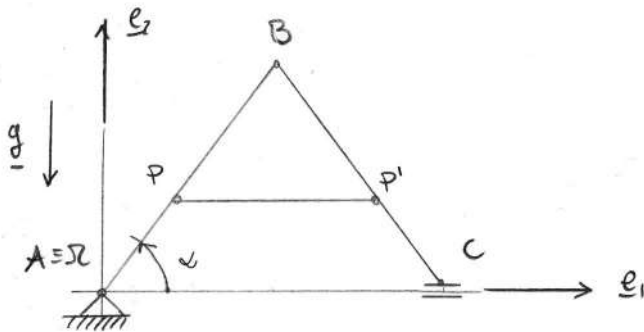


Figure 2.9:

Sistema composto da due aste rigide di eguale lunghezza, vincolate come in figura, soggette al peso, mantenute in equilibrio nella configurazione data (cioè α dato) da una fune tesa tra i due punti P e P'. Problema: calcolare la tensione della fune.

Nota: questo è un esempio di *problema diretto* in statica, cioè dato l'equilibrio determinare le forze che lo consentono.

Per affrontare il problema, pensiamo di *sostituire* alla fune le forze che essa esercita nelle due aste in P e P'. Esaminiamo la forza esercitata dalla fune in P: dall'esperienza abbiamo che deve essere diretta come la fune e che può essere solo di trazione (una fune non può *spingere* l'asta AB !)

In formule:

$$\text{in } P \quad \underline{T} = \tau (\underline{x}_{P'} - \underline{x}_P) , \quad \tau \geq 0 \quad (2.12)$$

Per il principio di azione e reazione avremo che:

$$-\underline{T} = \text{forza esercitata dalla fune sull'asta } BC \text{ in } P' \quad (2.13)$$

Posso allora vedere il mio problema come un sistema di due aste con un grado di libertà (vedi figura 2.10) soggette alle forze peso e \underline{T} in P, $-\underline{T}$ in P', in equilibrio nella configurazione data da $\varphi = \alpha$.

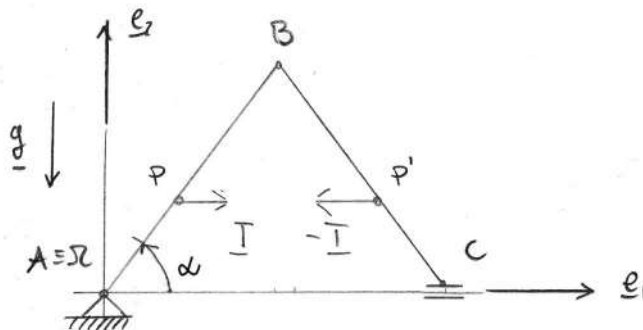


Figure 2.10:

Supponendo di essere in una situazione *senza attrito* utilizzo il P.L.V. (notare che l'attrito *aiuta* l'equilibrio, quindi utilizzare il P.L.V. equivale a calcolare il massimo della tensione, cioè il massimo sforzo sostenuto dalla fune, in ingegneria vogliamo appunto avere delle stime per eccesso degli sforzi sostenuti dalle componenti di un sistema, per evitare *collassi*)

L.V. totale = L.V. delle forze peso + L.V. forze di tensione della fune

Per fissare le idee supponiamo che le due aste siano omogenee (e quindi i loro centri di massa stiano a metà delle rispettive aste) di lunghezza l , e $m_{AB} = 2m_{BC}$, $m_{BC} = m$, $\overline{BP} = \overline{BP'} = (2/3)l$, angolo di equilibrio $\hat{BAC} = \pi/3$ (ma potete variare i dati a vostro gusto)

Avremo allora (detti G_1 e G_2 i centri di massa rispettivamente di AB e BC):

$$L. V. \text{ forze peso} = m_{AB} \underline{g} \cdot \delta \underline{x}_{G_1} + m_{BC} \underline{g} \cdot \delta \underline{x}_{G_2} =$$

(essendo $\underline{g} = -g \underline{e}_2$ nel riferimento scelto e $\underline{x}_{G_i} = x_{G_i} \underline{e}_1 + y_{G_i} \underline{e}_2$, $i = 1, 2$)

$$L. V. = -g (m_{AB} \delta y_{G_1} + m_{BC} \delta y_{G_2})$$

(essendo $y_{G_1} = (l/2) \sin \varphi$ ne segue che $\delta y_{G_1} = (l/2) \cos \varphi \delta \varphi$ con $i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} &= -g (m_{AB} + m_{BC}) \frac{l}{2} \cos \varphi \delta \varphi \\ &= (\text{vedi dati del problema}) - \frac{3}{2} mgl \cos \varphi \delta \varphi \end{aligned}$$

$$L. V. \text{ fune} =$$

$$\begin{aligned} &= \underline{T} \cdot \delta \underline{x}_P + (-\underline{T}) \cdot \delta \underline{x}_{P'} \\ &= (\text{raccogliendo } \underline{T}) \underline{T} \cdot (\delta \underline{x}_P - \delta \underline{x}_{P'}) \\ &= (\text{linearità di } \delta) \underline{T} \cdot \delta (\underline{x}_P - \underline{x}_{P'}) \\ &= (\text{forma di } \underline{T} \text{ (2.12)}) \tau (\underline{x}_P - \underline{x}_{P'}) \cdot \delta (\underline{x}_P - \underline{x}_{P'}) \end{aligned}$$

Detto $\underline{u} = \underline{x}_{P'} - \underline{x}_P$ notiamo che $\forall \underline{u} \in \mathbf{R}^3$, $\delta \frac{\|\underline{u}\|^2}{2} = \frac{1}{2} \delta (\underline{u} \cdot \underline{u}) =$
 (regole delle derivate del prodotto di funzione) $= \frac{1}{2} (\underline{u} \cdot \delta \underline{u} + \delta \underline{u} \cdot \underline{u}) =$
 (commutatività del prodotto scalare) $= \frac{2}{2} \underline{u} \cdot \delta \underline{u} = \underline{u} \cdot \delta \underline{u}$

Quindi:

$$\begin{aligned} L. V. \text{ fune} &= \\ &= -\tau (\underline{x}_{P'} - \underline{x}_P) \cdot \delta (\underline{x}_{P'} - \underline{x}_P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\tau}{2}\delta \|\underline{x}_{P'} - \underline{x}_P\|^2 \\
&= (\textit{essendo } \|\underline{x}_{P'} - \underline{x}_P\|^2 = \overline{PP'}^2 = (2\frac{2}{3}l\cos\varphi)^2) \\
&= -\frac{8}{9}\tau l^2 \delta \cos^2\varphi \\
&\quad (\delta(\cos^2\varphi) = -2\cos\varphi\sin\varphi\delta\varphi) \\
&= +\frac{16}{9}l^2\sin\varphi\cos\varphi\delta\varphi
\end{aligned}$$

Avremo quindi, raccogliendo $\delta\varphi$:

$$\begin{aligned}
L. V. \textit{ totale} &= (-\frac{3}{2}mgl\cos\varphi + \frac{16}{9}\tau l^2\sin\varphi\cos\varphi)\delta\varphi = Q(\varphi)\delta\varphi \\
\Rightarrow Q(\varphi) &= (-\frac{3}{2}mg + \frac{16}{9}\tau l\sin\varphi)l\cos\varphi
\end{aligned}$$

All'equilibrio, cioè per $\varphi = \pi/3$, Q deve essere nullo quindi

$$\begin{aligned}
\textit{equilibrio} &\Leftrightarrow Q(\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow \\
&(-\frac{3}{2}mg + \frac{16}{9}\tau l\sin\frac{\pi}{3})l\cos\frac{\pi}{3} = 0 \\
\Rightarrow (\textit{essendo } \cos\frac{\pi}{3} \neq 0) &\frac{3}{2}mg + \frac{16}{9}\tau l\sin\frac{\pi}{3} = 0 \\
\Rightarrow \tau &= \frac{27}{16}\sqrt{3}\frac{mg}{l}
\end{aligned}$$

Dalla definizione di \underline{T} (2.12) abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
\underline{T} = \tau(\underline{x}_{P'} - \underline{x}_P) &= \tau\frac{4}{3}l\cos\frac{\pi}{3}\underline{e}_1 = \\
&\frac{9}{8}\sqrt{3}mg \underline{e}_1
\end{aligned}$$

2.5 P.L.V. per sistemi ad l gradi di libertà regolari

Consideriamo un sistema olonomo ad l gradi di libertà e denotiamo $\underline{q} = (q_1, \dots, q_l)$ le sue coordinate libere. Per applicare il P.L.V. procediamo come nel caso di un solo grado di libertà, tenendo conto però che il vettore di posizione di un generico punto B del sistema dipende in generale da tutte le coordinate libere (q_1, \dots, q_l) . Quindi noi otteniamo *tutte* le possibili variazioni di posizione del punto B facendo variare indipendentemente *tutte* le l coordinate libere q_1, \dots, q_l .

Da un punto di vista analitico siamo quindi nell'ambito della teoria delle *funzioni reali a più variabili reali*, mentre per i sistemi ad un grado di libertà eravamo nell'ambito delle *funzioni reali di una variabile reale*. Dall'analisi abbiamo che se le funzioni che esprimono la posizione di un generico punto B in funzione delle coordinate libere, cioè (vedi (2.5))

$$\underline{x}_B = \underline{x}_B(q_1, \dots, q_l) = \underline{x}_B(\underline{q}) \quad (2.14)$$

sono *regolari*, allora:

$$\begin{aligned} \delta \underline{x}_B &= \text{parte lineare in } \delta \underline{q} = (\delta q_1, \dots, \delta q_l) \\ di \underline{x}_B(\underline{q} + \delta \underline{q}) - \underline{x}_B(\underline{q}) &= \\ &= \sum_{i=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \delta q_i \end{aligned} \quad (2.15)$$

(dove $\frac{\partial}{\partial q_i}$ indica la derivata parziale rispetto a q_i)

Tutti gli spostamenti virtuali sono invertibili e quindi all'equilibrio il lavoro virtuale deve essere nullo.

Nota:

Come già detto sopra, l'idea é che facendo variare una sola delle coordinate libere si ottiene uno *spostamento virtuale parziale*, ad esempio, facendo variare solo q_1 avremo:

$$\underline{x}_B(q_1 + \delta q_1, q_2, \dots, q_l) - \underline{x}_B(q_1, q_2, \dots, q_l)$$

$$= \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_1} \delta q_1 + r_1$$

con r_1 infinitesimo di ordine superiore al primo. Potendo variare indipendentemente le coordinate libere (perché appunto libere), lo *spostamento virtuale generico* del punto B sarà la somma degli *spostamenti virtuali parziali* e cioè appunto le (2.15).

Procedendo come nel precedente paragrafo avremo:

$$\begin{aligned} L. V. &= \sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \delta \underline{x}_B = \\ & \text{(usando la (2.15) per } \delta \underline{x}_B \text{)} = \sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \sum_{i=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \delta q_i \\ &= \text{(raccogliendo i termini relativi a ciascun } \delta q_i \text{)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^l \left(\sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) \delta q_i \quad (2.16)$$

Poniamo:

$$Q_i = \sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \quad (2.17)$$

= forza generalizzata relativa a q_i

Segue che, quando tutti gli spostamenti sono invertibili (cioè vincoli tutti bilateri e regolari)

P.L.V. equilibrio $\Leftrightarrow \sum_{B \in \mathbf{S}} \underline{F}_B^a \cdot \delta \underline{x}_B = 0 \forall \delta \underline{x}_B$ virtuale

\Leftrightarrow (per (2.16) , (2.17)) $\sum_{i=1}^l Q_i \delta q_i = 0$, $\forall \delta q_i, \dots, \delta q_l$; $\delta q_i \in \mathbf{R}$

\Leftrightarrow (essendo ora, diversamente dai $\delta \underline{x}_B$, i δq_i tra loro indipendenti, posso prendere ad esempio $\delta q_1 \neq 0$ e $\delta q_2, \dots, \delta q_l = 0$ ottenendo così $Q_1 = 0$, procedendo nello stesso modo con ciascuna coordinata otteniamo)

$$Q_i = 0 \quad i = 1, \dots, l \quad (2.18)$$

Il P.L.V. ci ha quindi dato l equazioni pure di equilibrio cioè tante equazioni quanti sono i gradi di libertà del sistema.

Nota:

Con un po' di astrazione possiamo pensare al nostro sistema come un *punto* in uno spazio opportuno (ad l dimensioni), soggetto alle forze Q_1, \dots, Q_l

Le (2.18) sono allora una generalizzazione del principio d'inerzia (vedi e.g. [FDRM])

Esempio 2.4 (a 2 gradi di libertà)

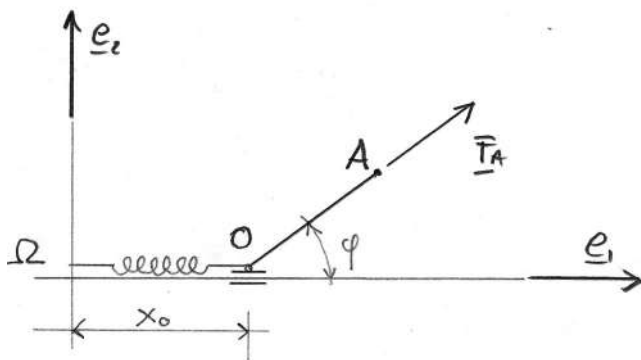


Figure 2.11:

piano orizzontale, OA asta rigida di lunghezza l vincolata come in figura

forze attive: 1. forza elastica in O, $\underline{F}_O = -c x_0 \underline{e}_1$

2. carico *follower* in A

$$\underline{F}_A = f \text{ vers}(\underline{x}_A - \underline{x}_O)$$

Problema: determinare le due forze generalizzate e le configurazioni di equilibrio dell'asta (coordinate libere x_O, φ date in figura).

Nota: questo é un esempio di *problema inverso* in Statica, cioè date le forze agenti determinare le configurazioni di equilibrio.

Risoluzione:

$$L.V. = \underline{F}_O \cdot \delta \underline{x}_O + \underline{F}_A \cdot \delta \underline{x}_A.$$

Scriviamo ora i due spostamenti virtuali che servono (vedi 2.15):

$$\underline{x}_O = x_O \underline{e}_1 \Rightarrow \delta \underline{x}_O = \delta x_O \underline{e}_1$$

(chiaramente le variazioni di O non dipendono da φ)

$$\underline{x}_A = (x_O + l \cos \varphi) \underline{e}_1 + l \sin \varphi \underline{e}_2 \Rightarrow$$

$$\delta \underline{x}_A = \delta x_O \underline{e}_1 + \delta \varphi (-l \sin \varphi \underline{e}_1 + l \cos \varphi \underline{e}_2)$$

dove il primo addendo é uno spostamento dovuto ad una variazione solo di x_O cioè ad una traslazione in direzione \underline{e}_1 , mentre il secondo addendo é dovuto alla variazione della sola φ , cioè ad una rotazione con O fissato.

Quindi:

$$\begin{aligned} L.V. &= \underline{F}_O \cdot \delta \underline{x}_O + \underline{F}_A \cdot \delta \underline{x}_A = \\ &= -c x_O \underline{e}_1 \cdot \delta x_O \underline{e}_1 + f \frac{(\underline{x}_A - \underline{x}_O)}{\|\underline{x}_A - \underline{x}_O\|} \cdot (\delta x_O \underline{e}_1 + \delta \varphi (-l \sin \varphi \underline{e}_1 + l \cos \varphi \underline{e}_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -cx_O\delta x_O + f(\cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_2) \cdot (\delta x_O\mathbf{e}_1 + \delta\varphi(-l\sin\varphi\mathbf{e}_1 + l\cos\varphi\mathbf{e}_2)) \\
&\quad (\text{raccolgendo i termini in } \delta x_O \text{ e } \delta\varphi) \\
&= \delta x_O(-cx_O + f\cos\varphi) + O(\delta\varphi)
\end{aligned}$$

Segue che le due forze generalizzate sono:

$$\begin{aligned}
Q_{x_O} &= -cx_O + f\cos\varphi \\
Q_\varphi &= 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Le condizioni di equilibrio sono

$$Q_{x_O} = 0 \quad Q_\varphi = 0$$

La seconda é identicamente soddisfatta, la prima dice che comunque si prenda φ deve essere: $x_O = \frac{f}{c}\cos\varphi$. Quindi si hanno infinite configurazioni di equilibrio del tipo $(\varphi = \alpha, x_O = \frac{f}{c}\cos\alpha) \forall \alpha$.

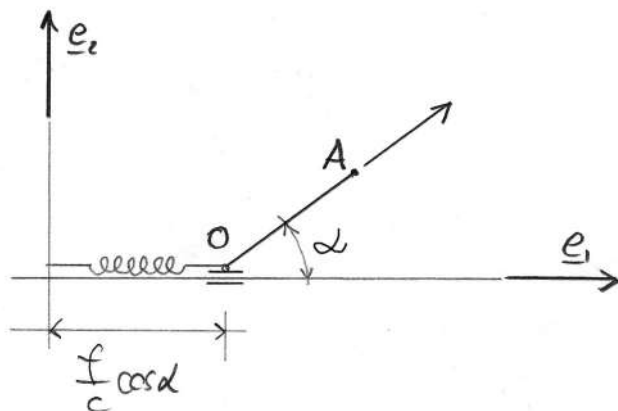


Figure 2.12:

Notare che per $\alpha = 0$ otteniamo il dinamometro classico, che serve a misurare l'intensità della forza F_A , conoscendo la costante c e misurando l'elongazione della molla quando il sistema é in equilibrio.

2.6 Approfondimento su spostamenti virtuali con applicazione alle condizioni di indipendenza per i vincoli

Torniamo alla questione di definire operativamente le condizioni di indipendenza di m vincoli imposti ad un sistema che di partenza ha n gradi di libertà (vedi Par. 1.5). Denotiamo con $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ($\underline{\xi} \in \mathbf{R}^n$) le n coordinate libere del sistema di partenza e con:

$$\begin{aligned} f_1(\underline{\xi}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(\underline{\xi}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

gli m vincoli imposti.

Supponiamo che le funzioni f_1, \dots, f_m siano regolari quanto ci serve e che gli m vincoli siano compatibili cioè:

$$C = \{ \underline{\xi} : f_1(\underline{\xi}) = 0, \dots, f_m(\underline{\xi}) = 0 \} \neq \emptyset$$

(altrimenti lavoriamo su fantasmi)

Prendiamo un *punto* di C , cioè $\underline{\xi} \in C$ e consideriamo uno spostamento virtuale da tale configurazione $\delta\underline{\xi} = (\delta\xi_1, \dots, \delta\xi_n)$, esso deve essere compatibile con i vincoli cioè la configurazione definita da $\underline{\xi} + \delta\underline{\xi}$ deve soddisfare le m equazioni dei vincoli, in formule:

$$f_i(\underline{\xi} + \delta\underline{\xi}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \tag{2.21}$$

Dall'analisi di funzioni a più variabili sappiamo sviluppare in serie le funzioni f_i in un intorno di $(\underline{\xi})$, precisamente abbiamo:

$$f_i(\underline{\xi} + \delta\underline{\xi}) = f_i(\underline{\xi}) + \nabla f_i \cdot \delta\underline{\xi} + r_i$$

$$(\text{linearizzando}) \cong f_i(\underline{\xi}) + \nabla f_i \cdot \delta\underline{\xi}$$

\Rightarrow (in base alle equazioni (2.20) (2.21))

$$\boxed{\nabla f_i \cdot \delta\underline{\xi} = 0 \quad , \quad \forall i = 1, \dots, m} \tag{2.22}$$

(Condizioni per gli spostamenti virtuali).

Consideriamo per primo il caso $m < n$ (ipostatico).

Se i vincoli sono indipendenti, il sistema risultante deve avere $l = n - m$ gradi di libertà, quindi degli n spostamenti virtuali $\delta\xi_1, \dots, \delta\xi_n$ solo l devono essere tra loro indipendenti mentre i restanti m devono dipendere dai precedenti l . D'altra parte gli spostamenti virtuali $\delta\xi_1, \dots, \delta\xi_n$ devono soddisfare le equazioni (2.22), che in questo caso costituiscono un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $\delta\xi_1, \dots, \delta\xi_n$, che riscriviamo per esteso per essere più chiari:

$$\begin{aligned} \nabla f_1 \cdot \delta\underline{\xi} &= \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \delta\xi_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \delta\xi_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_n} \delta\xi_n = 0 \\ &\vdots \\ \nabla f_m \cdot \delta\underline{\xi} &= \frac{\partial f_m}{\partial \xi_1} \delta\xi_1 + \frac{\partial f_m}{\partial \xi_2} \delta\xi_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial \xi_n} \delta\xi_n = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove $m =$ righe e $n =$ colonne

Noi vogliamo che ci siano ∞^l soluzioni per il sistema lineare sopra scritto (in termini meccanici l gradi di libertà per il sistema materiale vincolato), quindi dall'algebra lineare (Teor R.C. vedi e.g. [BPS]) sappiamo che la matrice dei coefficienti dell'equazione sopra scritta deve avere un rango $n - l = m$.

Riscriviamo per chiarire tale matrice dei coefficienti di m righe ed n colonne:

$$\begin{pmatrix} \partial f_1/\partial \xi_1 & \partial f_1/\partial \xi_2 & \dots & \partial f_1/\partial \xi_n \\ \partial f_2/\partial \xi_1 & \partial f_2/\partial \xi_2 & \dots & \partial f_2/\partial \xi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_m/\partial \xi_1 & \partial f_m/\partial \xi_2 & \dots & \partial f_m/\partial \xi_n \end{pmatrix} = J_F \quad (2.24)$$

Quindi in formule:

condizione di indipendenza per $m < n$ (ipostatico)

“ rango $J_F = m$ “

(2.25)

Nota:

abbiamo chiamato la matrice sopra scritta J_F perchè dall'analisi sappiamo che, detta:

$$\underline{F} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m , \underline{F} = (f_1(\underline{\xi}), \dots, f_m(\underline{\xi})) \quad (2.26)$$

J_F dato dalla (2.24) = Jacobiano di F.

Consideriamo ora il caso $m = n$ (isostatico).

Noi vogliamo in sostanza che il sistema non si possa proprio muovere, (0 gradi di libertà) cioè che tutti gli n spostamenti virtuali siano nulli. Poichè essi devono essere soluzioni del sistema lineare (2.23), che adesso é un sistema ad n equazioni in n incognite, chiediamo che il suddetto sistema abbia *solo* le soluzioni nulle, e quindi per il teorema ... dell'algebra lineare, che il determinante della matrice dei coefficienti J_F , (adesso $n \times n$) sia non nullo o, che é lo stesso, essendo J_F una matrice quadrata che abbia rango n .

In formule:

$condizione\ di\ indipendenza\ per\ m = n\ (isostatico)$
$det J_F \neq 0 \Leftrightarrow rango J_F = n$

(2.27)

Passiamo ora al caso $m > n$ (iperstatico). L'idea é che devo poter togliere $m - n$ vincoli ed ottenere ancora un sistema isostatico (che non si può muovere), passando al solito sistema lineare (2.23) (che ora ha m equazioni $>$ delle n incognite ed ammette la soluzione nulla) devo poter togliere $m - n$ equazioni (= righe di J_F) ed avere ancora un sistema $n \times n$ che ammette *solo* la soluzione nulla (cioè in termini meccanici un sistema isostatico).

Deve quindi esistere un minore di J_F di ordine $n \times n$ a determinante non nullo, in termini algebrici quindi:

<i>condizione di indipendenza per $m > n$ (iperstatico)</i> <i>rango di $J_F = n$</i>	(2.28)
---	--------

Possiamo riassumere le tre condizioni (2.25) (2.27) (2.28) nell'unica:

<i>condizione di indipendenza dei vincoli</i> <i>rango di J_F massimo possibile , cioè</i>	(2.29)
$m < n$ rango di $J_F = m$ (ipostatico)	
$m = n$ rango di $J_F = m = n$ (isostatico)	
$m > n$ rango di $J_F = n$ (iperstatico)	

(Ricordiamo che:

$n =$ numero di gradi di libertà del sistema di partenza cioè non vincolato

$m =$ numero dei vincoli).

Esempio 2.5

Torniamo all'esempio 9 del Cap. 1 Par 5

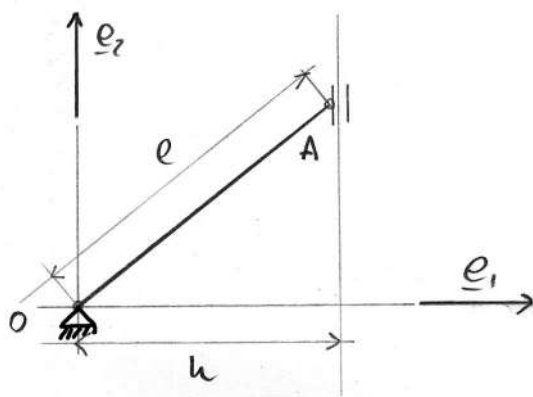


Figure 2.13:

$$h \leq l$$

$$f_1 = x_0 = 0$$

$$f_2 = y_0 = 0$$

$$f_3 = x_0 + l \cos \varphi - h = 0$$

$$\underline{\xi} = (x_0, y_0, \varphi : \cos \varphi = h/l)$$

Scriviamo J_F nel punto $\underline{\xi}$, cioè nella configurazione di figura:

$$J_F = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_0 & \partial f_1 / \partial y_0 & \partial f_1 / \partial \varphi \\ \partial f_2 / \partial x_0 & \partial f_2 / \partial y_0 & \partial f_2 / \partial \varphi \\ \partial f_3 / \partial x_0 & \partial f_3 / \partial y_0 & \partial f_3 / \partial \varphi \end{pmatrix}$$

Operando le derivate indicate se ne ottiene che:

$$J_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -l \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det J_F = -l \sin \varphi, \quad \varphi : \cos \varphi = h/l$$

Quindi:

se $h < l \Rightarrow \sin \varphi \neq 0 \Rightarrow \det J_F \neq 0$ vincoli indipendenti

se $h = l \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \det J_F = 0$ vincoli non indipendenti

In effetti, se scriviamo il sistema lineare per gli spostamenti virtuali (2.23) in questo caso, cioè il sistema:

$$J_F \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \delta x_0 = 0 \\ \delta y_0 = 0 \\ \delta x_0 - l \sin \varphi \delta \varphi = 0 \end{array} \right\} \quad (2.30)$$

Vediamo subito che:

se $h < l \Rightarrow \sin \varphi \neq 0 \Rightarrow$ esiste solo la soluzione nulla $\delta x_0 = \delta y_0 = \delta \varphi = 0$
cioè il sistema non si può muovere

se $h = l \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow$ esistono ∞ soluzioni $\delta x_0 = 0, \delta y_0 = 0, \delta \varphi$ qualsiasi
cioè O è fissato in Ω ma l'asta può avere una rotazione infinitesima

Questo ultimo caso dà guai che saranno evidenti in Statica al momento di calcolare l'equilibrio e le reazioni dei vincoli all'equilibrio.

Esercizio 2.2 *controllare le condizioni di indipendenza negli esempi 8 e 10 del Cap. 1*

In Scienza delle Costruzioni alla matrice J_F si dà il nome di ... (Jacobiano ?)

2.7 Soluzione degli esercizi Proposti nel capitolo

2.7.1 Risoluzione Esercizio 2.1

Sono di equilibrio le posizioni c_1, \dots, c_5 indicate in figura:

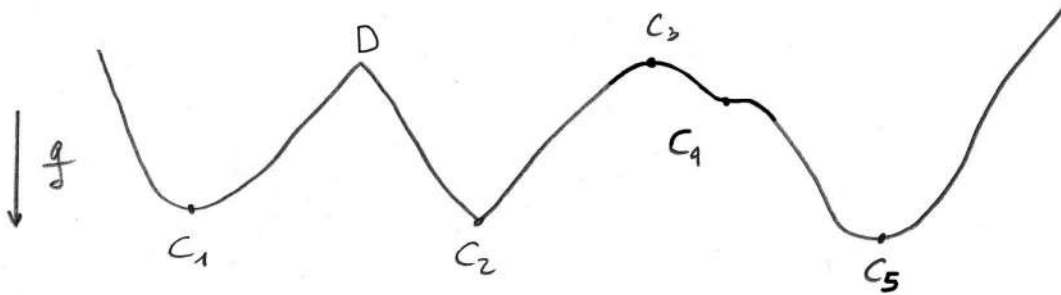


Figure 2.14:

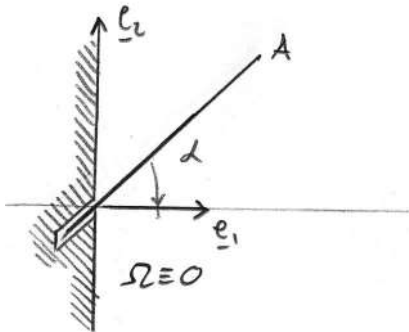
Notare che:

in C_2 (punto non regolare della curva in cui la tangente non é definita) gli spostamenti virtuali non sono invertibili ed il lavoro virtuale del peso é negativo.

In tutte le altre configurazioni di equilibrio segnate in figura (punti regolari) gli spostamenti virtuali sono tangenti alla curva ed invertibili ed il lavoro virtuale del peso é nullo essendo orizzontale in tali punti la tangente alla curva. Notare che in D gli spostamenti non sono invertibili, il lavoro virtuale del peso è positivo e quindi tale punto *non* è di equilibrio.

2.7.2 Risoluzione Esercizio 2.2

- Esempio 1.8 Cap. 1

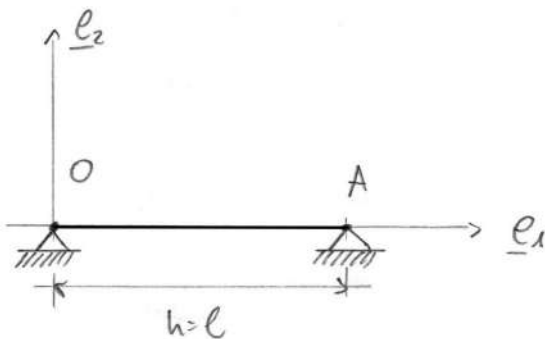


essendo x_0, y_0, φ le coordinate libere di partenza si ha che:

$$\begin{aligned} f_1 = x_0 = 0 &\Rightarrow \partial f_1 / \partial x_0 = 1 \quad \partial f_1 / \partial y_0 = 0 \quad \partial f_1 / \partial \varphi = 0 \\ f_2 = y_0 = 0 &\Rightarrow \partial f_2 / \partial x_0 = 0 \quad \partial f_2 / \partial y_0 = 1 \quad \partial f_2 / \partial \varphi = 0 \\ f_3 = \varphi - \alpha = 0 &\Rightarrow \partial f_3 / \partial x_0 = 0 \quad \partial f_3 / \partial y_0 = 0 \quad \partial f_3 / \partial \varphi = 1 \end{aligned}$$

Quindi $J_F = I_d$, $\det J_F = 1$ cioè *rango* $J_F = 3$ la condizione di indipendenza é soddisfatta.

• Esempio 1.10 Cap. 1



Procedendo come sopra:

$$\begin{aligned} f_1 = x_0 = 0 &\Rightarrow \partial f_1 / \partial x_0 = 1 \quad \partial f_1 / \partial y_0 = 0 \quad \partial f_1 / \partial \varphi = 0 \\ f_2 = y_0 = 0 &\Rightarrow \partial f_2 / \partial x_0 = 0 \quad \partial f_2 / \partial y_0 = 1 \quad \partial f_2 / \partial \varphi = 0 \\ f_3 = x_0 + l \cos \varphi - l = 0 &\Rightarrow \partial f_3 / \partial x_0 = 1 \quad \partial f_3 / \partial y_0 = 0 \quad \partial f_3 / \partial \varphi = -l \sin \varphi \\ f_4 = y_0 + l \sin \varphi = 0 &\Rightarrow \partial f_4 / \partial x_0 = 0 \quad \partial f_4 / \partial y_0 = 1 \quad \partial f_4 / \partial \varphi = l \cos \varphi \end{aligned}$$

Si ha quindi che, essendo nella configurazione data $\varphi = 0$

$$J_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{pmatrix}$$

Il minore 3 x 3 seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{pmatrix}$$

Ha determinante $\neq 0$, quindi il rango $J_F = 3$ cioè la condizione di indipendenza é soddisfatta.

Notare che il minore sopra indicato é ottenuto *sopprimendo* il vincolo $f_3 = 0$, i 3 vincoli rimasti costituiscono il seguente sistema:



Figure 2.15:

che per quanto appena detto é isostatico.

Non si può quindi in generale in un sistema una volta iperstatico sopprimere un vincolo qualsiasi ed ottenere un sistema isostatico. Se infatti avessimo *soppresso* il vincolo V_4 (ultima riga di J_F) avremmo ottenuto il sistema esaminato per esteso nell'Esempio 2.5, cioè un sistema a vincoli non indipendenti.

Dispense di Meccanica Razionale

Prof. Maura Ughi

Contents

3	Cinematica dei rigidi	2
3.1	Teorema di Poisson	2
3.2	Significato fisico ed espressione di $\underline{\omega}$	6
3.3	Spostamenti virtuali dei punti di un rigido, lavoro virtuale di un sistema di forze applicate ad un rigido e conseguenze . . .	12
3.4	Vincoli lisci ed applicazione del P.L.V. ai sistemi isostatici . .	18
3.5	Campo di velocità per un rigido, asse istantaneo di moto . . .	25
3.6	Moto rigido piano, centro di istantanea rotazione	33
3.7	Soluzione degli esercizi	45
	3.7.1 Soluzione Esercizio 3.1	45
	3.7.2 Risoluzione Esercizio 3.2	47

Chapter 3

Cinematica dei rigidi

3.1 Teorema di Poisson

Dato un osservatore $\Sigma (\Omega; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ (detto per facilità di comprensione *osservatore fisso*) consideriamo un rigido \mathfrak{R} che si sposta relativamente a Σ in modo regolare.

Avendo in mente applicazioni di quanto faremo sia alla statica, tramite il principio dei lavoro virtuali, sia in seguito (vedi Cap. 9) alla dinamica, denotiamo con τ , $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ un parametro che caratterizza un dato spostamento rigido. Volendo dargli un nome lo potremmo chiamare *tempo virtuale*; in Dinamica τ sarà ovviamente il tempo fisico. Durante un dato movimento sarà data la posizione in funzione di τ di ogni punto P del rigido \mathfrak{R} .

Al solito denoteremo con $\underline{x}_P(\tau)$ il vettore di posizione di P in Σ .

Dimostriamo il seguente teorema, che é fondamentale nello studio dei rigidi.

Teorema di Poisson *Fissato uno spostamento di \mathfrak{R} , esiste un unico vettore $\underline{\omega}(\tau)$ tale che, per ogni coppia di punti P ed O del rigido \mathfrak{R} , si ha che:*

$$\frac{d\underline{x}_P}{d\tau} = \frac{d\underline{x}_O}{d\tau} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O), \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1]$$

Chiameremo la formula precedente *Formula di Poisson* (brevemente F.P.) (Notiamo che altri autori usano diverse terminologie).

Dimostrazione Si possono dare varie dimostrazioni vedi ([FDRM] , [LCA]) seguiremo qui il metodo indicato in [A]

Denotiamo con $S (O; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ una terna fissata dall'osservatore solidale ad \mathfrak{R} e fissato un qualsiasi punto P di \mathfrak{R} denoteremo con $\underline{x}, \underline{X}$ i vettori di posizione di P rispettivamente in Σ ed in S . Notiamo subito che durante lo spostamento del rigido il vettore \underline{X} é indipendente da τ , poichè essendo S solidale ad \mathfrak{R} ogni punto di \mathfrak{R} ha in S coordinate costanti. Prima di procedere notiamo che é essenziale nel seguito essere nel modello *Meccanica Classica* cioè l'assunzione che la misura di intervalli di lunghezza e di tempo siano indipendenti dal moto dell'osservatore.

La relazione tra \underline{x} ed \underline{X} é data da:

$$\underline{x}(\tau) = \underline{x}_O(\tau) + R(\tau)\underline{X} \quad (3.1)$$

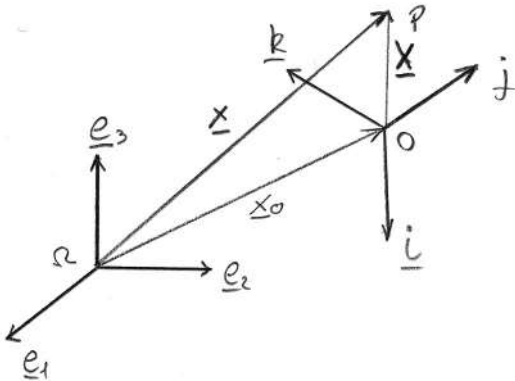


Figure 3.1:

dove $\underline{x}_O(\tau)$ é il vettore di posizione di O in Σ al tempo *virtuale* τ ed $R(\tau)$ é la matrice di trasformazione di coordinate tra S e Σ ed é quindi per ogni τ una matrice ortogonale.

Derivando la precedente (3.1) rispetto a τ , tenendo conto che \underline{X} é indipendente da τ , otteniamo:

$$\frac{d\underline{x}}{d\tau} = \frac{d\underline{x}_O}{d\tau} + \frac{dR(\tau)}{d\tau}\underline{X} \quad (3.2)$$

dove $\frac{dR}{d\tau}(\tau)$ é la matrice i cui elementi sono le derivate degli elementi di R (i.e. $(\frac{dR}{d\tau})_{ij} = \frac{dR_{ij}}{d\tau}$ $i, j = 1, 2, 3$)

D'altra parte dalla (3.1) abbiamo che, essendo R ortogonale e quindi $R^{-1} = R^T$,

$$\underline{X} = R^T(\underline{x} - \underline{x}_O)$$

Sostituendo in (3.2) otteniamo:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d\underline{x}_O}{dt} + A(\tau)(\underline{x} - \underline{x}_O), \quad A = \frac{dR}{d\tau}R^T = \dot{R}R^T \quad (3.3)$$

Useremo ora i seguenti due lemmi:

Lemma 1 *La matrice A é antisimmetrica i.e.*

$$A(\tau) + A^T(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1]$$

Dimostrazione Lemma 1 L'ipotesi essenziale é che la matrice R é ortogonale per ogni τ , indipendentemente dal suo significato fisico nel Teorema da dimostrare. In formule:

$$R(\tau)R^T(\tau) = I_d, \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1] \quad (3.4)$$

dove I_d é la matrice identica, i cui elementi sono costanti rispetto a τ . Derivando la (3.4) rispetto a τ ed utilizzando la regola di derivazione del prodotto di funzioni otteniamo:

$$\frac{dR}{d\tau}R^T + R\frac{dR^T}{d\tau} = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1] \quad (3.5)$$

Ora osserviamo che $\dot{R}R^T = A$ e

$$A^T = (\dot{R}R^T)^T = (R^T)^T \dot{R}^T = R\frac{dR^T}{d\tau}$$

(ricordando che $(BC)^T = C^T B^T$)

Quindi la (3.5) dimostra il lemma.

Lemma 2 *Data una qualsiasi matrice A antisimmetrica e di dimensione 3 x 3 esiste un unico vettore $\underline{\omega}$ (di \mathbf{R}^3) tale che:*

$$A\underline{y} = \underline{\omega} \wedge \underline{y}, \forall \underline{y} \in \mathbf{R}^3$$

Dimostrazione Lemma 2 Anche qui si possono dare varie dimostrazioni, ne scegliamo una diretta e costruttiva (anche se non molto elegante). Data la matrice A si ha che:

$$A\underline{y} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Preso un vettore $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ generico per ora, usando l'usuale *determinante simbolico* per il calcolo del prodotto vettoriale abbiamo

$$\begin{aligned} \underline{\omega} \wedge \underline{y} &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 y_2 + \omega_2 y_3 \\ \omega_3 y_1 - \omega_1 y_3 \\ -\omega_2 y_1 + \omega_1 y_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il lemma 2 resta così dimostrato, ed $\underline{\omega}$ è *esplicitamente* determinato, ponendo

$$\begin{aligned} -\omega_3 &= A_{12} \\ \omega_2 &= A_{13} \\ -\omega_1 &= A_{23} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nota di approfondimento: nel Lemma 2 è *essenziale* che A sia una matrice antisimmetrica 3 x 3. Un semplice calcolo mostra che se A è una matrice n x n antisimmetrica, i suoi elementi indipendenti sono $(n^2 - n)/2$, mentre gli elementi di un vettore di \mathbf{R}^n sono n. É ovvio che posso associare in qualche modo il vettore alla matrice solo se hanno lo stesso numero di elementi. Ma $(n^2 - n)/2$ é uguale ad n se e solo se $n = 3$

Tramite i due lemmi il teorema di Poisson é dimostrato, denotando con $\underline{\omega}$ il vettore associato ad $A = \dot{R}R^T$, definito dalla (3.6).

3.2 Significato fisico ed espressione di $\underline{\omega}$

Iniziamo ritrovando per altre vie i risultati elementari già noti da Fisica 1 per traslazioni e rotazioni.

- **Traslazioni**

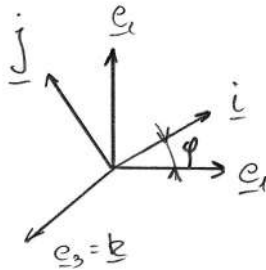
In questo tipo di spostamento gli assi di S non cambiano orientazione rispetto a Σ . Quindi la matrice R in (3.1) é costante rispetto a τ , ne segue che $A \equiv 0$ e $\underline{\omega} \equiv \underline{0}$.

Notare che le traslazioni sono l'unico moto di un rigido in cui tutti i punti hanno la stessa velocità (si potrebbero anzi definire proprio così) Questo é quindi l'unico caso in cui si può parlare di *velocità del rigido*, in qualsiasi altro moto si può solo parlare di *velocità di un punto di \mathcal{R}* poichè punti diversi di un rigido hanno velocità diverse (vedi F.P. con $\underline{\omega} \neq \underline{0}$).

- **Rotazioni di un rigido attorno ad un asse fisso**

Scegliamo i due riferimenti Σ ed S in modo che $O \equiv \Omega$, Ω appartenga all'asse di rotazione e $\underline{e}_3 = \underline{k}$ coincida con l'asse di rotazione.

Denotiamo al solito con φ l'angolo tra \underline{e}_1 ed \underline{i} (verso positivo antiorario)



Dare la *rotazione* equivale a dare $\varphi(\tau)$.

Si ha allora, mantenendo lo stesso significato dei simboli usati nella dimostrazione del teorema di Poisson, e notando che $\underline{x}_O = \underline{0}$, che

$$\underline{x}(\tau) = R(\varphi(\tau))\underline{X}$$

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi segue

$$\begin{aligned} A = \dot{R}R^T &= \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

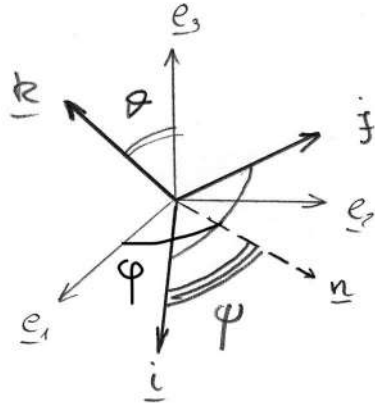
Dalla definizione di $\underline{\omega}$ in Lemma 2 (vedi 3.6) otteniamo:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0 \quad \omega_3 = \dot{\varphi} \quad \text{cioè} \\ \underline{\omega} = \dot{\varphi}\underline{e}_3 = \dot{\varphi}\underline{k} \quad , \quad d\underline{x}/d\tau = \dot{\varphi}\underline{e}_3 \wedge \underline{x} \end{aligned} \quad (3.7)$$

cioè la definizione elementare di velocità angolare in una rotazione (abbiamo seguito questa strada più *astratta* per dare concretezza alla matrice A).

- **Precessioni (moto con punto fisso)**

Scegliamo i due riferimenti Σ ed S con entrambe le origini coincidenti con il punto fisso. Il rigido ha allora 3 gradi di libertà, la scelta usuale in M.R. delle coordinate libere é quella degli angoli di Eulero che definiremo adesso (e che denoteremo nel seguito con A.E.)



Sia $\underline{n} = \underline{e}_3 \wedge \underline{k}$ il versore della retta intersezione dei piani coordinati ($\underline{e}_1, \underline{e}_2$) ($\underline{i}, \underline{j}$), essa viene detta *linea dei nodi*.

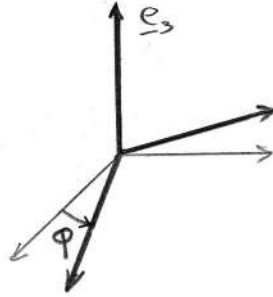
φ	angolo di precessione	angolo tra \underline{e}_1 ed \underline{n}	$0 < \varphi < 2\pi$
ϑ	angolo di nutazione	angolo tra \underline{k} ed \underline{e}_3 A.E.	$0 < \vartheta < \pi$
ψ	angolo di rotazione propria	angolo tra \underline{i} ed \underline{n}	$0 < \psi < 2\pi$

(3.8)

Il verso di crescita degli angoli é al solito positivo se antiorario visto dal versore ortogonale. La precedente notazione é detta *astronomica* ed é quella utilizzata ad esempio per descrivere i moti propri della Terra. Sono possibili ovviamente altre scelte delle coordinate libere che danno l'orientazione di un rigido, segnaliamo gli angoli *nautici* (rollio, beccheggio).

La precedente scelta degli angoli permette di costruire la matrice di trasformazione da S a Σ come la successione di tre opportune rotazioni indipendenti (le cui matrici associate sono semplici da determinare). Precisamente consideriamo le seguenti rotazioni a partire da Σ

1. **rotazione intorno ad \underline{e}_3 di un angolo φ**



$$\Sigma \rightarrow S'(\Omega; \underline{i}', \underline{j}', \underline{k}' = \underline{e}_3)$$

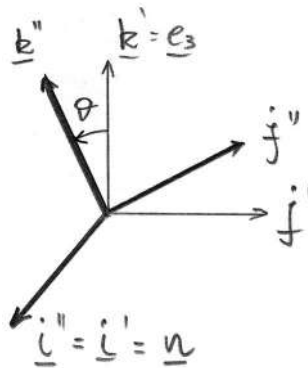
$$(\underline{x})_{\Sigma} = R_1(\varphi)(\underline{x})_{S'}$$

$$\text{dove } R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

e al solito $(\underline{x})_{\Sigma}$, $(\underline{x})_{S'}$ denotano le componenti dei vettori di posizione di un punto fissato del rigido, rispettivamente in Σ ed S' .

Notiamo che l'asse \underline{i}' coincide con la linea dei nodi ($\underline{i}' \equiv \underline{n}$)

2. rotazione intorno ad $\underline{i}' = \underline{n}$ di un angolo ϑ

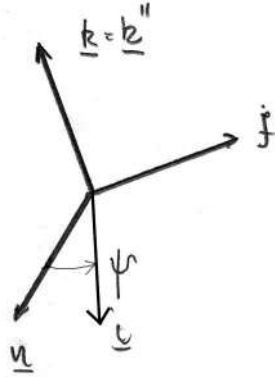


$$S' \rightarrow S''(\Omega; \underline{i}'' = \underline{i}' = \underline{n}, \underline{j}'', \underline{k}'')$$

$$(\underline{x})_{S'} = R_2(\vartheta)(\underline{x})_{S''}$$

$$R_2(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

3. rotazione intorno a \underline{k}'' di un angolo ψ



$$S'' \rightarrow S$$

$$(\underline{x})_{S''} = R_3(\psi)(\underline{x})_S$$

$$R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Applicando nell'ordine dato le tre trasformazioni abbiamo che:

$$\begin{aligned} (\underline{x})_\Sigma &= R_1(\varphi)R_2(\vartheta)R_3(\psi)(\underline{x})_S \\ &= R(\varphi, \vartheta, \psi)(\underline{x})_S \end{aligned} \quad (3.12)$$

Per esercizio calcolare la matrice $R = R_1R_2R_3$

Risultato:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi & \sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\psi & \sin\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Per determinare ora l'espressione di $\underline{\omega}$ si può scrivere la matrice $A = \dot{R}R^T$, pensando dati gli A.E. in funzione di τ e poi definire $\underline{\omega}$ tramite il Lemma

2 (vedi 3.6). Essendo tale calcolo noioso seguiremo una strada diversa in modo più euristico ma più evidente.

Durante un moto \underline{x} sarà funzione di τ tramite le espressioni degli A.E. in funzione di τ , cioè

$$\underline{x}(\tau) = \underline{x}(\varphi(\tau), \vartheta(\tau), \psi(\tau))$$

Dalle regole di derivazione di funzioni composte si ha che:

$$\frac{d\underline{x}(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial \psi} \dot{\psi}$$

Adesso notiamo che:

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \dot{\varphi}$ dà la variazione di \underline{x} dovuta ad un moto durante il quale ϑ e ψ sono fissati cioè una rotazione intorno ad \underline{e}_3 , parametro φ . Per il T.P. e per quanto visto trattando le rotazioni intorno ad assi dati si ha allora:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \underline{e}_3 \wedge \underline{x}$$

Analogamente

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta}$ é un moto con φ e ψ fissati, cioè una rotazione attorno all'asse \underline{n} , parametro ϑ

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta} \underline{n} \wedge \underline{x}$$

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \psi} \dot{\psi}$ é un moto con φ e ϑ fissati, cioè una rotazione attorno all'asse \underline{k} , parametro ψ

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \psi} \dot{\psi} = \dot{\psi} \underline{k} \wedge \underline{x}$$

Abbiamo quindi:

$$\frac{d\underline{x}}{d\tau} = (\dot{\varphi}\underline{e}_3 + \dot{\vartheta}\underline{n} + \dot{\psi}\underline{k}) \wedge \underline{x}$$

(per unicità di $\underline{\omega}$)

$$\Rightarrow \underline{\omega} = \dot{\varphi}\underline{e}_3 + \dot{\vartheta}\underline{n} + \dot{\psi}\underline{k} \quad (3.14)$$

La formula precedente (ripetiamo ottenibile in modo rigoroso come vettore associato via la (3.6) a $A = \dot{R}R^T$, R dato dalla (3.13)) esprime in modo evidente che $\underline{\omega}$ é la *somma* delle velocità angolari relative a 3 rotazioni indipendenti intorno agli assi $\underline{e}_3, \underline{n}, \underline{k}$ e di intensità rispettivamente $\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$.

Naturalmente dovendo esprimere $\underline{\omega}$ ad esempio in S non si può utilizzare direttamente la (3.14) ma bisogna esprimere prima i due vettori \underline{e}_3 ed \underline{n} nella base di S.

Ricordando le tre trasformazioni $\Sigma \rightarrow S' \rightarrow S'' \rightarrow S$ si ha che:

$$\begin{aligned} (\underline{n})_S &= R_3^T(\psi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} = \cos\psi \underline{i} + \sin\psi \underline{j} \\ (\underline{e}_3)_S &= (R_2R_3)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\psi \\ \sin\vartheta\cos\psi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \\ &= \sin\vartheta\sin\psi \underline{i} + \sin\vartheta\cos\psi \underline{j} + \cos\vartheta \underline{k} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} (\underline{\omega})_S &= (\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi) \underline{i} + \\ &= (\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi + \dot{\vartheta}\sin\psi) \underline{j} + \\ &= (\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}) \underline{k} \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.3 Spostamenti virtuali dei punti di un rigido, lavoro virtuale di un sistema di forze applicate ad un rigido e conseguenze

Lo spostamento virtuale $\delta\underline{x}_P$ del punto P di un rigido libero in un moto individuato dal parametro *tempo virtuale* τ é semplicemente $\frac{d\underline{x}_P}{d\tau} d\tau$, dal Teorema

di Poisson abbiamo allora

$$\delta \underline{x}_P = \frac{d\underline{x}_P}{d\tau} d\tau = \frac{d\underline{x}_O}{d\tau} d\tau + \underline{\omega} d\tau \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)$$

Essendo arbitraria la scelta delle funzioni $\underline{x}_O(\tau)$ e $\underline{\omega}(\tau)$ (per considerare tutti i movimenti possibili del rigido libero) si ha che

$$\delta \underline{x}_O = \frac{d\underline{x}_O}{d\tau} d\tau \text{ e } \underline{\chi} = \underline{\omega}(\tau) d\tau \quad (3.16)$$

sono due vettori (infinitesimi) arbitrari di \mathbf{R}^3

Per dare più concretezza al vettore $\underline{\chi}$ possiamo in generale usare l'espressione di $\underline{\omega}$ (3.14) cioè

$$\begin{aligned} \underline{\chi} = \underline{\omega} d\tau &= \dot{\varphi} d\tau \underline{e}_3 + \dot{\vartheta} d\tau \underline{n} + \dot{\psi} d\tau \underline{k} \\ &= \delta\varphi \underline{e}_3 + \delta\vartheta \underline{n} + \delta\psi \underline{k} \end{aligned} \quad (3.17)$$

con $\delta\varphi, \delta\vartheta, \delta\psi$ numeri reali arbitrari.

Otteniamo quindi l'espressione generale dello spostamento virtuale di un qualsiasi punto P del rigido

$$\begin{aligned} \delta \underline{x}_P &= \delta \underline{x}_O + \underline{\chi} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \\ \forall P, O \in \mathfrak{R}, \quad \delta \underline{x}_O, \underline{\chi} \in \mathbf{R}^3 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Consideriamo ora un qualsiasi sistema di forze applicato ai punti del rigido (pensiamo per comodità di esposizione ad un sistema discreto, ma il risultato si estende al caso continuo sostituendo al simbolo di $\sum_{P \in \mathfrak{R}}$ quello di integrale su \mathfrak{R} , $\int_{\mathfrak{R}}$) e utilizzando la (3.18) diamo la forma generale del Lavoro Virtuale del sistema di forze dato:

$$\begin{aligned}
\text{L.V. per rigido} &= \sum_{P \in \mathfrak{R}} \underline{F}_P \cdot \delta \underline{x}_P = \\
&\quad (\text{utilizzando per } \delta \underline{x}_P \text{ la (3.18)}) \\
&= \sum_{P \in \mathfrak{R}} \underline{F}_P \cdot [\delta \underline{x}_O + \underline{\chi} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)] \\
&\quad (\text{sviluppando}) \\
&= \sum_{P \in \mathfrak{R}} \underline{F}_P \cdot \delta \underline{x}_O + \sum_{P \in \mathfrak{R}} \underline{\chi} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \cdot \underline{F}_P \\
&\quad (\text{raccogliendo } \delta \underline{x}_O \text{ nel primo termine ed utilizzando nel} \\
&\quad \text{secondo la proprietà } \underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \wedge \underline{c} \text{)} \\
&= \delta \underline{x}_O \cdot (\sum_{P \in \mathfrak{R}} \underline{F}_P) + \sum_{P \in \mathfrak{R}} \underline{\chi} \cdot (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P \\
&\quad (\text{dove } \underline{R} = \sum_{P \in \mathfrak{R}} \underline{F}_P \text{ e } \underline{M}(O) = \sum_{P \in \mathfrak{R}} (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P \\
&\quad \text{sono dette rispettivamente la risultante ed il momento} \\
&\quad \text{risultante del sistema di vettori applicati } \{P, \underline{F}_P\} \\
&= \delta \underline{x}_O \cdot \underline{R} + \underline{\chi} \cdot \underline{M}(O) = (\text{L. V. per il rigido}) \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Questo é un risultato, semplice da ottenere ma importante, del Teorema di Poisson, esso esprime il fatto che, vista la struttura interna di un rigido, il lavoro virtuale di un sistema di forze dipende *solo* dalla risultante \underline{R} e dal momento risultante rispetto ad un punto O del rigido fissato una volta per tutte.

Esempio 3.1

Su una lamina piana nel piano $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ e vincolata come in figura é applicato un sistema di 10.000 forze che ha risultante e momento risultanti pari a:

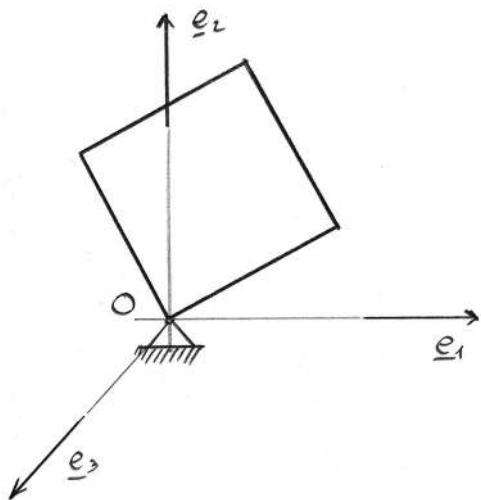


Figure 3.2:

$$\underline{R} = f \underline{e}_1$$
$$\underline{M}(0) = \mu \underline{e}_3$$

Calcolare il lavoro virtuale del sistema dato.

Risoluzione:

Abbiamo che $\delta \underline{x}_O = 0$ e $\underline{\chi} = \delta \varphi \underline{e}_3$ quindi:

$$\text{L.V.} = \mu \delta \varphi$$

Esempio 3.2

Considerando il cubo rigido in figura con le forze applicate, calcolare il lavoro virtuale totale:

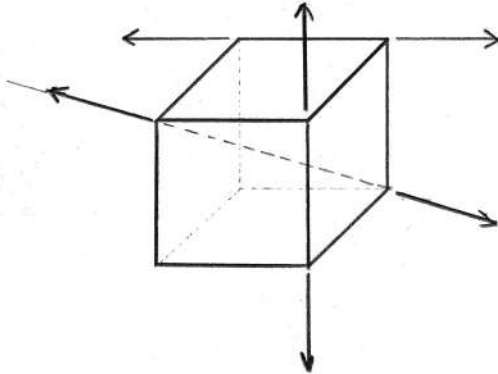


Figure 3.3:

Risoluzione:

Essendo il sistema composto da coppie di braccio nullo esso ha $\underline{R} = 0$, $\underline{M}(O) = 0, \forall O \in R$ quindi per (3.19) L.V. = 0.

Nel caso di un rigido *piano* che si muove nel suo piano si ha, detta $\underline{e}_3 = \underline{k}$ la normale al piano del moto, che se φ é l'angolo di rotazione:

$$\begin{aligned}\delta \underline{x}_O &= \delta x_O \underline{e}_1 + \delta y_O \underline{e}_2 \\ \underline{\chi} &= \chi \underline{e}_3 = \delta \varphi \underline{e}_3\end{aligned}$$

quindi il generico spostamento virtuale é

$$\delta \underline{x}_P = \delta \underline{x}_O + \delta \varphi \underline{e}_3 \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \quad (3.20)$$

Quindi la (3.19) diventa:

$$L. V. \text{ per rigido piano} = \underline{R} \cdot \delta \underline{x}_O + [\underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3] \delta \varphi \quad (3.21)$$

Esempio 3.3

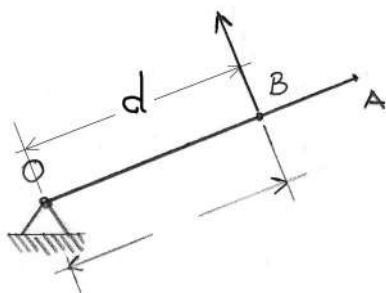


Figure 3.4:

Consideriamo un'asta OA rigida vincolata con una cerniera fissa in O, caricata da una forza \underline{F}_B applicata in B di modulo e verso costante (come in figura) ed ortogonale all'asta OA = carico *follower*.

(Possiamo pensare ad esempio ad \underline{F}_B esercitata da una persona che agisca su un'asta rigida di massa trascurabile incastrata in B ortogonalmente ad OA.)

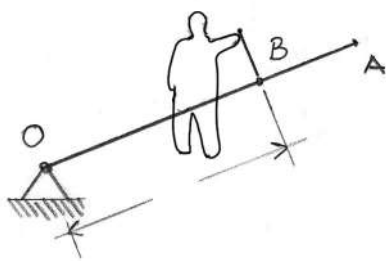


Figure 3.5:

Abbiamo che, essendo \underline{F}_B l'unica forza attiva in esame:

$$\begin{aligned}
 L. V. &= \delta \underline{x}_O \cdot \underline{F}_B + \delta \varphi \underline{e}_3 \cdot (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_B \\
 & \quad (\delta \underline{x}_O = 0 \text{ e } (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_B = |\underline{F}_B| d \underline{e}_3) \\
 &= \delta \varphi d |\underline{F}_B|
 \end{aligned}$$

Nota:

La (3.19) dà un'interpretazione fisica delle forze generalizzate nel caso di un rigido libero in 3 dimensioni quando si scelgano come coordinate libere le coordinate di O e gli angoli di Eulero.

Infatti avremo che le forze generalizzate relative alle coordinate di O sono le componenti della risultante sui 3 assi di Σ e le forze generalizzate relative agli angoli di Eulero sono le componenti del momento risultante rispetto ad O sui tre assi $\underline{e}_3, \underline{n}, \underline{k}$. In formule

$$\begin{aligned} Q_{x_O} &= \underline{R} \cdot \underline{e}_1 & , & & Q_{y_O} &= \underline{R} \cdot \underline{e}_2 & , & & Q_{z_O} &= \underline{R} \cdot \underline{e}_3 \\ Q_\varphi &= \underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3 & , & & Q_\theta &= \underline{M}(O) \cdot \underline{n} & , & & Q_\psi &= \underline{M}(O) \cdot \underline{k} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nel caso *rigido piano* con la solita scelta delle coordinate libere x_O, y_O, φ , avremo:

$$Q_{x_O} = \underline{R} \cdot \underline{e}_1 \quad , \quad Q_{y_O} = \underline{R} \cdot \underline{e}_2 \quad , \quad Q_\varphi = \underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3 \quad (3.23)$$

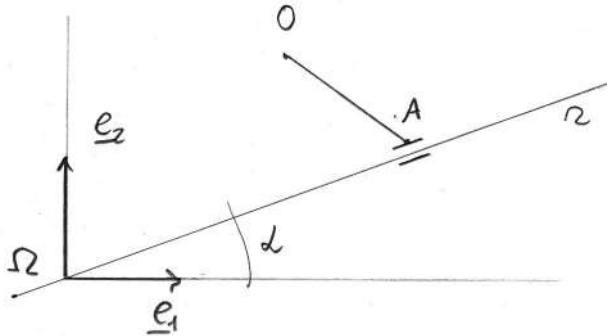
3.4 Vincoli lisci ed applicazione del P.L.V. ai sistemi isostatici

Come abbiamo visto nel Cap. 2 Par. 1, un modo operativo di definire il carattere *senza attrito* dei vincoli é quello di caratterizzare il lavoro virtuale delle forze di reazione dei vincoli. Ricordiamo che per i vincoli bilateri regolari gli spostamenti virtuali sono *invertibili* e quindi abbiamo che:

Vincoli lisci \Leftrightarrow L.V. forze reattive nullo

Diamo qui due esempi tra i più comuni:

Esempio 3.4 (*cerniera con carrello, vedi esempio 3.1*)



In generale la cerniera può reagire con una forza in A, \underline{F}_A^r , ed una coppia di reazione di momento ortogonale al piano $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \mu^r \underline{e}_3$.

Intuitivamente dire che la cerniera è liscia vuol dire che serve *solo* a trattenere A sulla retta r e non si oppone al moto di traslazione lungo r nè a quello di rotazione intorno ad A, quindi rispettivamente la componente di \underline{F}_A^r lungo r ed il momento di reazione devono essere nulli se non c'è attrito. Ritroviamo questo risultato tramite il calcolo del lavoro virtuale delle forze reattive:

detto $\underline{u} = \text{vers retta } r, \rho = \text{distanza } \overline{A\Omega}$

$$\Rightarrow \delta \underline{x}_A = \underline{u} \delta \rho, \delta \rho \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} L. V. \text{ reazioni} &= (\text{ caso piano }) \underline{F}_A^r \cdot \delta \underline{x}_A + \mu^r \underline{e}_3 \cdot \chi \underline{e}_3 \\ &= (\underline{F}_A^r \cdot \underline{u}) \delta \rho + \mu^r \chi \\ &= 0, \forall \delta \rho, \chi \in \mathbf{R} \\ &\Rightarrow \underline{F}_A^r \cdot \underline{u} = 0 \text{ e } \mu^r = 0 \end{aligned}$$

Quindi una cerniera con carrello *liscia* può reagire solo con una forza applicata nella cerniera ed ortogonale alla retta su cui si muove il carrello.

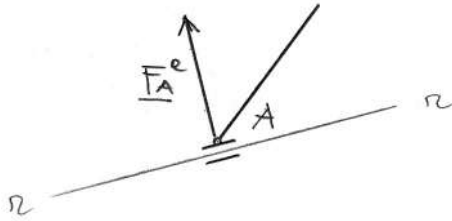


Figure 3.6:

Esempio 3.5 (cerniera fissa)

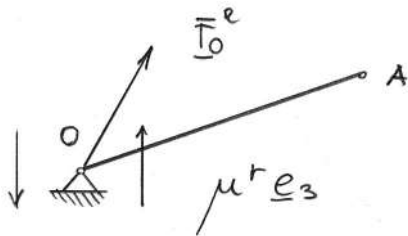


Figure 3.7:

$$\begin{aligned}
 L. V. \text{ reazioni} &= \underline{F}_O^r \cdot \delta \underline{x}_O + \chi \underline{e}_3 \cdot \mu^r \underline{e}_3 \\
 &= (\text{essendo } \delta \underline{x}_O = \underline{0}) \chi \mu^r \\
 &= 0 \quad \forall \chi \in \mathbf{R} \Rightarrow \mu^r = 0
 \end{aligned}$$

Come é intuitivamente evidente una cerniera fissa liscia può reagire solo con una forza in direzione arbitraria (e quindi nel piano con due componenti arbitrarie) applicata nella cerniera e non ha coppie di reazione (cioè impedisce al punto O del rigido di spostarsi ma non ostacola il moto di rotazione del rigido intorno alla cerniera).

Applicazione del P.L.V. ai sistemi isostatici

Consideriamo ora un sistema isostatico a vincoli lisci, se pensiamo (virtualmente) di sopprimere uno dei vincoli e di sostituirlo con la forza di reazione corrispondente, otterremo un sistema ad un grado di libertà soggetto, oltre

che alle forze attive già agenti sul sistema isostatico, alla forza di reazione del vincolo dato, pensata come forza attiva tale da tenere il nuovo sistema in equilibrio nella configurazione del sistema isostatico di partenza. Potremo quindi usare il P.L.V. per calcolare tale reazione. Spieghiamo meglio tale procedimento con degli esempi.

Esempio 3.6 (vedi Esempio 1.9 e 2.5)

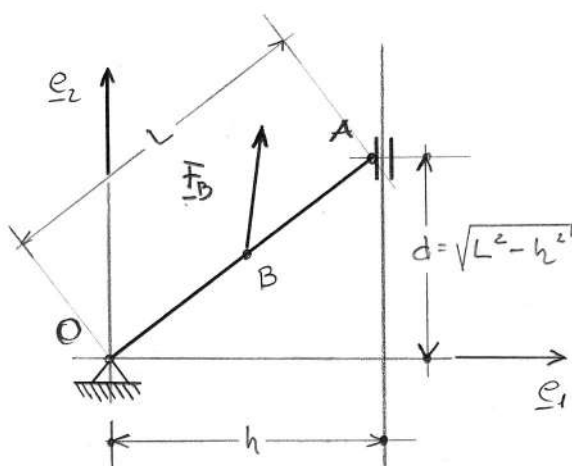


Figura 3.8

$$\overline{OA} = l \quad \overline{OB} = l/2$$

$$\underline{F}_B = H_B \underline{e}_1 + V_B \underline{e}_2$$

Vogliamo calcolare la reazione in A, se il vincolo é liscio esso *risponde* con una forza in A diretta come \underline{e}_1 , diciamo $H_A \underline{e}_1$

Sopprimiamo (virtualmente) il vincolo in A otterremo il seguente sistema, ad un grado di libertà, in equilibrio nella configurazione di figura sotto l'azione delle forze attive \underline{F}_B in B ed H_A in A.

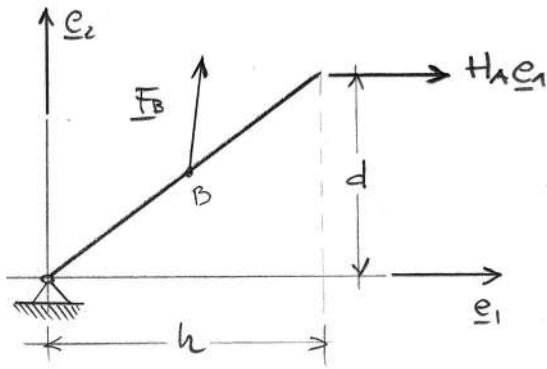


Figure 3.8:

Calcoliamo per questo sistema il L.V. delle forze attive

$$\begin{aligned}
 L. V. &= H_A \underline{e}_1 \cdot \delta \underline{x}_A + \underline{F}_B \cdot \delta \underline{x}_B \\
 \delta \underline{x}_A &= \chi \underline{e}_3 \wedge (\underline{x}_A - \underline{x}_O) = \chi \underline{e}_3 \wedge (h \underline{e}_1 + d \underline{e}_2) \\
 &= \chi (d \underline{e}_1 - h \underline{e}_2) \\
 \delta \underline{x}_B &= \chi \underline{e}_3 \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O) = \chi \underline{e}_3 \wedge \frac{1}{2}(\underline{x}_A - \underline{x}_O) \\
 &= \frac{1}{2} \delta \underline{x}_A = \frac{\chi}{2} (d \underline{e}_1 - h \underline{e}_2) \\
 \Rightarrow L. V. &= \chi (d H_A + \frac{d}{2} H_B - \frac{h}{2} V_B) = 0, \quad \forall \chi \in \mathbf{R}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{condizione di equilibrio} : d H_A + \frac{d}{2} H_B - \frac{h}{2} V_B = 0 \quad (3.24)$$

$$\text{Se } d \neq 0 \Rightarrow H_A = \frac{h}{2d} V_B - \frac{H_B}{2}$$

Ricordiamo che per quanto visto nel cap. 2 Par 6, la condizione $d \neq 0$, quindi $h < l$, garantisce l'indipendenza dei tre vincoli presenti sul sistema isostatico. Vediamo ora che tale condizione consente di determinare in modo unico H_A per un qualsiasi valore di \underline{F}_B (cioè di H_B e V_B).

Cosa succede se invece $d = 0$, vedi fig. (3.9)

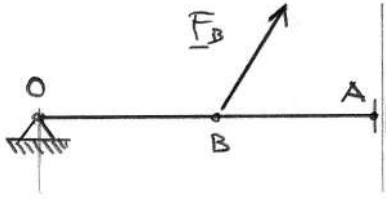


Figure 3.9:

Dalla (3.24) (per $d = 0$) si ha che all'equilibrio deve essere:

$$h V_B = 0$$

e quindi si ha che

Se $d = 0$ e $V_B = 0 \Rightarrow$ equilibrio per ogni valore di H_A , si dice che il problema é *STATICAMENTE INDETERMINATO*

Se $d = 0$ e $V_B \neq 0 \Rightarrow$ l'equilibrio é impossibile

Quindi in dipendenza dalla forza applicata \underline{F}_B o si hanno infinite soluzioni per H_A (appunto H_A indeterminata) o nessuna. Notiamo che, tornando al caso $d \neq 0$,

$$se V_B \neq 0 \quad H_A \rightarrow \infty \quad per \quad d \rightarrow 0$$

Questo vuol dire che, essendo in pratica i vincoli capaci di reggere sforzi non superiori ad una data soglia, ci sarà un valore di soglia per d al di sotto del quale lo sforzo nella cerniera é eccessivo ed il vincolo cede, dire equilibrio impossibile vuol dire che in pratica il vincolo si é rotto perchè soggetto a sforzo eccessivo, già per $d \cong 0$.

Nota 3

Cosa accade se il vincolo in A non é liscio, ad esempio se oltre alla reazione $H_A \underline{e}_1$ é presente una reazione (di attrito) diretta come la guida, denotiamola

$V_A \underline{e}_2$? Se procedendo come prima *sopprimiamo* la cerniera in A, dobbiamo ora *sostituirla* con 2 forze attive $H_A \underline{e}_1$ e $V_A \underline{e}_2$.

Avremo quindi (vedi figura 3.9')

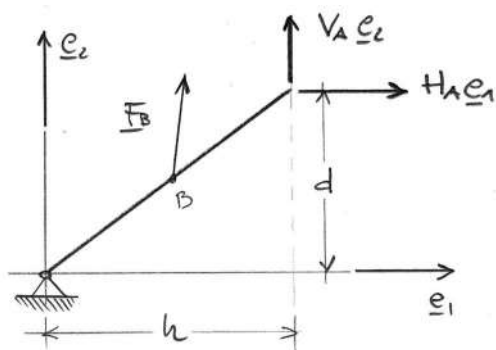


Figura 3.9'

$$\begin{aligned}
 L : V. f. attive &= \underline{F}_B \cdot \delta \underline{x}_B + H_A \underline{e}_1 \cdot \delta \underline{x}_A + V_A \underline{e}_2 \cdot \delta \underline{x}_A \\
 &= (\text{usando i calcoli precedenti}) \\
 &\chi (d H_A - h V_A + d/2 H_B - h/2 V_B) = 0 \quad \forall \chi \\
 \Rightarrow &d H_A - h V_A + d/2 H_B - h/2 V_B = 0
 \end{aligned}$$

Questa equazione contiene le 2 incognite H_A e V_A e non può quindi dare un valore unico per ciascuna di loro, il problema è quindi *Staticamente Indeterminato*.

Qualcosa di analogo accade per i sistemi iperstatici. Se ad esempio abbiamo il seguente:

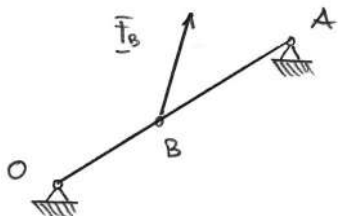


Figure 3.10:

e pensiamo di sopprimere la cerniera fissa in A otteniamo comunque il sistema ad un grado di libertà di figura (3.9') anche se la cerniera in A è liscia. Come nel caso precedente il problema risulta *staticamente indeterminato*.

Quindi sia i vincoli con attrito che i sistemi iperstatici portano a problemi Staticamente Indeterminati, in cui però (diversamente dal caso dei vincoli non indipendenti, caso $d = 0$ dell'esempio) l'equilibrio è assicurato, solo che *col presente metodo* non siamo in grado di determinare univocamente le reazioni.

Il punto é che noi abbiamo usato fortemente l'ipotesi che l'asta \overline{OA} sia rigida, e questa é una prima approssimazione della realtà fisica, in altre parole questi esempi ci mostrano che il modello di corpo rigido ha dei limiti (ad esempio non permette di calcolare esattamente le reazioni nel caso iperstatico)

Esercizio 3.1 (*vincoli lisci*)

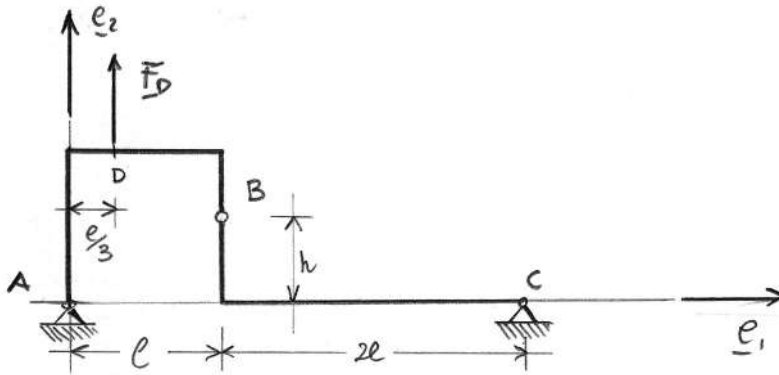


Figure 3.11:

Calcolare la componente sull'asse \underline{e}_1 della reazione in C ($H_C \underline{e}_1$)

3.5 Campo di velocità per un rigido, asse istantaneo di moto

Senza distinguere se siamo in un moto virtuale o fisico, notiamo che la F.P. definisce per ogni punto P di un rigido che si sta muovendo con *caratteristiche* $\underline{x}_O(t)$ e $\underline{\omega}(\tau)$ la *velocità* di P, che indicheremo con $\underline{v}_P = \frac{d\underline{x}_P}{d\tau}$, (virtuale o fisica), in funzione della posizione di P, \underline{x}_P , precisamente:

$$\underline{v}_P(\underline{x}_P) = \underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \quad (F. P.)$$

Fissato un istante generico, la formula di Poisson definisce un *campo di velocità* (in linguaggio analitico una funzione dall'insieme delle *posizioni* a quello delle *velocità*, vedi in seguito Cap. 4) con una struttura speciale, che ci proponiamo di studiare per la sua importanza sia teorica che applicativa. Cominciamo con un esempio,

Esempio 3.7

Prendiamo un cubo rigido e fissiamo una terna di assi solidali ad S come in figura (supponiamo che coincida nella configurazione di figura con la terna fissa a Σ)

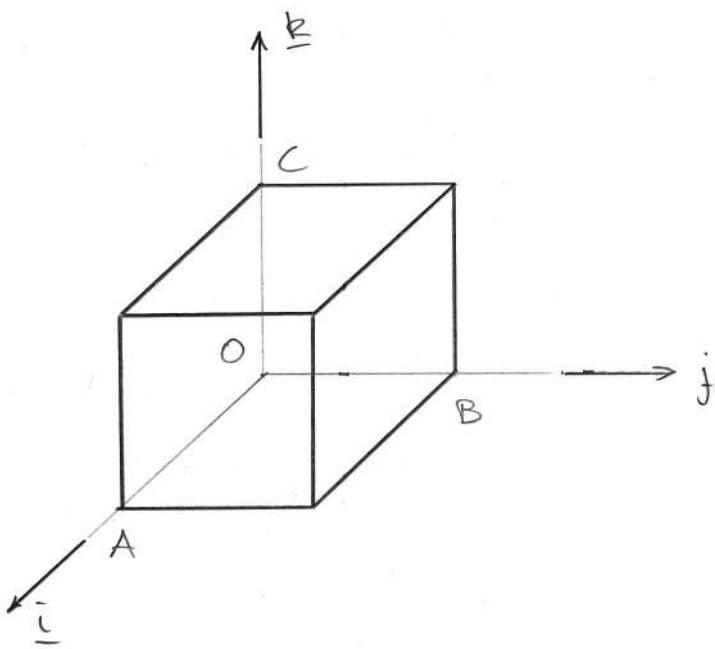


Figure 3.12:

Come primo esempio studiamo il moto di caratteristiche:

$$\underline{v}_O = c \underline{k} \quad e \quad \underline{\omega} = \omega_0 \underline{k}, \quad c, \omega_0 \text{ costanti}$$

Dalla F.P. abbiamo che, sopprimendo il suffisso P ed indicando con \underline{x} il vettore di posizione di un generico punto del cubo (in S e.g)

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_O) = c \underline{k} + \omega_0 \underline{k} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_O)$$

Abbiamo allora che:

se $\omega_0 = 0$ allora $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}_O = c \underline{k} \forall \underline{x}$ cioè il cubo trasla con velocità $c \underline{k}$

se $\omega_0 \neq 0$ essendo il termine $\omega_0 \underline{k} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_O)$ ortogonale a \underline{k} , $\underline{v}(\underline{x})$ è la somma di una velocità, indipendente da \underline{x} , in direzione di \underline{k} (quindi di $\underline{\omega}$), $c \underline{k}$, e di una velocità normale sia a \underline{k} che a $(\underline{x} - \underline{x}_O)$, che denoteremo con $\underline{n}(\underline{x}) = \omega_0 \underline{k} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_O)$ che è precisamente la velocità che avrebbe il punto di posizione \underline{x} se il cubo si limitasse a ruotare attorno all'asse \underline{k} con velocità angolare $\omega_0 \underline{k}$.

Quindi il moto complessivo del cubo è di *avvitamento* intorno all'asse \underline{k} , esattamente il moto di una vite.

Tale moto viene detto in meccanica *elicoidale* perchè ci si convince facilmente che la traiettoria di un punto non appartenente all'asse \underline{k} è un'elica cilindrica (la rigatura di un perno cilindrico). Se in particolare $\underline{v}_O = \underline{0}$ il moto è di pura rotazione intorno all'asse \underline{k} .

Notiamo che in un moto rigido generico $\underline{v}_O(\tau)$ ed $\underline{\omega}(\tau)$ possono variare con τ , noi fissiamo τ in modo arbitrario e parleremo di *atto di moto* traslatorio o elicoidale o rotatorio, perchè l'informazione sullo stato di velocità in un dato *istante* τ sostanzialmente mi dice solo come il rigido *ha intenzione di muoversi in quell'istante*; ad un tempo successivo la situazione della velocità (il campo di velocità) può cambiare (se c'è accelerazione).

Passando ad un moto rigido *generico*, utilizzando la F.P., osserviamo i seguenti semplici fatti:

1. se $\underline{\omega} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}_O \forall \underline{x}$ (cioè tutti i punti hanno uguale velocità)

2. se $\underline{\omega} \neq \underline{0} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) \cdot \text{vers } \underline{\omega} &= \\ &= \underline{v}_O \cdot \text{vers } \underline{\omega} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_O) \cdot \text{vers } \underline{\omega} \\ &= \end{aligned}$$

(essendo il secondo termine un prodotto misto con due vettori tra loro paralleli esso è nullo)

$$J = \underline{v}_O \cdot \text{vers } \underline{\omega} = I \quad \forall \underline{x}$$

(questo vuol dire che la componente lungo la direzione di $\underline{\omega}$ delle velocità è uguale per tutti i punti, essa è detta *Invariante Scalare*)

3. se $\underline{\omega} \neq \underline{0} \Rightarrow$ dati 2 punti diversi P e P' $\underline{v}_P = \underline{v}_{P'}$ se e solo se $(\underline{x}_P - \underline{x}_{P'})$ è parallelo ad $\underline{\omega}$, infatti

$$\underline{v}_P = \left(\text{prendendo } O = P' \right) \\ \underline{v}_{P'} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_{P'})$$

quindi $\underline{v}_P = \underline{v}_{P'}$ se e solo se

$\underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_{P'}) = 0$ cioè $\underline{\omega}$ e $(\underline{x}_P - \underline{x}_{P'})$ sono paralleli

(quindi i punti appartenenti ad una qualsiasi retta di direzione $\underline{\omega}$ hanno la stessa velocità).

Poichè ogni informazione sul campo di velocità in un dato istante dà informazioni sull'*atto di moto* che il rigido possiede in tale istante, dai 3 fatti sopra esposti si ottiene il seguente teorema che ci dice che un rigido può avere sostanzialmente solo i due tipi di di *atti di moto* descritti all'esempio 3.7 .

Teorema di Mozzi:

(vedi [LCA] Vol I, Cap III Par 17 nota a piè pagina)

*Ogni atto di moto di un rigido è o traslatorio, se $\underline{\omega}(\tau) = \underline{0}$ o elicoidale, se $\underline{\omega}(\tau) \neq \underline{0}$ (cioè tipo una vite) intorno ad una particolare retta detta **asse istantaneo di moto**, in breve A.I.M. o *asse si Mozzi*.*

Inoltre, nel caso elicoidale ($\underline{\omega}(\tau) \neq \underline{0}$) i punti dell'A.I.M. (e solo loro) hanno la proprietà:

$$\underline{v}(\underline{x}) = (\underline{v}_O \cdot \text{vers}\underline{\omega}) \text{vers}\underline{\omega} = \underline{c} \quad , \quad \forall \underline{x} \in A.I.M. \quad (3.25)$$

e l'equazione dell'A.I.M. è

$$\underline{x} = \underline{x}_O + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_O}{\|\underline{\omega}\|^2} + \lambda \underline{\omega} \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad (3.26)$$

Commentiamo subito le due formule precedenti:

- Visto il punto (2) sappiamo che, scomponendo le velocità di un generico punto del rigido in una componente parallela ad $\underline{\omega}$ più una normale ad $\underline{\omega}$ la prima è uguale per tutti i punti del rigido (e quindi è proprio \underline{c} della 3.25) mentre la seconda varia col punto, e la chiameremo $\underline{n}(\underline{x})$.

In formule

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{c} + \underline{n}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \mathfrak{R} \quad (3.27)$$

I punti dell'A.I.M godono quindi della proprietà che $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{c}$, cioè $\underline{n}(\underline{x}) = \underline{0}$ essi hanno quindi velocità *minima* rispetto a tutti i punti di \mathfrak{R} .

- dall'equazione (3.26) si vede che l'A.I.M. è una retta di direzione $\underline{\omega}$ (vedi il termine $\lambda \underline{\omega}$, $\lambda \in R$) che passa per un punto particolare del rigido definito da:

$$\underline{x} - \underline{x}_O = \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_O}{\|\underline{\omega}\|^2}$$

L'A.I.M. è quindi determinato (al tempo τ) conoscendo $\underline{\omega}(\tau)$ e $\underline{v}_O(\tau)$. Esso può ovviamente variare con τ se $\underline{\omega}$ e $\underline{v}_O(\tau)$ non sono costanti, ma è determinato per ogni istante τ dalla formula (3.26).

Prima di passare alla dimostrazione del Teorema di Mozzi diamone un'applicazione:

Esempio 3.8

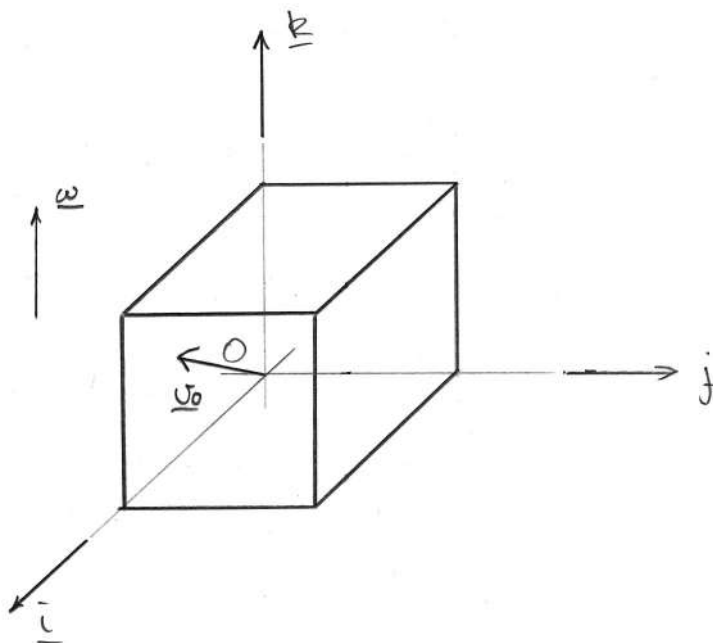


Figura 3.13'

fissato τ :

$$\begin{aligned} \underline{v}_O &= a \underline{i} + b \underline{k} \\ \underline{\omega} &= \omega_0 \underline{k}, \quad \omega_0 \neq 0 \end{aligned}$$

Problema: determinare l'A.I.M. e \underline{c} :

Dalle (3.25) (3.26) si ha che:

$$\begin{aligned} \underline{c} & \quad (\text{essendo } \underline{k} = \text{vers} \underline{\omega}) = (\underline{v}_O \cdot \underline{k}) \underline{k} = \\ & = b \underline{k} \end{aligned}$$

e l'A.I.M. ha direzione \underline{k} e passa per il punto

$$\underline{x} - \underline{x}_O = \frac{\omega_0 \underline{k} \wedge \underline{v}_O}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0} (\underline{k} \wedge (a \underline{i} + b \underline{k})) \quad (3.28)$$

$$= \frac{1}{\omega_0} a \underline{j} \quad (3.29)$$

$$(3.30)$$

cioè il punto che nel sistema solidale S (con origine in 0) ha coordinate $(0, a/\omega_0, 0)$

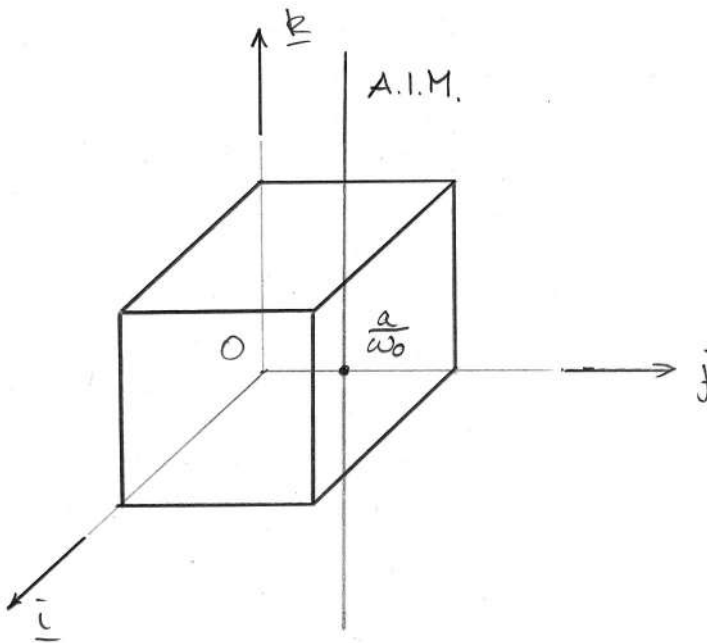


Figure 3.13:

Quindi il cubo si sta avvitando intorno a A.I.M. con velocità di traslazione $b \underline{k}$ e velocità angolare di rotazione data da $\omega_0 \underline{k}$.

Dimostrazione del Teorema.

- Se $\underline{\omega} = \underline{0}$ il Teorema è ovvio

- Se $\underline{\omega} \neq \underline{0}$, Notiamo subito che per la proprietà (2) solo i punti dell'A.I.M. godono della proprietà:

$$\underline{v}(x) = \underline{c} \Leftrightarrow \underline{n}(x) = \underline{0} \quad \text{solo se } x \in A.I.M.$$

Adesso dobbiamo solo verificare che i punti dati dalla (3.26) soddisfino la soprascritta proprietà (cioè la (3.25)), in altre parole sono le soluzioni dell'equazione vettoriale $\underline{v}(x) = \underline{c}$.

Da F.P. $\forall x$ che soddisfa la (3.26)

$$\begin{aligned} \underline{v}(x) &= \underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_O) = (\text{per(3.26)}) \\ &= \underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge \left[\frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_O}{\|\underline{\omega}\|^2} + \lambda \underline{\omega} \right] \\ &= (\text{svolgendo il prodotto vettoriale}) \\ &\quad \underline{v}_O + \frac{1}{\|\underline{\omega}\|^2} \underline{\omega} \wedge [\underline{\omega} \wedge \underline{v}_O] \\ &= (\text{usando la formula del doppio prodotto vettoriale}) \\ &\quad \underline{a} \wedge [\underline{b} \wedge \underline{c}] = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c} \\ &\quad \underline{v}_O + \frac{1}{\|\underline{\omega}\|^2} [(\underline{\omega} \cdot \underline{v}_O) \underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \underline{\omega}) \underline{v}_O] \\ &= (\text{essendo } \text{vers} \underline{\omega} = \frac{\underline{\omega}}{\|\underline{\omega}\|} \text{ e } \|\underline{\omega}\|^2 = \underline{\omega} \cdot \underline{\omega}) \\ &\quad \underline{v}_O + (\underline{v}_O \cdot \text{vers} \underline{\omega}) \text{vers} \underline{\omega} - \underline{v}_O \\ &= (\underline{v}_O \cdot \text{vers} \underline{\omega}) \text{vers} \underline{\omega} = \underline{c} \end{aligned}$$

- Preso un punto qualsiasi dell'A.I.M., e.g. Q, per ogni punto del rigido si ha che, per la F.P. prendendo O = Q:

$$\begin{aligned} \underline{v}_P(\underline{x}_P) &= \underline{v}_Q + \underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_Q) \\ &= (\text{poiché } Q \in A.I.M. , \underline{v}_Q = \underline{c}) \\ &\quad \underline{c} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_Q) \end{aligned}$$

Quindi, appunto, \underline{v}_P è la somma di una velocità diretta come $\underline{\omega}$, \underline{c} (uguale per tutti i punti di \mathfrak{R}) e di una velocità $\underline{n}(x) = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_Q)$ ortogonale ad $\underline{\omega}$ e pari proprio ad una velocità di rotazione intorno alla retta passante per Q e di direzione $\underline{\omega}$, cioè all'A.I.M. .

In altre parole l'atto di moto del rigido è elicoidale intorno all'A.I.M., con caratteristiche $\underline{v}_Q = \underline{c}$, $\underline{\omega}$.

Esercizio 3.2

Per il cubo di figura 3.13 determinare l'A.I.M. e $\underline{c} = (\underline{v}_O \cdot \text{vers}\underline{\omega}) \text{vers}\underline{\omega}$ nei due casi seguenti

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{v}_O &= -\underline{i} + \underline{k} \quad , \quad \underline{\omega} = 2 \underline{j} \\ 2) \quad \underline{v}_O &= 2 \underline{j} + 3 \underline{k} \quad , \quad \underline{\omega} = \underline{k} \end{aligned}$$

Notare che se $\underline{c} = (\underline{v}_O \cdot \text{vers}\underline{\omega}) \text{vers}\underline{\omega} = \underline{0}$ il rigido non ha la velocità lungo l'A.I.M. fa quindi un atto di moto puramente rotatorio.

Precisamente:

$$\forall P \in \mathfrak{R} \quad \underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_Q) \quad , \quad Q \in A.I.M.$$

In questi casi: A.I.M. = *Asse di istantanea rotazione* = A.I.R.

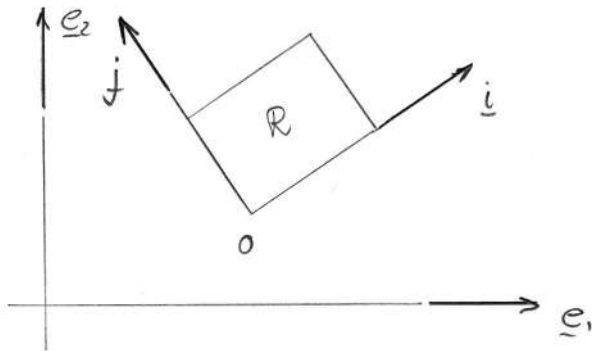
Notare che l'atto di moto rotatorio è un caso particolare di quello elicoidale.

3.6 Moto rigido piano, centro di istantanea rotazione

Come abbiamo rilevato più volte nelle applicazioni è molto importante il caso del moto di un *rigido piano nel suo piano*. Lo esamineremo qui in dettaglio. Nel caso *piano* si ha sempre

$$\begin{aligned} \text{Se } (\underline{\omega} \neq \underline{0}) \quad \underline{\omega} &\text{ normale al piano del moto} \\ \underline{v}_O &\text{ appartiene al piano del moto} \\ \Rightarrow \underline{c} &= (\underline{v}_O \cdot \text{vers}\underline{\omega}) \underline{\omega} = \underline{0} \end{aligned}$$

Notiamo subito che si può dare una definizione più generale di *moto rigido piano* (vedi [FDM] Pag. 218) ma preferiamo concentrarci sul caso più evidente, vedi figura (3.14)



$$\underline{e}_3 = \underline{k}$$

Figure 3.14:

Abbiamo quindi un caso particolare del Teorema precedente che esaminiamo nuovamente (era stato scoperto indipendentemente)

Teorema di Eulero *Ogni atto di moto rigido piano è o traslatorio (se $\underline{\omega} = \underline{0}$) o rotatorio (se $\underline{\omega} \neq \underline{0}$) intorno ad un punto C appartenente al piano (detto Centro di Istantanea Rotazione o C.I.R.) definito da:*

$$\underline{x}_C = \underline{x}_O + \frac{\underline{\omega} \wedge \underline{v}_O}{\|\underline{\omega}\|^2}, \quad C = \text{C.I.R.} \quad (3.31)$$

Dimostrazione Con riferimento alla figura 3.14, abbiamo

$$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_3, \quad \underline{v}_O \cdot \underline{e}_3 = 0$$

Quindi l'atto di moto se non è traslatorio ($\underline{\omega} = \underline{0}$) è di pura rotazione essendo $\underline{c} = \underline{0}$. Considerando l'intersezione dell'A.I.M. (= A.I.R.) con il piano di moto ($\underline{e}_1, \underline{e}_2$), cioè $\lambda = 0$ nella (3.26), otteniamo la (3.31).

Notiamo subito che il C.I.R. gode della

Proprietà 1 del C.I.R.

Il C.I.R. è l'unico punto che ha velocità nulla (ovviamente in un atto di moto *non* traslatorio i.e. $\underline{\omega} \neq \underline{0}$).

Inoltre si ha che:

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathfrak{R} \quad \underline{v}_P &= (\text{prendendo } O = C \text{ in F.P.}) \\ &= \underline{v}_C + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C) \\ &\quad (\text{essendo } \underline{v}_C = \underline{0}) \\ &= \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Segue subito dalla (3.32) una seconda proprietà del C.I.R. che è importante nelle applicazioni

Proprietà 2 del C.I.R.

(Detto anche Teorema di Chasles)

$$\forall P \in \mathfrak{R} : (\underline{x}_P - \underline{x}_C) \text{ è ortogonale a } \underline{v}_P$$

Esempio 3.9

(classico di applicazione della proprietà 2) asta rigida AB vincolata come in figura

Il punto C è il C.I.R. nella configurazione di figura perchè:

- \underline{v}_A è diretto come l'asse \underline{e}_1 (perchè A è vincolato a stare sull'asse \underline{e}_1) quindi, per la Proprietà 2 ($\underline{x}_A - \underline{x}_C$) è normale ad \underline{e}_1 , cioè C deve appartenere alla retta per A ortogonale ad \underline{e}_1 (cioè r_A)
- \underline{v}_B è diretta come l'asse \underline{e}_2 , quindi ripetendo il ragionamento precedente C deve appartenere alla retta per B ortogonale all'asse \underline{e}_2 (cioè r_B)

Quindi C deve essere l'intersezione di r_A ed r_B .

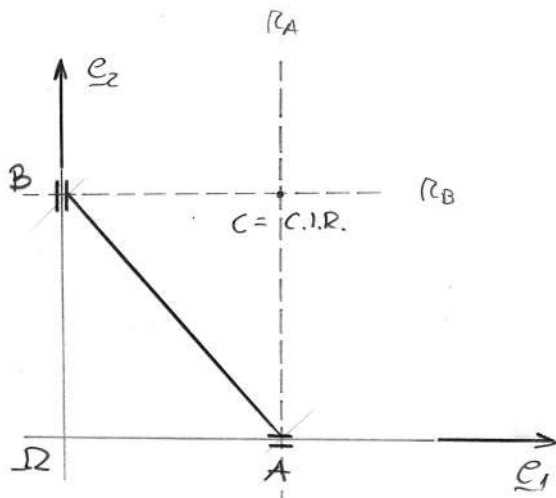


Figure 3.15:

Nei sistemi vincolati capita spesso che si conosca la traiettoria di 2 punti dello stesso rigido, a causa dei vincoli appunto: si può allora usare la Proprietà 2 per determinare la posizione del C.I.R., come nell'esempio fatto sopra.

Esempio 3.10

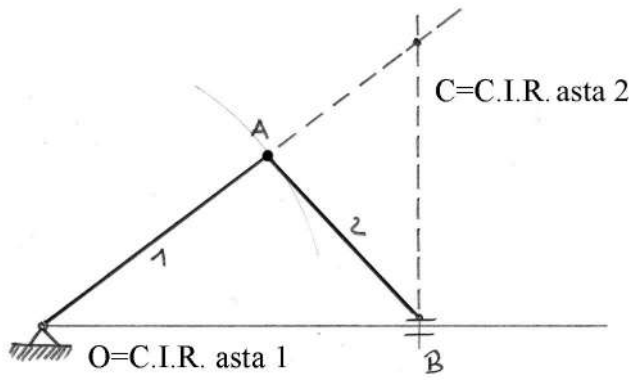


Figure 3.16:

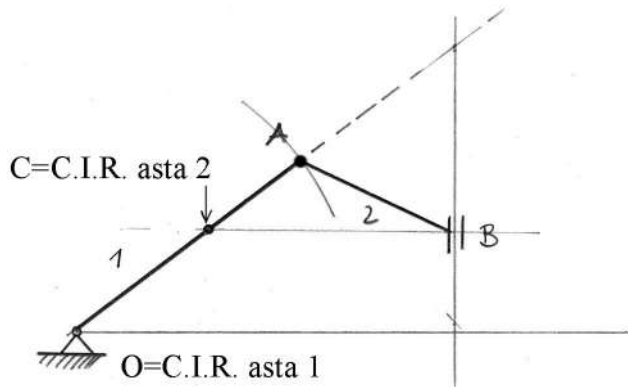


Figure 3.17:

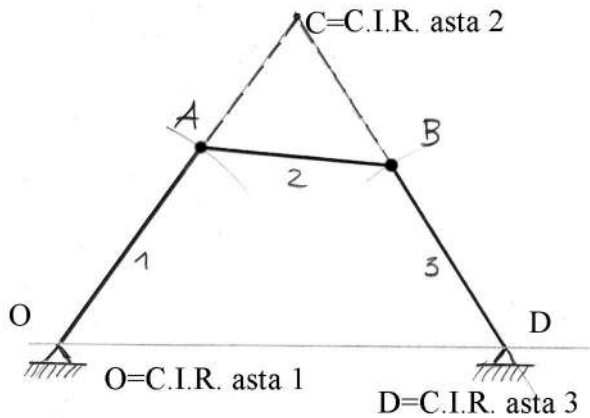


Figure 3.18:

Nota di approfondimento

Passando dalla velocità agli spostamenti virtuali, la formula (3.32) si legge:

$$\begin{aligned}
 \forall P \in \mathfrak{R} \quad \delta \underline{x}_P &= \underline{v}_P d\tau = \underline{\omega} d\tau \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C) \\
 &\quad (\text{ponendo al solito}) \\
 &= \underline{\omega} d\tau = \frac{d\varphi}{d\tau} d\tau \underline{e}_3 = \delta\varphi \underline{e}_3 \\
 &= \delta\phi \underline{e}_3 \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_C)
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

Segue subito che:

Proprietà 3 del C.I.R. (euristica)

Gli spostamenti virtuali dei punti di un rigido *piano* si ottengono *pensando* al C.I.R. come ad un punto *del* rigido intorno a cui il rigido ruota, di un angolo infinitesimo $\delta\varphi$.

Detto in altre parole, si visualizza nello spazio solidale al rigido prendendo come origine del sistema solidale proprio il C.I.R. ad un istante fissato e si fa ruotare il sistema solidale intorno al C.I.R. , trascinandosi dietro il rigido.

Rimarchiamo che come in ogni rotazione di centro dato (vedi la (3.33)):

1. direzione di $\delta \underline{x}_P$ è normale a \overline{PC}

- il verso di $\delta \underline{x}_P$, se $\delta \varphi > 0$ ($\delta \varphi < 0$), è antiorario (orario), visto da una perpendicolare al piano del moto passante per C e con il verso di \underline{e}_3
- il modulo di $\delta \underline{x}_P$ è proporzionale, con una costante $\delta \varphi$ uguale per tutti i punti del rigido, alla distanza di P da C. Precisamente si ha che:

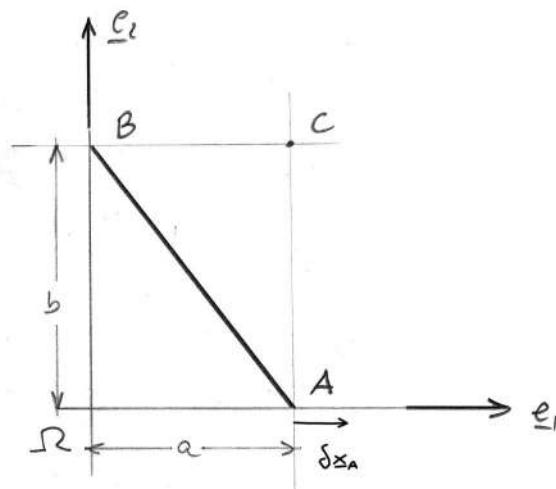
$$\|\delta \underline{x}_P\| = |\delta \varphi| \|\underline{x}_P - \underline{x}_C\|$$

(segue da (3.33) essendo \underline{e}_3 ortogonale a ($\underline{x}_P - \underline{x}_C$))

- dati due punti qualsiasi del rigido P e Q si ha:

$$\frac{\|\delta \underline{x}_P\|}{\|\underline{x}_P - \underline{x}_C\|} = \frac{\|\delta \underline{x}_Q\|}{\|\underline{x}_Q - \underline{x}_C\|} (= |\delta \varphi| \text{ vedi sopra })$$

Esempi di applicazione:



1.

Domanda:

Se $\delta \underline{x}_A = \epsilon \underline{e}_1$, $\epsilon > 0$ quanto vale $\delta \underline{x}_B$?

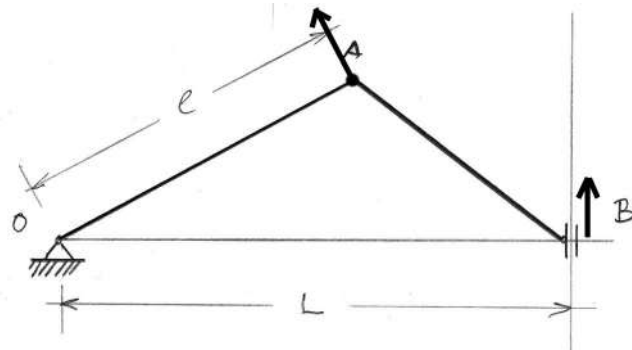
Risposta:

$\delta \underline{x}_B$ è diretto come \underline{e}_2 (pto. 1)

verso il basso (pto. 2)

modulo: $\|\delta \underline{x}_B\| / a = \|\delta \underline{x}_A\| / b$ (pto. 4)

Quindi $\delta \underline{x}_B = -\epsilon \frac{a}{b} \underline{e}_2$



2.

Se $\|\delta \underline{x}_B\| = \epsilon$ quanto è $\|\delta \underline{x}_A\|$?

Risposta: il C.I.R. dell'asta AB è O quindi

$$\frac{\|\delta \underline{x}_A\|}{l} = \frac{\|\delta \underline{x}_B\|}{L} \Rightarrow \|\delta \underline{x}_A\| = \frac{l}{L} \epsilon$$

(e ovviamente $\delta \underline{x}_A$ è ortogonale ad \overline{AO})

Notare che gli esempi fatti sono casi, semplicissimi, del metodo delle *catene cinematiche*.

Nota di approfondimento 2 (Polari fissa e mobile)

Durante un moto rigido la posizione dell'A.I.M. relativa sia all'osservatore fisso Σ che a quello solidale S al rigido varia in generale nel tempo.

Vediamo l'esempio classico di fig. 3.19

Esempio 3.11

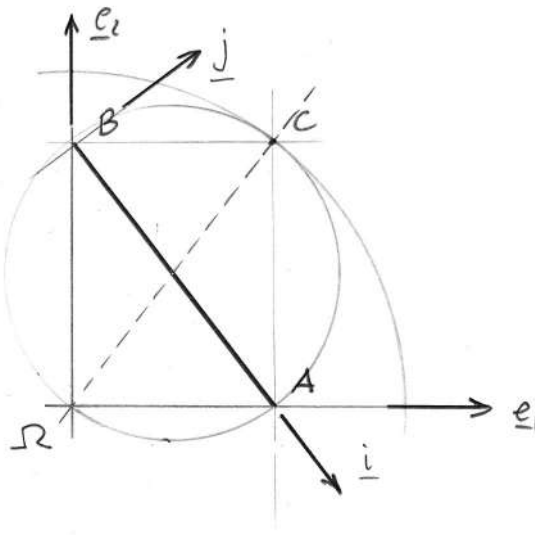


Figure 3.19:

$$\Sigma = (\Omega; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$$

$$S = (B; \underline{i}, \underline{j})$$

Punto di vista di Σ :

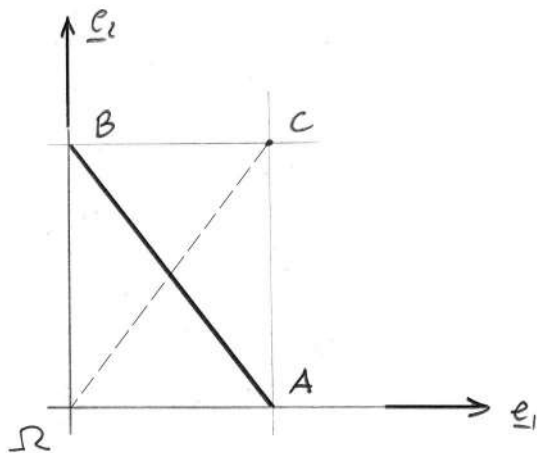


Figure 3.20:

in ogni istante la distanza $\overline{C\Omega}$ è pari alla diagonale del rettangolo ΩACB quindi è uguale alla lunghezza di \overline{AB} ed è costante. Quindi:

luogo dei punti descritto dal C.I.M. relativo a $\Sigma = base$ o polare fissa (o poloide) = circonferenza di centro Ω e raggio \overline{AB} .

Punto di vista di S:

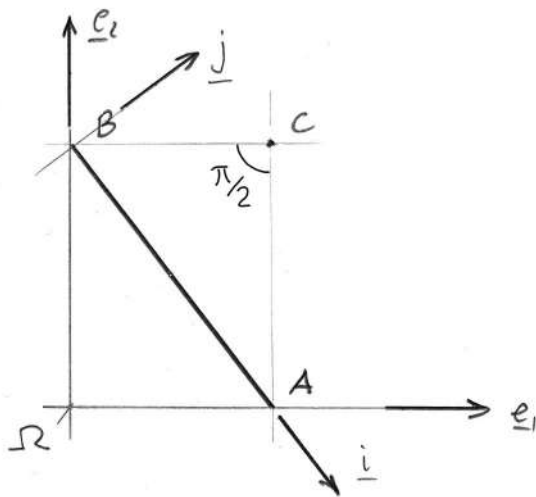


Figure 3.21:

Il triangolo ABC è sempre rettangolo in C, con ipotenusa costante AB, quindi:

Il luogo dei punti descritto dal C.I.M. relativo ad S = rulletta o polare mobile (o erpoloide) = circonferenza di diametro AB.

In ogni istante la base e la rulletta sono tangenti in C. Durante il moto: *la rulletta rotola sulla base senza strisciare* (poichè la velocità del punto di contatto è nulla).

Considerazione importante: il moto dell'asta AB dovuto ai vincoli di scorrimento di A e B sulle rette rispettivamente asse 1 ed asse 2 di Σ la posso ottenere anche *incastrando* l'asta AB su un *diametro* di una circonferenza = rulletta e facendo rotolare questa su una circonferenza fissa di *raggio* $AB = \text{base}$. Posso cioè ottenere un dato moto rigido piano costruendo fisicamente la base e la rulletta.

Analogo discorso vale nello spazio tridimensionale, solo più complicato

geometricamente.

Nel caso tridimensionale

luogo degli A.I.M. in Σ = superficie rigata fissa
luogo degli A.I.M. in S = superficie rigata mobile

I ragionamenti sopra accennati sono alla base della *Teoria degli Ingranaggi* di evidente importanza applicativa nella costruzione di meccanismi che producano un voluto moto rigido (vedi [FDRM] Cap XI, [LCA] per approfondimenti).

Nota all'Esempio 3.11

il congegno raffigurato in figure (3.19) viene anche detto ellissografo perchè ogni punto dell'asta diverso dagli estremi e dal centro dell'asta descrive un'ellisse, prima dei computer grafici le ellissi si disegnavano anche così.

3.7 Soluzione degli esercizi

3.7.1 Soluzione Esercizio 3.1

Pensiamo alla cerniera fissa in C come alla sovrapposizione dei due vincoli (vedi Cap 1 Esempio 1)

$$\begin{aligned}
 V_1: \quad x_C - 3l = 0 &\Rightarrow \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \Rightarrow \text{reazione } H_C \underline{e}_1 \\
 V_2: \quad y_C = 0 &\Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Rightarrow \text{reazione } V_C \underline{e}_2
 \end{aligned}$$

e *sopprimiamo* solo V_1 perchè ci interessa H_C .
 Otteniamo cioè il seguente sistema

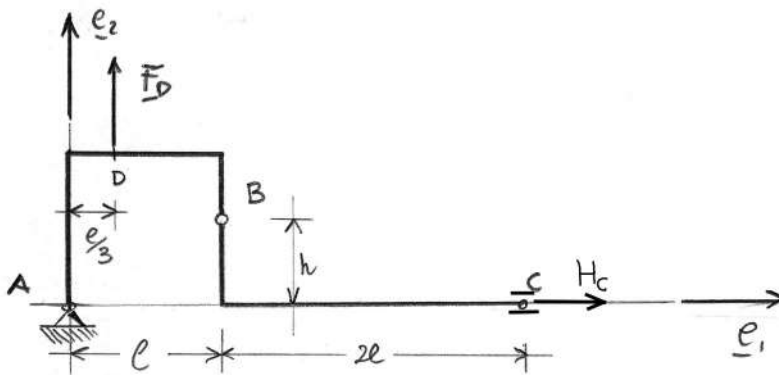


Figure 3.22:

Questo sistema ha un grado di libertà

$$\text{L.V. forze attive} = \underline{F}_D \cdot \delta \underline{x}_D + H_C \underline{e}_1 \cdot \delta \underline{x}_C$$

Calcoliamo i due spostamenti virtuali $\delta \underline{x}_D$, $\delta \underline{x}_C$

$$\begin{aligned}
 \delta \underline{x}_D &\quad (\text{essendo } A \text{ fisso}) = \chi_1 \underline{e}_3 \wedge (\underline{x}_D - \underline{x}_A) \\
 &\quad (\text{dove } \chi_1 \text{ dá la rotazione del pezzo } AB) \\
 &= \chi_1 \underline{e}_3 \wedge (l/3 \underline{e}_1 + l \underline{e}_2) = \\
 &= \chi_1 (-l \underline{e}_1 + l/3 \underline{e}_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \underline{x}_C & \quad (\text{prendendo } O = B \text{ in F.P.}) = \delta \underline{x}_B + \chi_2 \underline{e}_3 \wedge (\underline{x}_C - \underline{x}_B) \\
& \quad (\text{dove } \chi_2 \text{ dà la rotazione del pezzo } BC \\
& \quad \text{che } \underline{non} \text{ è uguale a quella del pezzo } AB) \\
& \quad (\text{essendo } B \text{ un punto anche del pezzo } AB \\
& \quad \text{per via della cerniera mobile in } B) \\
& = \chi_1 \underline{e}_3 \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_A) + \chi_2 \underline{e}_3 \wedge (\underline{x}_C - \underline{x}_B) \\
& = \chi_1 \underline{e}_3 \wedge (l \underline{e}_1 + h \underline{e}_2) + \chi_2 \underline{e}_3 \wedge (2l \underline{e}_1 - h \underline{e}_2) \\
& = \chi_1 (-h \underline{e}_1 + l \underline{e}_2) + \chi_2 (h \underline{e}_1 + 2l \underline{e}_2) \\
& = \underline{e}_1 (-h \chi_1 + h \chi_2) + \underline{e}_2 (-l \chi_1 + 2l \chi_2)
\end{aligned}$$

Essendo però presente il vincolo V_2 , cerniera mobile in C, $\delta \underline{x}_C$ deve essere diretto come \underline{e}_1 quindi la componente di $\delta \underline{x}_C$ secondo \underline{e}_2 trovato sopra deve essere nullo, cioè ($l \neq 0$)

$$\chi_1 + 2\chi_2 = 0 \Leftrightarrow \chi_1 = -2\chi_2$$

Questa equazione dà la relazione tra χ_1 e χ_2 che doveva essere trovata, essendo il sistema di fig 3.22 ad 1 grado di libertà (e quindi gli spostamenti virtuali dei punti del sistema devono dipendere da un'unica quantità arbitraria, ad esempio χ_2)

Ponendo appunto $\chi_2 = \chi$ e $\chi_1 = -2\chi$ si ha:

$$\begin{aligned}
\delta \underline{x}_D & = 2\chi(-l \underline{e}_1 - l/3 \underline{e}_2) \\
\delta \underline{x}_C & = \chi(2h + h) \underline{e}_1 = 3h\chi \underline{e}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow L.V. & = F_D \underline{e}_2 \cdot \delta \underline{x}_D + H_C \underline{e}_1 \cdot \delta \underline{x}_C = \\
& = \chi[-(2/3) l F_D + 3h H_C] = 0, \quad \forall \chi \in \mathbf{R} \\
\Rightarrow & 3h H_C + (2/3)l F_D = 0 \\
\Rightarrow & \text{se } h \neq 0 \quad H_C = (2/9)(l/h)F_D
\end{aligned}$$

Notare che la condizione $h \neq 0$ corrisponde all'indipendenza dei vincoli, si possono ripetere qui le considerazioni fatte nell'Esempio 3.4.

3.7.2 Risoluzione Esercizio 3.2

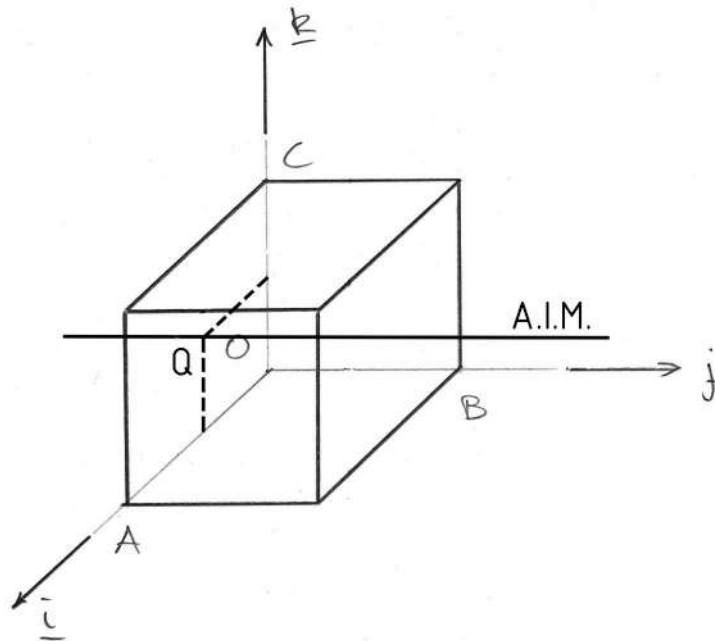
1.

$$\underline{v}_O = -\underline{i} + \underline{k} \quad , \quad \underline{\omega} = 2\underline{j} \quad , \quad \text{da (3.25)} \quad \underline{c} = (\underline{v}_O \cdot \underline{j}) \underline{j} = 0$$

da 3.26 $\underline{x} \in \text{A.I.M.}$ se

$$\underline{x} = \underline{x}_O + \frac{2\underline{j} \wedge (-\underline{i} + \underline{k})}{4} + 2\lambda \underline{j}$$

$$\underline{x} = \underline{x}_O + \frac{1}{2}(\underline{i} + \underline{k}) + 2\lambda \underline{j}$$



per $\lambda = 0$ si ottiene il punto di coordinate in S ;

$$Q = (1/2, 0, 1/2), \quad Q \in \text{A.I.M.} \quad \text{e}$$

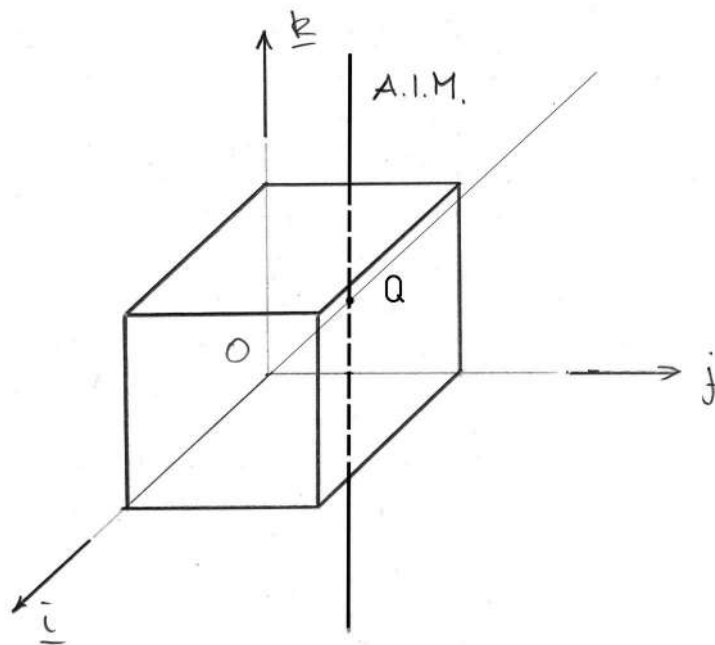
$$\forall Q \in \text{A.I.M.} \quad \underline{v}_Q = \underline{0}$$

(atto di moto rotatorio)

2.

$$\begin{aligned} \underline{v}_O &= 2\underline{j} + 3\underline{k} & \underline{\omega} &= \underline{k} \\ \underline{c} &= (\underline{v}_O \cdot \underline{k}) \underline{k} = 3\underline{k} \\ \text{A.I.M. } \underline{x} &= \underline{x}_O + \underline{k} \wedge (2\underline{j} + 3\underline{k}) + \lambda \underline{k} \\ &= \underline{x}_O - 2\underline{i} + \lambda \underline{k} \end{aligned}$$

$$\lambda = 0 \text{ in } S; Q = (-2, 0, 0)$$



atto di moto elicoidale

velocità di avanzamento lungo l'asse = $3\underline{k}$

velocità angolare = \underline{k}

Dispense di Meccanica Razionale

Prof. Maura Ughi

20 Marzo 2003

Contents

4	Campi di Forza, Forze Conservative	2
4.1	Introduzione	2
4.2	Equilibrio dei sistemi olonomi ad 1 gradi di libertà soggetti a forze conservative	7
4.3	Generalizzazioni	11
4.4	Risoluzione Esercizi	23
4.4.1	Risoluzione esercizio 4.1	23
4.4.2	Risoluzione Esercizio 4.2	27
4.4.3	Risoluzione Esercizio 4.3	29
4.4.4	Risoluzione Esercizio 4.4	30

Chapter 4

Campi di Forza, Forze Conservative

4.1 Introduzione

Dalla Fisica sappiamo che in generale la forza agente su un punto assegnato (rispetto ad un osservatore dato) si può considerare dipendente in generale dalla posizione del punto, dalla sua velocità ed eventualmente dal tempo. Ricordiamo ad esempio (indicando con \underline{x} , \underline{v} la posizione e la velocità del punto in un dato istante):

1. Forza di resistenza viscosa: $\underline{F} = -\lambda \underline{v}$
2. Forza di Lorentz: $\underline{F} = \frac{q}{c} \underline{v} \wedge \underline{H}$ (con q carica, c velocità della luce, H campo magnetico)
3. Forza elastica di centro dato Ω : $\underline{F} = -c(\underline{x} - \underline{x}_\Omega)$, $c =$ costante elastica > 0
4. Forza gravitazionale di Newton esercitata da un punto fisso Ω (di massa m_Ω) su un punto generico P (m_P): $\underline{F}_P = -\gamma \frac{m_P m_\Omega}{\|\underline{x}_P - \underline{x}_\Omega\|^2} \text{vers}(\underline{x}_P - \underline{x}_\Omega)$
5. Carico *Follower* (vedi ad esempio fig. 3.4)

Un sottoinsieme importante delle forze è quello costituito dalle forze *posizionali* cioè che dipendono *solo* dalla posizione (vedi esempi 3, 4, 5). Per queste forze è stato concepito in Fisica il concetto di *campo* (di forza).

Forse la motivazione principale di tale concetto è proprio dovuta all'esame della forza gravitazionale e della forza peso. Questa, diversamente dalla forza elastica di una molla, per cui l'agente che esercita la forza è evidente e cioè la molla stessa, si suppone essere una proprietà intrinseca dei due punti in esame, agisce a distanza, senza agenti fisici evidenti. Un modo di visualizzarla è quello pensare che la presenza di una massa *crea un campo* cioè dà allo spazio circostante la massa la proprietà che ogni altra massa m_P , posta in un qualche punto dello spazio, è soggetta alla forza (4).

Analogo è il caso del *campo magnetico*, visibile con la limatura di ferro. In Fisica questo concetto è largamente usato, vedi il campo elettromagnetico, definito dalle equazioni di Maxwell, ed il campo gravitazionale di Einstein in relatività generale.

In un linguaggio matematico un *campo di forze* è una applicazione dall'insieme delle *posizioni* a quello delle forze.

Analogamente si parla di *Campo di velocità*, ad esempio dei punti di un fluido in moto, o dei punti di un rigido in moto (definito dalla formula di Poisson nel Cap. 3).

Sempre dalla Fisica ricordiamo l'importanza delle *forze e campi conservativi*, che costituiscono un sottoinsieme di quelli posizionali e devono il loro nome sostanzialmente al fatto che durante il moto da essi prodotto si conserva l'energia meccanica totale cioè la somma dell'energia cinetica K (legata al moto) e dell'energia potenziale (che indicheremo d'ora in poi con V) legata appunto alle forze.

Anche in *Statica* le forze conservative hanno un ruolo molto importante (per il loro ruolo in *Dinamica* vedi Cap. 9) Infatti dallo studio della funzione V , energia potenziale, si ricavano informazioni sull'equilibrio e sulla stabilità.

Consideriamo per cominciare un punto materiale P su cui agisce una forza \underline{F} funzione della posizione di P , che indicheremo con \underline{x} . La forza è conservativa se il lavoro virtuale che essa compie per passare da una posizione \underline{x}_0 ad una posizione \underline{x}_1 non dipende dalla traiettoria del punto, ma solo dalle due posizioni \underline{x}_0 , \underline{x}_1

Introducendo l'energia potenziale V avremo che:

Definizione 4.1.1 \underline{F} è conservativa se esiste una funzione $V(\underline{x})$ tale che il lavoro di \underline{F} per andare da \underline{x}_0 ad \underline{x}_1 è $= -[V(\underline{x}_1) - V(\underline{x}_0)]$.

Quindi se noi consideriamo

$$\begin{aligned}\underline{x}_0 &= \underline{x}_E && \text{configurazione di equilibrio} \\ \underline{x}_1 &= \underline{x}_E + \delta\underline{x} && \text{configurazione variata dall'equilibrio, } \delta\underline{x} \text{ spostamento virtuale}\end{aligned}$$

avremo che:

se \underline{F} è conservativa \Rightarrow L.V. = $-[V(\underline{x}_E + \delta\underline{x}) - V(\underline{x}_E)]$
Quindi il P.L.V., se la forza \underline{F} è conservativa, assume la forma:

\underline{x}_E è di equilibrio se

$$\begin{aligned}\text{L.V.} &= -[V(\underline{x}_E + \delta\underline{x}) - V(\underline{x}_E)] \leq 0 && \forall \delta\underline{x} \text{ virtuale} \\ \text{L.V.} &= -[V(\underline{x}_E + \delta\underline{x}) - V(\underline{x}_E)] = 0 && \forall \delta\underline{x} \text{ virtuale invertibile}\end{aligned}$$

Se V è regolare abbiamo \Rightarrow L.V. = $-\nabla V|_{\underline{x}_E} \cdot \delta\underline{x} = -dV$

dove dV è il differenziale di V (a meno di infinitesimi di ordine superiore)

Quindi nel caso *conservativo*

P.L.V. \Rightarrow \underline{x}_E è di equilibrio se è o minimo locale per V
o punto di stazionarietà di V
($\nabla V|_E = 0$)

Esempio 4.1

Punto su guida liscia soggetto al proprio peso

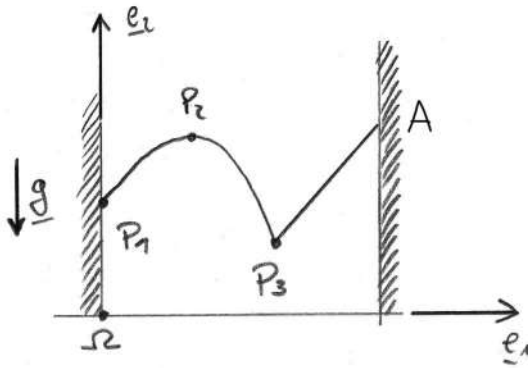


Figure 4.1:

$$V = -m \underline{g} \cdot \underline{x} , \quad -\nabla V = m \underline{g} \quad (4.1)$$

P_1, P_2, P_3 sono configurazioni di equilibrio, infatti nel sistema di riferimento dato

$$V = -(-mg \underline{e}_2) \cdot (x \underline{e}_1 + y \underline{e}_2) = mg y$$

in P_2 V è stazionario (massimo)

in P_1, P_3 V ha minimo (locale)

Notare che il punto A è un massimo, ma non è un punto stazionario e quindi non è di equilibrio.

Nel seguito ci concentreremo sulle situazioni in cui tutti gli spostamenti virtuali sono invertibili e V è regolare e quindi

$$\underline{x}_E \text{ di equilibrio} \Leftrightarrow \underline{x}_E \text{ punto di stazionarietà di } V$$

Anche se non possiamo ancora precisare il concetto di stabilità, si può dimostrare che *se i vincoli sono fissi e lisci e le forze conservative, se \underline{x}_E è*

*punto di stazionarietà di V (regolare) ed è un minimo proprio di $V \Rightarrow \underline{x}_E$
è stabile (vedi [FM] e [BO])*

4.2 Equilibrio dei sistemi olonomi ad 1 gradi di libertà soggetti a forze conservative

Cominciamo al solito con un esempio

Esempio 4.2

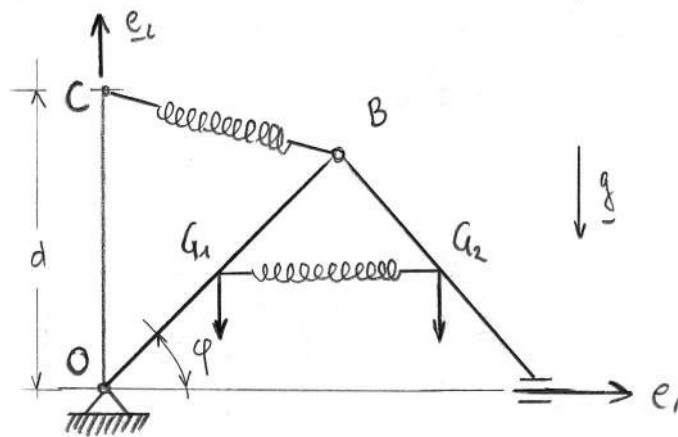


Figure 4.2:

piano verticale
 aste OB, AB, omogenee di uguale lunghezza L , e massa rispettivamente m , M .

Le forze attive sono tutte conservative quindi dobbiamo calcolare l'energia potenziale V , che ricordiamo è legata al lavoro virtuale

$$\boxed{L.V. = -dV} \quad (4.2)$$

Pesi:

$$V_1 = -mg \cdot \underline{x}_{G_1} - Mg \cdot \underline{x}_{G_2} \quad (4.3)$$

$$L.V. = mg \cdot \delta \underline{x}_{G_1} + Mg \cdot \delta \underline{x}_{G_2} = -dV_1$$

molla in B (esterna al sistema)

$$\begin{aligned}
 V_2 &= c/2 \|\underline{x}_B - \underline{x}_C\|^2 \\
 L.V. &= -c(\underline{x}_B - \underline{x}_C) \cdot \delta \underline{x}_B \\
 &= (\textit{essendo } C \textit{ fisso}) -c(\underline{x}_B - \underline{x}_C) \cdot \delta(\underline{x}_B - \underline{x}_C) \\
 &= -dV_2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

molla tra G_1 e G_2 (interna al sistema)

$$\begin{aligned}
 V_3 &= \frac{c}{2} \|\underline{x}_{G_1} - \underline{x}_{G_2}\|^2 \\
 L.V. \textit{ della coppia di forze in } G_1 \textit{ e } G_2 & \\
 &= -c(\underline{x}_{G_1} - \underline{x}_{G_2}) \cdot \delta \underline{x}_{G_1} + c(\underline{x}_{G_1} - \underline{x}_{G_2}) \cdot \delta \underline{x}_{G_2} \\
 &= -c(\underline{x}_{G_1} - \underline{x}_{G_2}) \cdot \delta(\underline{x}_{G_1} - \underline{x}_{G_2}) \\
 &= -dV_3
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Quindi l'energia potenziale totale da considerare (e da cui ricavare il L.V.) è

$$V = V_1 + V_2 + V_3 , \text{ date da (4.3) - (4.5)}$$

L'energia V è funzione delle coordinate dei punti del sistema, poichè abbiamo un grado di libertà, coordinata libera φ , tutte le coordinate vanno espresse in funzione di φ , per tenere conto dei vincoli imposti al sistema.

Nell'esempio 4.2 avremo:

$$\begin{aligned}
 V &= mg y_{G_1} + Mg y_{G_2} + \frac{c}{2}[x_B^2 + (y_B^2 - d)^2] + \frac{c}{2}(x_{G_1} - x_{G_2})^2 \\
 &= (m + M)g \frac{L}{2} \sin \varphi + \frac{c}{2}[L^2 \cos^2 \varphi + (L \sin \varphi - d)^2] + \frac{c}{2}L^2 \cos^2 \varphi \\
 &= [(m + M)g \frac{L}{2} - cLd] \sin \varphi + c \frac{L^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{c}{2}(L^2 + d^2) = V(\varphi)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Una volta calcolata $V(\varphi)$ le configurazioni di equilibrio sono i punti di stazionarietà di V e tra questi i minimi sono stabili. L'equilibrio e la stabilità sono così ricondotti allo studio (nel senso dell'Analisi) della funzione $V(\varphi)$.

Esercizio 4.1

Trovare le configurazioni di equilibrio e discutere la stabilità nell'Esempio 4.2

Il metodo indicato nell'Esempio 4.2 si applica ad un qualsiasi sistema ad un grado di libertà, forze attive conservative. Notiamo che le forze interne contribuiscono all'energia potenziale totale a coppie (vedi 4.5)

Se q è la coordinata libera, una volta espresse le coordinate dei punti in funzione di q avremo che:

$$\begin{aligned} V = V(q) \quad e \quad -dV = L.V. = \frac{-dV}{dq} \delta q = Q \delta q \\ \Rightarrow \frac{-dV}{dq} = Q \text{ forza generalizzata} \\ \frac{-dV}{dq} = 0 \text{ all'equilibrio} \end{aligned} \quad (4.7)$$

In modo analogo si procede per i sistemi olonomi ad l gradi di libertà, se $\underline{q} = (q_1, \dots, q_l)$ sono le coordinate libere del sistema:

$$V = V(q_1, \dots, q_l) \text{ (regolare)}$$

$$\begin{aligned} -dV = L.V. &= - \left[\frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_l} \delta q_l \right] = Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_l \delta q_l \\ \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial q_i} &= Q_i \text{ forza generalizzata relativa a } q_i \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \text{ all'equilibrio , } i = 1, \dots, l$$

Notiamo che per un punto materiale libero, se

$$\begin{aligned} \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 \quad , \quad \text{abbiamo } V = V(\underline{x}) \text{ e} \\ \underline{F}_i = \underline{F} \cdot \underline{e}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \Leftrightarrow \underline{F} \text{ conservativa} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le (4.8) sono una naturale estensione della (4.9) ai sistemi olonomi (ulteriori giustificazione al nome di forze generalizzate dato alle Q_i)

Esempio 4.3

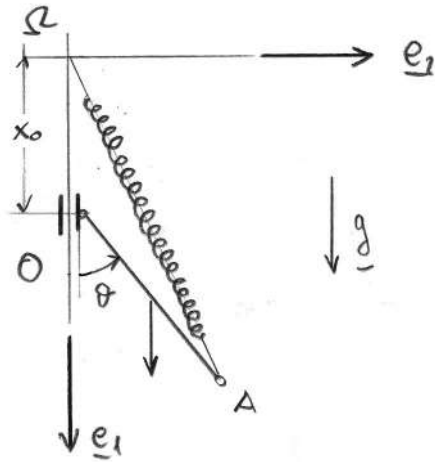


Figure 4.3:

OA omogenea
piano verticale

$$V = -m \underline{g} \cdot \underline{x}_G + \frac{c}{2} \|x_A\|^2$$

Nel riferimento di figura, coordinate libere x_O, ϑ

$$\begin{aligned} V &= (\text{essendo } \underline{g} = g \underline{e}_1) = -mg\left(\frac{L}{2}\cos\vartheta + x_O\right) + \frac{c}{2}[(x_O + L\cos\vartheta)^2 + L^2\sin^2\vartheta] \\ &= -mg\frac{L}{2}\cos\vartheta - mgx_O + \frac{c}{2}(x_O^2 + 2Lx_O\cos\vartheta) + \frac{c}{2}L^2 \end{aligned}$$

Avremo quindi (vedi 4.8, ricordando anche l'espressione del L.V. per un rigido del Cap. 3)

$$-Q_{x_O} = -\underline{R}^a \cdot \underline{e}_1 = \frac{\partial V}{\partial x_O} = -mg + cx_O + cL\cos\vartheta \quad (4.10)$$

$$-Q_{\vartheta} = -\underline{M}^a(O) \cdot \underline{e}_3 = \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \left(\frac{m}{2}g - cx_O\right)L\sin\vartheta \quad (4.11)$$

Le configurazioni di equilibrio saranno dunque le coppie (x_O, ϑ) che annullano entrambe le $\frac{\partial V}{\partial x_O}$ e $\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$, tra queste i minimi per V sono stabili. Notare che essendo V analitica i punti stazionari non minimi sono instabili. (vedi in [FM] Teorema di Liapunov)

Esercizio 4.2

Completare l'Esempio 4.3, cioè trovare le configurazioni di equilibrio, discutere la stabilità e verificare le (4.10) e (4.11) calcolando $\underline{R}^a \cdot \underline{e}_1$ e $\underline{M}^a(O)$.

4.3 Generalizzazioni

Negli esempi fatti finora avevamo a che fare con forze di cui è ben noto dalla fisica il carattere conservativo. Vogliamo adesso vedere come stabilire la conservatività di una forza in situazioni più generali, considerando sempre casi *regolari*. Prendiamo ad esempio il carico *follower* di figura 3.4 . Notiamo subito che dobbiamo capire bene cosa vuol dire *calcolare il lavoro di \underline{F}_A* : è chiaro che per farlo non basta definire il moto del solo punto di applicazione A . Infatti supponiamo che A si muova su una semicirconferenza data in un certo intervallo di tempo $[\tau_0, \tau_1]$.

(Come nel Cap 3 useremo il concetto di tempo virtuale τ , per poter applicare i risultati ottenuti sia in Statica che in Dinamica)

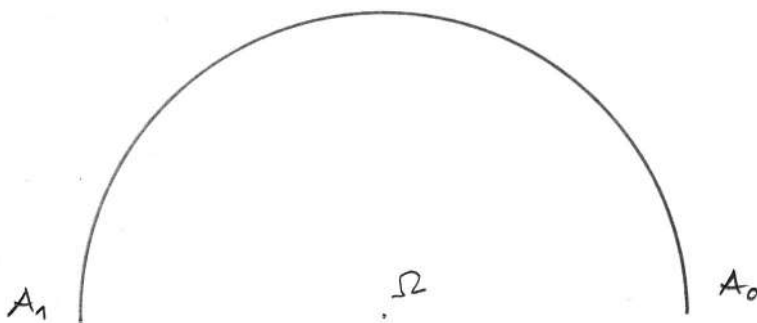


Figure 4.4:

$$\begin{aligned} \underline{x}_A &= \underline{x}_A(\tau) \quad \text{con} \\ \underline{x}_A(\tau_0) &= A_0 \\ \underline{x}_A(\tau_1) &= A_1 \end{aligned}$$

Se ad esempio l'asta OA ruota mantenendo O fisso = Ω , vedi figura 4.5

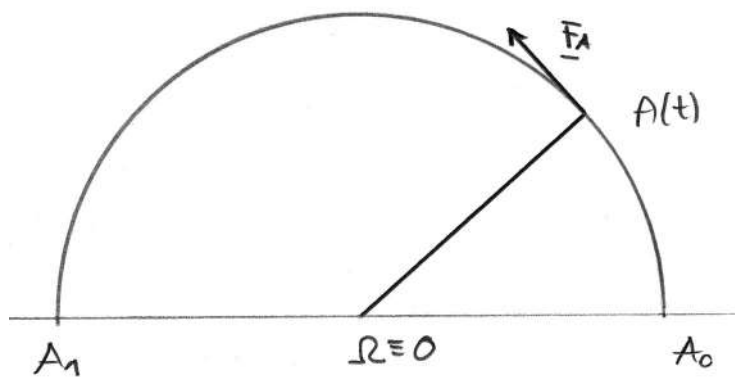


Figure 4.5:

Lavoro $\neq 0$
(= $FL\pi$)

Se invece, pur facendo A lo stesso moto di prima, l'asta OA si mantiene tangente alla semicirconferenza, vedi fig 4.6

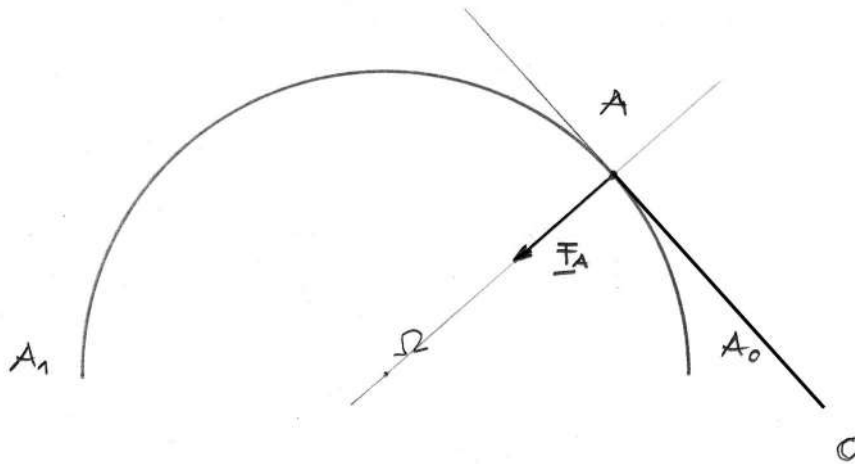


Figure 4.6:

Lavoro = 0

Quindi per definire in modo univoco (e quindi sensato) il lavoro della forza \underline{F}_A , dobbiamo *specificare il moto di tutta l'asta OA e non solo quello di A*. Per farlo ricordiamo che l'asta OA nel piano ha 3 gradi di libertà, 3 coordinate libere e *specificare il moto di OA* equivale a dire come variano nel tempo le 3 coordinate libere scelte.

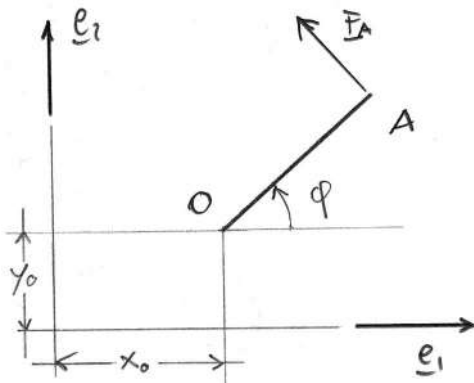


Figure 4.7:

Se scegliamo, al solito, le 3 coordinate libere di fig 4.7.

Il moto descritto in figura 4.5 con $O = \Omega$ è dato da:

$$\begin{aligned} \tau \in [\tau_0, \tau] , \quad x_O(\tau) = 0 \quad y_O(\tau) = 0 \quad \varphi(\tau) = \text{funzione data tale che} \\ \varphi(\tau_0) = 0 \\ \varphi(\tau_1) = \pi \end{aligned} \quad (4.12)$$

(ed è ben distinto dal moto descritto in figura 4.6).

A questo punto possiamo definire in modo univoco il lavoro di \underline{F}_A durante il moto del sistema da τ_0 a τ_1 :

$$\text{potenza} = \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A = W(\tau) \quad (4.13)$$

dove \underline{F}_A e \underline{v}_A sono calcolati per il moto dato (ad esempio 4.12)

$$\text{Lavoro da } \tau_0 \text{ a } \tau_1 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} W(\tau) d\tau$$

Questo metodo funziona per sistemi olonomi ad l gradi di libertà a vincoli fissi, tenendo conto che, poichè le coordinate di un punto del sistema dipendono dalle l coordinate libere q_1, \dots, q_l , dovremo (pensando ad una forza posizionale \underline{F}_A applicata in A)

- definire il moto del sistema, cioè assegnare ($q_1(\tau), \dots, q_l(\tau) = \underline{q}(\tau)$) con $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$

$$\Rightarrow \underline{x}_A(\tau) = \underline{x}_A(q_1(\tau), \dots, q_l(\tau))$$

$$\underline{v}_A = \frac{d\underline{x}_A}{d\tau} = \frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_l} \dot{q}_l \quad (4.14)$$

- calcolare la potenza (istantanea)

$$W(\tau) = \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A = \underline{F}_A \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_1} \dot{q}_1 \right) + \dots + \underline{F}_A \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_l} \dot{q}_l \right)$$

ricordando la definizione di forza generalizzata:

$$W(\tau) = Q_1 \dot{q}_1 + \dots + Q_l \dot{q}_l \quad (4.15)$$

- calcolare il lavoro integrando tra τ_0 e τ_1 la potenza:

$$Lavoro = \int_{\tau_0}^{\tau_1} W(\tau) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (Q_1 \dot{q}_1 + \dots + Q_l \dot{q}_l) d\tau \quad (4.16)$$

Dall'analisi delle funzioni a più variabili reali abbiamo allora che il:

Lavoro dipende solo dalle 2 configurazioni in τ_0 e in τ_1 = forze conservative = esiste una funzione $V(q_1, \dots, q_l)$ tale che $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$
 $i = 1, \dots, l$ (se tutto è regolare)

Alla forma (4.15) della potenza per i sistemi olonomi si dà il nome di *forma differenziale* e quanto detto sopra si enuncia dicendo che la forma differenziale è esatta (vedi e.g. [PS] vol II Cap I Par 2, [BPS] Cap 12, Par 4, [GI] vol II, Cap 8)

Ovviamente:

$$\text{forze conservative} \Rightarrow \text{Lavoro} = -[V(\underline{q}(\tau_1)) - V(\underline{q}(\tau_0))]$$

Sempre dall'Analisi abbiamo una condizione necessaria che deve essere verificata affinché una forma differenziale sia esatta

forza conservativa regolare \Rightarrow

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}, \quad i, j = 1, \dots, l \quad (4.17)$$

= forma differenziale chiusa

Nota 4.1

La condizione sopra citata (4.17) si ottiene facilmente, infatti se:

$$\begin{aligned} \text{se } Q_i &= -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, l \Rightarrow \\ \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(-\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \quad (\text{se } V \text{ è } C^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(-\frac{\partial V}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} Q_j \end{aligned}$$

Ricordiamo qui che il viceversa non è vero in generale, cioè se (4.17) è soddisfatta non è detto che la forma sia esatta. Si fa di solito un classico esempio che fisicamente è il campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente (vedi [PS] vol II Es. 2.8, [GI] vol II, Es2 2.1) Si dimostra anche che se il dominio di definizione della Q_i ha date proprietà topologiche (è stellato o semplicemente connesso) allora le condizioni (4.17) assicurano che la forma differenziale sia esatta, cioè nel linguaggio della M.R. il campo è conservativo (per approfondimenti sulle forma differenziali e campi vettoriali si veda i già citati [PS], [BPS], [GI]))

Esempio 4.4

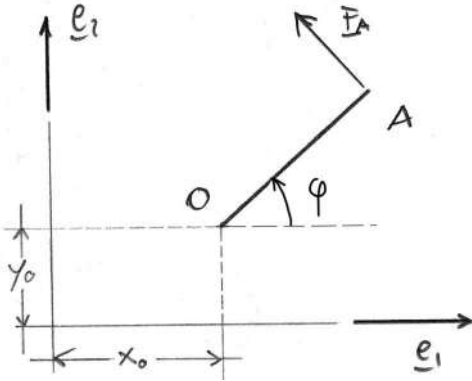


Figure 4.8:

Dal Cap 3 abbiamo:

$$\begin{aligned} \underline{F}_A &= -F \sin \varphi \underline{e}_1 + F \cos \varphi \underline{e}_2, \quad \underline{M}(O) = FL \underline{e}_3 \\ \Rightarrow Q_{x_O} &= -F \sin \varphi, \quad Q_{y_O} = F \cos \varphi, \quad Q_\varphi = FL \\ &\Rightarrow \frac{\partial Q_{x_O}}{\partial \varphi} = -F \cos \varphi, \quad \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x_O} = 0 \end{aligned}$$

quindi le condizioni di compatibilità (4.17) non sono verificate e la forza \underline{F}_A non è conservativa.

Nota 4.2

Ricordare che nell'Esempio 4.4 possiamo facilmente calcolare il lavoro \underline{F}_A per un moto dato. Infatti, vedi (4.15) , (4.16):

$$\begin{aligned} \text{Lavoro} &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} (Q_{x_O} \dot{x}_O + Q_{y_O} \dot{y}_O + Q_\varphi \dot{\varphi}) d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A d\tau \end{aligned}$$

Calcoliamo il lavoro per due moti diversi tra loro ma che hanno le stesse configurazioni iniziali e finali. Ci aspettiamo in generale di trovare due valori diversi per il lavoro, proprio perchè la forza in esame non è conservativa.

- Moto 1:

$$\tau_0 = 0, \tau_1 = 1$$

$$x_O(\tau) = 0, y_O(\tau) = 0, \varphi(\tau) = \pi\tau, \tau \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Lavoro} &= \int_0^1 \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A d\tau = \\ &\quad (\text{Formula del lavoro per un rigido con } O \text{ fisso ...}) \\ &= \int_0^1 FL\dot{\varphi} d\tau = FL\pi \end{aligned}$$

- Moto 2: stessi τ_0, τ_1 di prima

$$x_O(\tau) = 0, y_O(\tau) = L\sin(\pi\tau), \varphi(\tau) = \pi\tau, \tau \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Lavoro} &= \int_0^1 \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A d\tau = \int_0^1 \underline{F}_A \cdot \dot{y}_O \underline{e}_2 d\tau + \int_0^1 FL\dot{\varphi} d\tau \\ &= FL\pi + \int_0^1 F\cos\varphi(\tau)\dot{y}_O d\tau \\ &= FL\pi + \int_0^1 \pi FL\cos^2(\pi\tau) d\tau \\ &= FL\pi + FL\frac{\pi}{2} \neq FL\pi \end{aligned}$$

Entrambi i moti hanno:

$$\begin{aligned} \tau = \tau_0 = 0 &, x_O(\tau_0) = 0, y_O(\tau_0) = 0, \varphi(\tau_0) = 0 \\ \tau = \tau_1 = 1 &, x_O(\tau_1) = 0, y_O(\tau_1) = 0, \varphi(\tau_1) = \pi \end{aligned}$$

ma il lavoro dipende dal moto del sistema, cioè secondo la definizione *fisica* la forza non è conservativa.

Osserviamo che nello studio dell'equilibrio di un sistema a vincoli olonomi quello che conta è il lavoro virtuale totale delle forze attive, può allora capitare che, anche se le singole forze attive non sono conservative, il lavoro virtuale totale sia il differenziale esatto di una funzione (cioè nel caso regolare la forma differenziale (4.15) che esprime la potenza totale è esatta)

Possiamo allora applicare, ad esempio per quanto riguarda la stabilità o meno di una data configurazione di equilibrio, i risultati relativi al caso di forze conservative.

Esempio 4.5

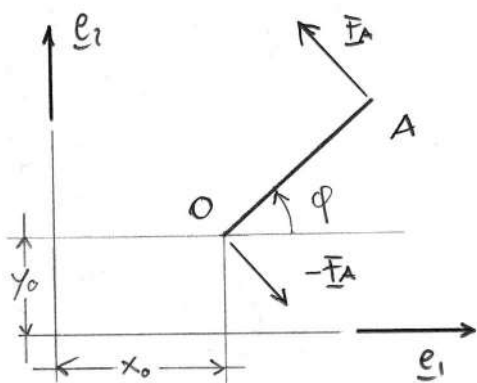


Figure 4.9:

Coppia di forze agenti sull'asta OA, libera nel piano e_1, e_2

Dai risultati del Cap 3 abbiamo

$$\begin{aligned}
 Q_{x_O} &= \underline{R} \cdot \underline{e}_1 = 0 \quad (\text{essendo } \underline{R} = \underline{F}_A - \underline{F}_A = \underline{0}) \\
 Q_{y_O} &= \underline{R} \cdot \underline{e}_2 = 0 \\
 Q_\varphi &= \underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3 = FL \\
 L.V. &= FL \delta\varphi = d(FL \varphi)
 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned}
V = -FL \varphi \quad e \quad Q_{x_O} = -\partial V / \partial x_O = 0 \\
Q_{y_O} = -\partial V / \partial y_O = 0 \\
Q_\varphi = -\partial V / \partial \varphi = FL
\end{aligned}$$

Quindi anche se le singole forze \underline{F}_A in A e $-\underline{F}_A$ in O *non* sono conservative, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, la coppia di forze pensate insieme danno un lavoro ottenibile come differenziale di una funzione.

Notiamo che sono tutti i risultati validi per i casi genuinamente conservativi possono essere applicati a situazioni del tipo descritto nell'Esempio 4.5. Ad esempio il lavoro totale della coppia di forze in un moto in cui O rimane coincidente con Ω e l'asta ruota di 2π , e quindi le configurazioni iniziale e finale sono uguali, è pari a $2\pi FL$ e non 0, come ci si aspetta fisicamente per forze genuinamente conservative come pesi o forze elastiche.

Però per lo studio dell'equilibrio si possono usare i metodi validi nel caso conservativo.

Un caso importante è quello dei *sistemi ad un grado di libertà* soggetti a *forze solo posizionali*, infatti in tal caso:

$$\begin{aligned}
L.V. &= Q(q)\delta q \\
&\quad (\text{ se } Q \text{ è una funzione regolare dell'unica variabile } q) \\
&= d(-V) \\
&\quad \text{con } V = -\int Q \\
&\quad (\text{ cioè } V \text{ è una primitiva di } Q)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

L'argomento potrebbe essere approfondito ma, essendo questo un corso di base, ci fermiamo qui.

Nota 4.3

Guardando le cose da un altro punto di vista notiamo che chiedere se un certo *campo di forze generalizzate* Q_1, \dots, Q_l , con $Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_l)$ $i = 1, \dots, l$, sia conservativo equivale a cercare una funzione $V = V(q_1, \dots, q_l)$ di l variabili tale che $Q_i = -\partial V / \partial q_i$ $i = 1, \dots, l$.

Mentre per il caso ad una sola variabile q (cioè sistemi olonomi ad 1 solo gradi di libertà) il problema è risolubile, purchè $Q(q)$ abbia una certa regolarità, poichè basta cercare una primitiva di Q , nel caso a più variabili (sistemi olonomi a più di un grado di libertà) il problema non è in generale risolubile. Pensando all'Esempio 4.4 dire che \underline{F}_A non è conservativa equivale a dire che *non* esiste una funzione $V = V(x_O, y_O, \varphi)$ tale che

$$\frac{\partial V}{\partial x_O} = -Q_{x_O} = F \sin \varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_O} = -Q_{y_O} = -F \cos \varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -Q_{\varphi} = -FL$$

(anche se le 3 funzioni $Q_{x_O}, Q_{y_O}, Q_{\varphi}$ sono molto regolari)

Esercizio 4.3

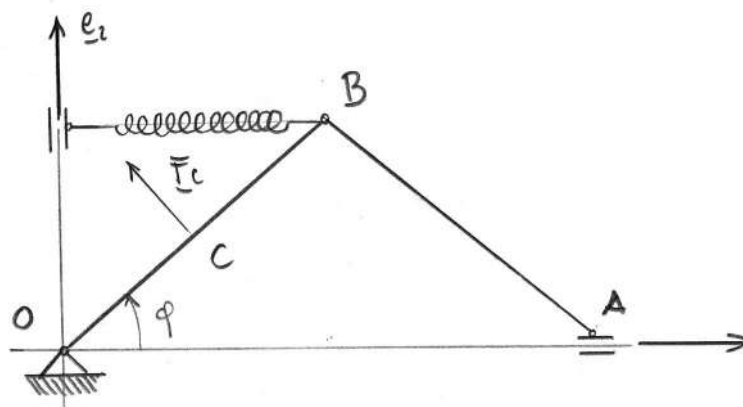


Figure 4.10:

Piano orizzontale, aste uguali.

$$\begin{aligned}OB &= L \\OC &= L/2 \\ \|F_C\| &= F\end{aligned}$$

Calcolare l'energia potenziale del sistema e poi discuterne l'equilibrio.

Esercizio 4.4

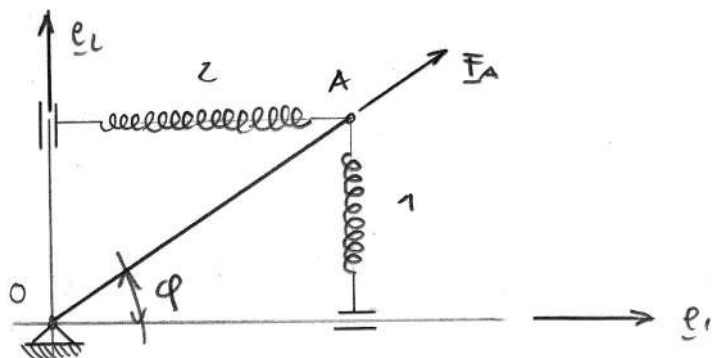


Figure 4.11:

Piano orizzontale.

$$\|\underline{F}_A\| = F$$

molla 1 di costante elastica c

molla 2 di costante elastica $2c$

Calcolare l'energia potenziale del sistema e poi discuterne l'equilibrio.

Nota 4.4

Nel caso di forze conservative note, esempio classico la forza gravitazionale o coulombiana, il vero problema è calcolare l'energia potenziale del campo creato da una distribuzione continua o discreta di masse o cariche. La Teoria del potenziale tratta questo problema, che esula dagli scopi di questo corso (vedi e.g. [C] cap 8)

4.4 Risoluzione Esercizi

4.4.1 Risoluzione esercizio 4.1

Dobbiamo determinare i punti stazionari (equilibrio) di V ed i suoi minimi (equilibrio stabile), essendo V dato dalla (4.6) cioè:

$$V(\varphi) = [(m + M)g\frac{L}{2} - cLd]\sin\varphi + c\frac{L^2}{2}\cos^2\varphi + \frac{c}{2}(L^2 + 2d)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\varphi} &= [(m + M)g\frac{L}{2} - cLd]\cos\varphi - cL^2\sin\varphi\cos\varphi \\ &= cL^2 \left\{ \frac{1}{cL}[(m + M)\frac{g}{2} - cd] - \sin\varphi \right\} \cos\varphi \\ &= cL^2(\gamma - \sin\varphi)\cos\varphi \\ &\quad \text{dove } \gamma = \frac{1}{cL}[(m + M)\frac{g}{2} - cd], \quad -\pi < \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

Notiamo che la funzione $V(\varphi)$ dipende dal parametro γ , che rappresenta fisicamente la *competizione* tra la forza peso e quelle elastiche.

In particolare i punti di stazionarietà di V dipendono dal parametro γ . Distinguiamo due casi:

1. Se $|\gamma| > 1 \Rightarrow \gamma - \sin\varphi \neq 0 \forall \varphi \in \mathbf{R}$
 $\Rightarrow \frac{dV}{d\varphi} = 0$ se e solo se $\cos\varphi = 0$
 \Rightarrow nell'intervallo $-\pi < \varphi \leq \pi$ esistono *due* configurazioni di equilibrio
 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

2. Se $|\gamma| < 1 \Rightarrow \frac{dV}{d\varphi} = 0$ se $\cos\varphi = 0$ oppure $\sin\varphi = \gamma$
 \Rightarrow nell'intervallo $-\pi < \varphi \leq \pi$ esistono *quattro* configurazioni di equilibrio
 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \varphi_1$ e $\varphi = \varphi_2$ con $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \gamma$, vedi figura 4.12

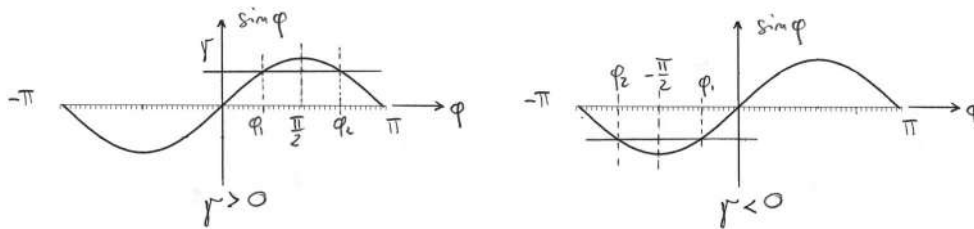


Figure 4.12:

Passiamo ora a studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio appena ricavate.

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = cL^2 [-\sin\varphi(\gamma - \sin\varphi) - \cos^2\varphi]$$

1. Se $|\gamma| > 1 \Rightarrow$ dobbiamo controllare il segno di $\frac{d^2V}{d\varphi^2}$ nelle due configurazioni di equilibrio $\varphi = \pi/2$ e $\varphi = -\pi/2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V''(\pi/2) &= -cL^2(\gamma - 1) = cL^2(1 - \gamma) \\ V''(-\pi/2) &= cL^2(1 + \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Se } \gamma > 1 \quad V''(\pi/2) < 0 &\Rightarrow \pi/2 \text{ è INSTABILE} \\ V''(-\pi/2) > 0 &\Rightarrow -\pi/2 \text{ è STABILE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Se } \gamma < 1 \quad V''(\pi/2) > 0 &\Rightarrow \pi/2 \text{ è STABILE} \\ V''(-\pi/2) < 0 &\Rightarrow -\pi/2 \text{ è INSTABILE} \end{aligned}$$

2. Se $|\gamma| < 1 \Rightarrow$ dobbiamo controllare il segno di $\frac{d^2V}{d\varphi^2}$ nelle quattro configurazioni di equilibrio $\varphi = \pi/2$, $\varphi = -\pi/2$, φ_1 e φ_2

$$\begin{aligned}
\Rightarrow V''(\pi/2) &= cL^2(1 - \gamma) \\
V''(\pi/2) &= cL^2(1 + \gamma) \\
V''(\varphi_1) = V''(\varphi_2) &= cL^2[-\sin\varphi_1(\gamma - \sin\varphi_1) - \cos^2\varphi_1] \\
& \text{(essendo } \sin\varphi_1 = \gamma \text{)} \\
&= -cL^2\cos\varphi_1 \\
\Rightarrow V''(\pi/2) > 0 &\Rightarrow \pi/2 \text{ è } \textit{STABILE} \\
V''(\pi/2) > 0 &\Rightarrow -\pi/2 \text{ è } \textit{STABILE} \\
V''(\varphi_1) = V''(\varphi_2) < 0 &\Rightarrow \varphi_1 \text{ e } \varphi_2 \text{ sono } \textit{INSTABILI}
\end{aligned}$$

Riassumendo in un quadro i risultati ottenuti:

$\gamma < -1$	$-1 < \gamma < 1$	$\gamma > 1$
2 configurazioni di equilibrio	4 configurazioni di equilibrio	2 configurazioni di equilibrio
$\pi/2$ STABILE	$\pi/2$ STABILE	$\pi/2$ INSTABILE
$-\pi/2$ INSTABILE	$-\pi/2$ STABILE	$-\pi/2$ STABILE
	φ_1 INSTABILE	
	φ_2 INSTABILE	

Un modo diverso per evidenziare i risultati precedenti è il seguente diagramma in cui si riporta:

in ascissa il parametro γ
in ordinata per ogni γ le configurazioni di equilibrio corrispondenti al dato γ

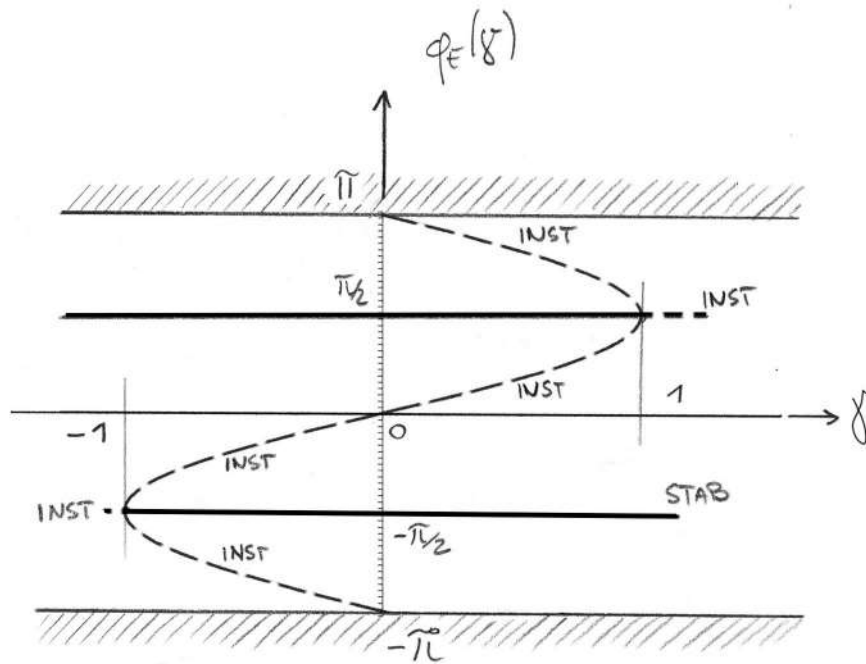


Figure 4.13:

Le righe in grassetto indicano le posizioni di equilibrio stabile.

Questo tipo di diagramma viene detto *diagramma di biforcazione* perchè evidenzia i valori del parametro in cui la situazione cambia drasticamente, ad esempio per $\gamma = 1$ la posizione $\pi/2$ si *biforca* in 3 posizioni di equilibrio $\pi/2, \varphi_1, \varphi_2$.

Notare che il grafico della funzione V è molto diverso nei due casi $|\gamma| > 1$ e $|\gamma| < 1$, nel primo ha solo due punti stazionari, nel secondo quattro (sempre per $-\pi/2 < \gamma \leq \pi/2$) Provate a disegnare il grafico di V nei due casi, ad esempio $\gamma = 2, \gamma = 1/2$.

4.4.2 Risoluzione Esercizio 4.2

Troviamo le configurazioni di equilibrio ponendo

$$\frac{\partial V}{\partial x_O} = (\text{vedi 4.10}) = -mg + cx_O + cL\cos\vartheta = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \left(\frac{mg}{2} - cx_O \right) L \sin \vartheta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bullet & \sin \vartheta = 0 \\ \bullet & x_O = \frac{mg}{2c} \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione otteniamo, per $-\pi < \vartheta \leq \pi$

$$\text{se } \sin \vartheta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vartheta = 0 \Rightarrow \cos \vartheta = 1 \Rightarrow x_O = \frac{mg}{c} - L \\ \vartheta = \pi \Rightarrow \cos \vartheta = -1 \Rightarrow x_O = \frac{mg}{c} + L \end{cases}$$

$$\text{se } x_O = \frac{mg}{2c} \Rightarrow \cos \vartheta = \frac{mg}{2cL} \text{ se } \frac{mg}{2cL} < 1$$

Quindi:

se $\frac{mg}{2cL} > 1 \Rightarrow 2$ configurazioni di equilibrio

$$\underline{q}_1 = \left(x_O = \frac{mg}{c} - L, \vartheta = 0 \right)$$

$$\underline{q}_2 = \left(x_O = \frac{mg}{c} + L, \vartheta = \pi \right)$$

se $\frac{mg}{2cL} < 1 \Rightarrow 4$ configurazioni di equilibrio

\underline{q}_1 e \underline{q}_2 come prima

$$\underline{q}_3 = \left(x_O = \frac{mg}{2c}, \vartheta_1 = \arccos \frac{mg}{2cL} = \gamma \right)$$

$$\underline{q}_4 = \left(x_O = \frac{mg}{2c}, \vartheta_2 = -\arccos \frac{mg}{2cL} = -\vartheta_1 \right)$$

Per studiare la stabilità dell'equilibrio consideriamo l'Hessiano di V (vedi [BPS])

$$HV = \begin{pmatrix} \partial^2 V / \partial x_O^2 & \partial^2 V / \partial x_O \partial y_O \\ \partial^2 V / \partial x_O \partial y_O & \partial^2 V / \partial y_O^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -cL \sin \vartheta \\ -cL \sin \vartheta & \left(\frac{mg}{2} - cx_O \right) L \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Poichè $c > 0$ vale sempre, basta considerare il determinante di HV

$$\det HV = c \left(\frac{mg}{2} - cx_O \right) L \cos \vartheta - c^2 L^2 \sin^2 \vartheta \Rightarrow$$

in \underline{q}_1 : $\det HV = cL(cL - mg/2) > 0$ se $\frac{mg}{2cL} < 1 \Rightarrow \underline{q}_1$ è stabile solo se $\frac{mg}{2cL} < 1$

in \underline{q}_2 : $\det HV = cL(cL + mg/2) > 0$ sempre $\Rightarrow \underline{q}_2$ è sempre stabile

in \underline{q}_3 e \underline{q}_4 : $\det HV = c^2 L^2 \sin^2 \gamma < 0$ sempre $\Rightarrow \underline{q}_3, \underline{q}_4$ sono instabili

4.4.3 Risoluzione Esercizio 4.3

L'energia potenziale nella molla è

$$V_{molla} = \frac{c}{2}x_B^2 = \frac{c}{2}(L\cos\varphi)^2$$

La forza \underline{F}_C non è conservativa ma dà un Lavoro Virtuale (vedi Cap 3)

$$\underline{F}_C \cdot \delta \underline{x}_C = \frac{FL}{2}\delta\varphi = -\frac{dV}{d\varphi}\delta\varphi$$

quindi si può associare ad \underline{F}_C una energia potenziale pari a $-\frac{FL}{2}\varphi$

$$\Rightarrow V(\varphi) = -\frac{FL}{2}\varphi + \frac{c}{2}L^2\cos^2\varphi$$

$$-Q = \frac{dV}{d\varphi} = -\frac{FL}{2} - cL^2\cos\varphi\sin\varphi = -\frac{L}{2}(F + cL\sin 2\varphi) = 0$$

Se $F/cL > 1$ non c'è equilibrio

Se $0 \leq F/cL < 1 \Rightarrow \sin 2\varphi = -F/cL$

$\Rightarrow (0 < \varphi < 2\pi, 0 < 2\varphi < 4\pi)$

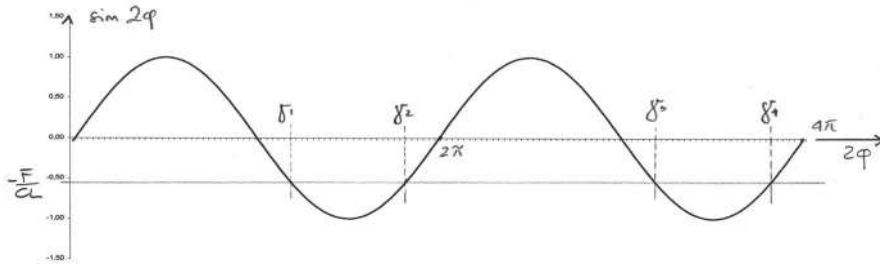


Figure 4.14:

quindi 4 configurazioni di equilibrio (disegnatele!).

Per la stabilità:

$$V''(\varphi) = -c(L^2\cos 2\varphi)$$

$$V''(\gamma_2/2) = V''(\gamma_4/2) < 0 \Rightarrow \gamma_2, \gamma_4 \text{ instabili}$$

$$V''(\gamma_1/2) = V''(\gamma_3/2) > 0 \Rightarrow \gamma_1, \gamma_3 \text{ stabili}$$

4.4.4 Risoluzione Esercizio 4.4

Per i risultati di Cap 3 il lavoro virtuale di \underline{F}_A è nullo, perchè \underline{F}_A ha momento nullo rispetto ad O, si può quindi ottenere da una energia potenziale costante, che possiamo prendere uguale a zero, quindi l'energia potenziale totale è solo quella delle due forze elastiche

$$\begin{aligned} V &= \frac{c}{2}y_A^2 + \frac{2c}{2}x_A^2 = \frac{c}{2}L^2\sin^2\varphi + cL^2\cos^2\varphi \\ &= \frac{c}{2}L^2(1 - \cos^2\varphi + cL^2\cos^2\varphi \\ &= \frac{c}{2}L^2\cos^2\varphi + \frac{c}{2}L^2 = \frac{c}{2}L^2\frac{(\cos 2\varphi + 1)}{2} + \frac{cL^2}{2} \\ &= \frac{cL^2}{4}\cos 2\varphi + \frac{3}{4}cL^2 \end{aligned}$$

Se $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq 2\varphi \leq 4\pi$

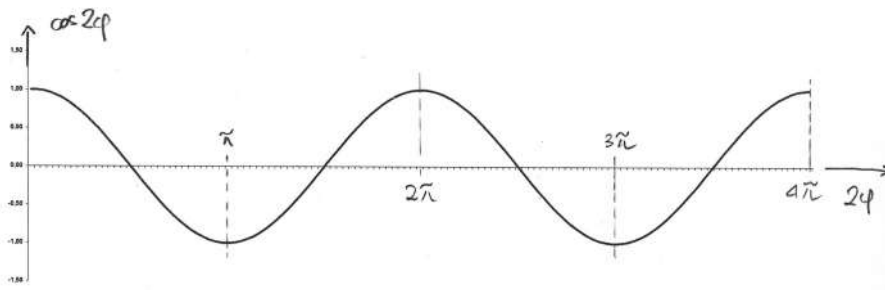


Figure 4.15:

Dall'esame diretto di $V(\varphi)$ abbiamo 4 configurazioni di equilibrio:

- $\varphi = 0$ massimo per V \Rightarrow instabile
- $\varphi = \pi$ massimo per V \Rightarrow instabile
- $\varphi = \pi/2$ minimo per V \Rightarrow stabile
- $\varphi = 3\pi/2$ minimo per V \Rightarrow stabile

(disegnatele!)

Dispense di Meccanica Razionale

Prof. Maura Ughi

20 Marzo 2003

Contents

5	Equazioni Cardinali della Statica	2
5.1	Deduzioni e Considerazioni	2
5.2	Applicazione alla statica dei rigidi	5
5.3	Applicazioni alla Statica dei Sistemi Articolati	11
5.4	Risoluzione degli Esercizi	25
5.4.1	Risoluzione Esercizio 5.1	25
5.4.2	Risoluzione Esercizio 5.2	26
5.4.3	Risoluzione Esercizio 5.3	28
5.4.4	Risoluzione Esercizio 5.4	31

Chapter 5

Equazioni Cardinali della Statica

5.1 Deduzioni e Considerazioni

Consideriamo un sistema materiale \mathcal{S} in equilibrio (rispetto ad un dato osservatore Σ). Per il principio d'inerzia $\underline{F}_P = \underline{0}$ per ogni punto P del sistema, dove con \underline{F}_P indichiamo la forza totale agente su P (misurata dall'osservatore di cui sopra), avremo allora che:

$$\begin{aligned} \underline{F}_P = \underline{0}, \forall P \in \mathcal{S} &\Rightarrow \sum_{P \in \mathcal{S}} \underline{F}_P = \underline{0} \\ \underline{M}(O) &= \sum_{P \in \mathcal{S}} (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P = \underline{0} \end{aligned}$$

Dove O è un punto fissato a piacere.

Dividiamo ora le forze agenti sul sistema \mathcal{S} in forze esterne ed interne al sistema (vedi Cap. 1 Par. 7). Per il principio di azione e reazione le forze interne sono a due a due coppie di braccio nullo quindi

$$\begin{aligned} \underline{R}^i &= \sum_{P \in \mathcal{S}} \underline{F}_P^i = \text{risultante forze interne} = \underline{0} \\ \underline{M}^i(O) &= \text{momento risultante delle forze interne rispetto ad } O \end{aligned}$$

Segue subito che, indicando con l'apice e le forze esterne:

\mathcal{S} in equilibrio	\Rightarrow	$\left \begin{array}{l} \underline{R}^e = \underline{0} \\ \underline{M}^e(O) = \underline{0} \end{array} \right.$	EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA E.C.S.
-----------------------------	---------------	---	--

Quindi le E.C.S affermano che se un sistema materiale è in equilibrio allora la risultante ed il momento risultante delle forze esterne sono nulli.

Sostanzialmente le E.C.S. sono equazioni di bilancio che devono necessariamente valere se un dato sistema è in equilibrio. Notiamo subito che in generale se le forze esterne ad un dato sistema soddisfano le equazioni cardinali ed il sistema è fermo in un certo istante non è detto che resti fermo.

Ad esempio quando usiamo le forbici esercitiamo dall'esterno sulle forbici ferme una coppia di braccio nullo, cioè le forze esterne soddisfano le E.C.S. eppure le forbici si aprono.

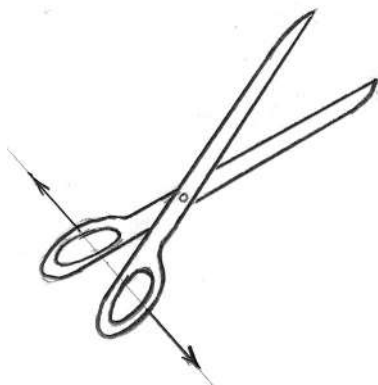


Figure 5.1:

In un modo più aulico si usa dire che le E.C.S. non sono sufficienti *in generale* a garantire l'equilibrio di un sistema.

C'è però un'eccezione importante a quest'ultima osservazione e precisamente il corpo rigido; in questo caso l'esperienza comune dimostra che un rigido fermo continua a rimanere fermo a meno che le forze esercitate dall'esterno sul rigido violino le E.C.S. D'altra parte si vede facilmente che per un rigido le E.C.S. sono *equivalenti* al P.L.V. nel senso seguente:

L.V. per un rigido (Vedi Cap. 3) =

$$\begin{aligned}
 & \underline{R} \cdot \delta \underline{x}_O + \underline{M}(O) \cdot \underline{\chi} \\
 = & \left(\text{essendo } \underline{R}^i = \underline{0}, \underline{M}^i(O) = \underline{0} \right) \\
 & \underline{R}^e \cdot \delta \underline{x}_O + \underline{M}^e(O) \cdot \underline{\chi}
 \end{aligned}$$

Quindi per *un rigido*:

Se $L.V. = 0 \forall \delta \underline{x}_O, \underline{\chi} \in \mathbf{R}^3 \Rightarrow \underline{R}^e = 0 \underline{M}^e = 0 \Rightarrow \text{E.C.S.}$

Se valgono E.C.S. cioè $\underline{R}^e = 0, \underline{M}^e(O) = 0 \Rightarrow L.V. = 0 \forall \delta \underline{x}_O, \underline{\chi}$

(Le relazioni sopra scritte sono pensate per un rigido libero, possiamo sempre metterci in questa situazione pensando di sopprimere gli eventuali vincoli e di sostituire ad essi le loro reazioni) Per l'equilibrio di un rigido si possono quindi usare sia le E.C.S. sia il P.L.V. (lo vedremo meglio nelle applicazioni)

Osserviamo che nello spazio a tre dimensioni le E.C.S. sono 6 equazioni scalari; nel caso di un rigido piano, poichè le forze sono tutte sul piano, l'equazione della risultante dà 2 equazioni scalari e quella del momento 1 equazione scalare (essendo i momenti tutti diretti come la perpendicolare al piano del rigido). Quindi nel caso del rigido piano le E.C.S. forniscono 3 equazioni scalari.

Notiamo però che il fatto che le E.C.S. sono tante quante i gradi di libertà del rigido non implica la loro *sufficienza* per i rigidi (che viene appunto dell'equivalenza con il P.L.V. oppure da evidenza sperimentale). Se consideriamo infatti un sistema di due punti materiali liberi di muoversi esso ha 6 gradi di libertà ma le E.C.S. *non* sono sufficienti a garantire l'equilibrio di tale sistema; se ad esempio tra i due punti c'è una molla tesa (forza interna) il sistema si muove.

Ultima osservazione: se l'equazione dei momenti è verificata rispetto ad un punto dato O, essendo la risultante nulla, essa è verificata per ogni altro punto dello spazio diverso da O. Basta quindi verificarla per un solo punto, che si sceglierà nel modo più conveniente caso per caso.

Infatti dato un sistema di forze applicate (P, \underline{F}_P), con risultante \underline{R} ,

$$\begin{aligned} \underline{M}(O) &= \sum_P (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P \\ &= \sum_P [(\underline{x}_P - \underline{x}_{O'}) + (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O)] \wedge \underline{F}_P \\ &= \sum_P (\underline{x}_P - \underline{x}_{O'}) \wedge \underline{F}_P + (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \wedge \sum_P \underline{F}_P \\ &= \underline{M}(O') + (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \wedge \underline{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{se } \underline{R} = \underline{0} \Rightarrow \underline{M}(O) = \underline{M}(O'), \forall O, O' \in \mathbf{R}^3$$

5.2 Applicazione alla statica dei rigidi

Se il rigido è vincolato, ricordiamo subito che le forze di reazione esterne vanno messe in bilancio, anzi le E.C.S. servono proprio a calcolare tali reazioni. Cominciamo con il solito esempio isostatico, già visto varie volte (Cap. 2, 3)

Esempio 5.1

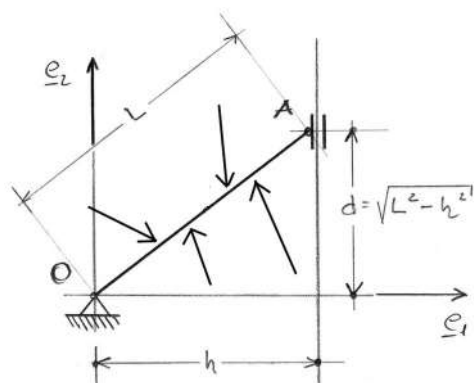


Figure 5.2:

Supponiamo ora in generale che sull'asta OA agisca un generico sistema di forze attive note di cui si conosce

$\underline{R}^{e,a}$ = risultante delle forze attive esterne

$\underline{M}^{e,a}$ = momento risultante delle forze attive esterne rispetto ad O

Vogliamo usare le E.C.S. per calcolare le reazioni delle cerniere O ed A . Supponiamo al solito che i vincoli siano lisci avremo allora

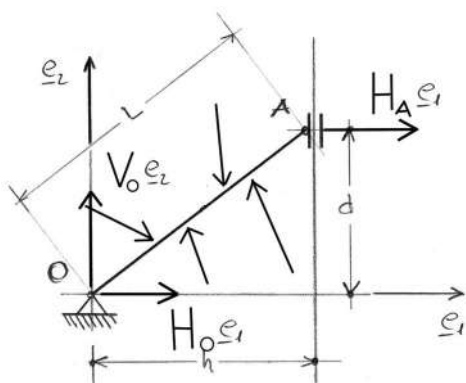


Figure 5.3:

$$\begin{aligned}
\underline{R}^e = \underline{0} &\Rightarrow \text{in direzione } \underline{e}_1 & H_O + H_A + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_1 &= 0 \\
&\text{in direzione } \underline{e}_2 & V_O + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_2 &= 0 \\
\underline{M}^e(O) = \underline{0} &\Rightarrow \text{in direzione } \underline{e}_3 & -H_A d + \underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{e}_3 &= 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Si vede subito che:

se $d \neq 0$

(solita condizione di indipendenza dei vincoli vedi Cap 2, 3) \Rightarrow
 H_O, V_O, H_A sono determinate in modo unico per ogni sistema di forze
attive

se $d = 0$

se $\underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{e}_3 = 0 \Rightarrow H_A$ è indeterminato, ∞
soluzioni
se $\underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{e}_3 \neq 0 \Rightarrow$ non esiste valore finito di
 H_A che soddisfi l'ultima
equazione in (5.1), nessuna
soluzione

Siamo quindi arrivati alle stesse conclusioni del Cap 3 con un metodo
diverso.

Notiamo che il problema ha 3 incognite H_O, V_O, H_A il sistema (5.1) è un
sistema lineare non omogeneo

$$A \mathfrak{S}^r = \mathfrak{S}^a \tag{5.2}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

$$\mathfrak{S}^r = \begin{pmatrix} H_O \\ V_O \\ V_A \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}^a = \begin{pmatrix} -\underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_1 \\ -\underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_2 \\ -\underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{e}_3 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Arrivare a sistemi lineari è tipico nel calcolo delle reazioni con le E.C.S. Notare che essendo $d = l \sin \alpha$, $A = J_F^T$, con J_F definito nel Cap 2 Par 1.5 Esempio 1.9

Dalla teoria dei sistemi lineari, essendo $\det A = -d$ si arriva subito alle conclusioni precedenti

Notiamo nuovamente che se i vincoli non sono lisci, oppure il sistema è iperstatico il problema risulta Staticamente Indeterminato (S.I.) in quanto il numero delle incognite aumenta mentre le equazioni rimangono sempre 3. Ad esempio supponiamo, vedi sempre fig 5.2, che la cerniera in O presenti un momento d'attrito $\nu^r \underline{e}_3$, avremo allora invece di (5.1) la seguente

$$\begin{cases} H_O + H_A + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_1 = 0 \\ V_O + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_2 = 0 \\ -H_A d + \nu^r + \underline{M}^{e,a} \cdot \underline{e}_3 = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Questo è un sistema di 3 equazioni lineari nelle 4 incognite H_O, V_O, H_A, ν^r , che ha infinite soluzioni, appunto S.I.

Oppure supponiamo di avere in A una cerniera fissa (sistema iperstatico) fermo restando il resto.

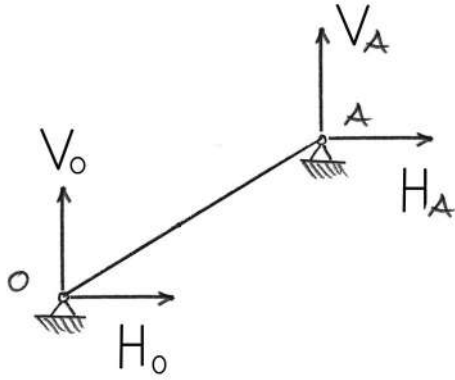


Figure 5.4:

Invece di (5.1) avremo adesso

$$\begin{cases} H_O + H_A + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_1 = 0 \\ V_O + V_A + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_2 = 0 \\ -H_A d + V_A h + \underline{M}^{e,a} \cdot \underline{e}_3 = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Nuovamente avremo un sistema di 3 equazioni nelle 4 incognite H_O, V_O, H_A, V_A , quindi un problema S.I.

Esercizio 5.1

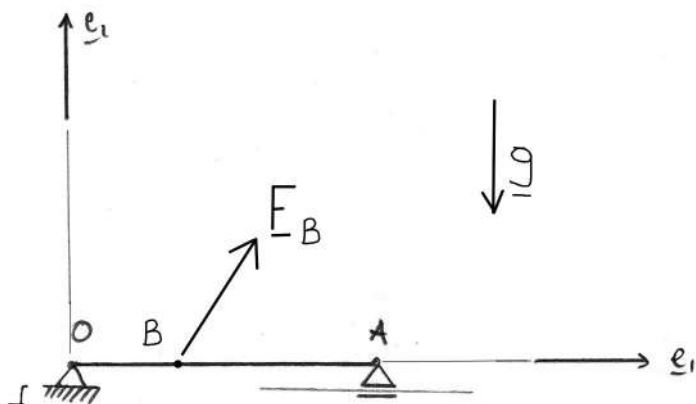


Figure 5.5: nel piano verticale

É data l'asta OA omogenea vincolata come in figura 5.5 su un piano verticale e soggetta oltre al peso alla forza in B , $\underline{F}_B = f \underline{e}_1 + 2f \underline{e}_2$, $\overline{OB} = l/4$, $\overline{OA} = l$ Calcolare le reazioni delle cerniere O ed A .

Esercizio 5.2

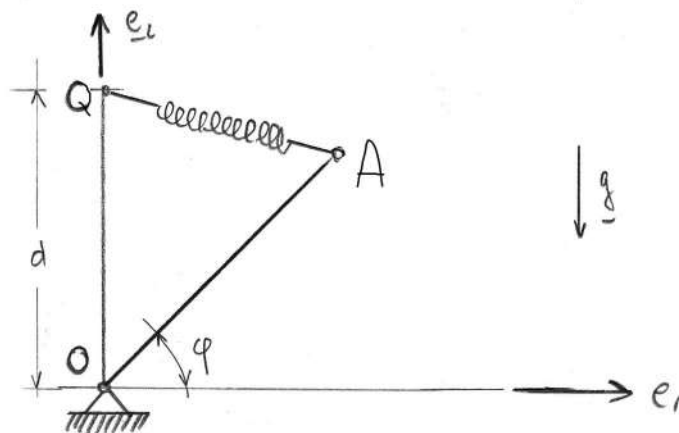


Figure 5.6: piano verticale

Data l'asta omogenea vincolata in un piano verticale come in figura 5.6, determinare le configurazioni di equilibrio e calcolare le reazioni in O all'equilibrio.

5.3 Applicazioni alla Statica dei Sistemi Articolati

Come abbiamo già detto se il sistema è deformabile le E.C.S. applicate a tutto il sistema non bastano a garantirne l'equilibrio, sono però sufficienti a dare l'equilibrio di ogni singola componente rigida a patto di considerare le azioni interne di una componente sull'altra. Descriviamo il metodo nell'esempio guida dell'arco a 3 cerniere (isostatico)

Esempio 5.2 (*Arco a Tre Cerniere*)

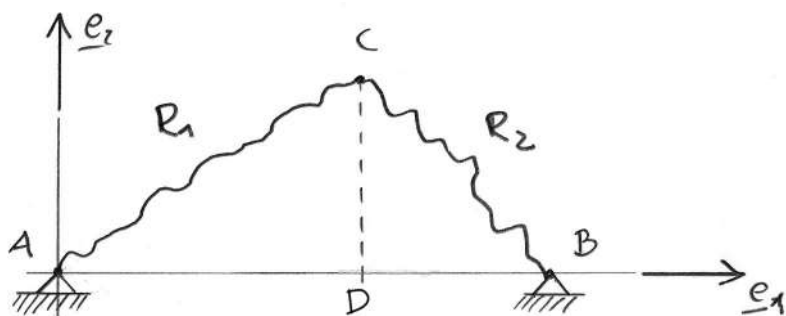


Figure 5.7:

Supponiamo note le forze agenti sui rigidi \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 e sulla cerniera C.

Spezziamo il sistema nelle sue componenti, evidenziando le azioni dei vincoli esterni ed interni (pensati lisci) mediante le forze che essi esercitano.

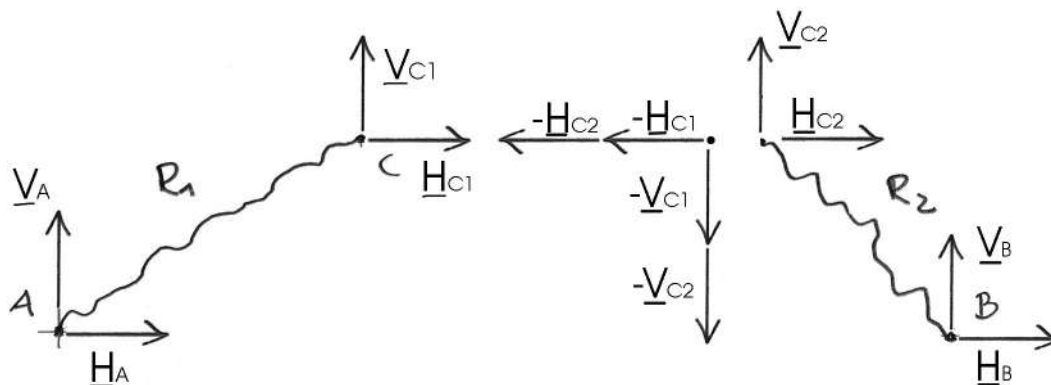


Figure 5.8:

Le forze esterne agenti su ciascuna componente sono:

- | | |
|--------------------|--|
| $\mathfrak{R}_1 :$ | <ul style="list-style-type: none"> · reazioni della cerniera esterna in A , $\underline{H}_A, \underline{V}_A$ (in \underline{e}_1 ed \underline{e}_2) · forze attive agenti su \mathfrak{R}_1 |
| $\mathfrak{R}_2 :$ | <ul style="list-style-type: none"> · reazioni della cerniera C su \mathfrak{R}_1 , $\underline{H}_{C1}, \underline{V}_{C1}$ · reazioni della cerniera esterna in B , $\underline{H}_B, \underline{V}_B$ · forze attive agenti su \mathfrak{R}_2 · forze attive agenti su \mathfrak{R}_2 , $\underline{H}_{C2}, \underline{V}_{C2}$ |
| nodo C: | <ul style="list-style-type: none"> · forza attiva applicata in C , \underline{F}_C · forze che \mathfrak{R}_1 esercita su C' , $\underline{H}_{C1}, \underline{V}_{C1}$ · forze che \mathfrak{R}_2 esercita su C' , $\underline{H}_{C2}, \underline{V}_{C2}$ |

Abbiamo quindi da determinare 8 incognite di reazione:

$$\mathfrak{S}^r = (H_A, V_A, H_B, V_B, H_{C1}, V_{C1}, H_{C2}, V_{C2})$$

Scriviamo ora le equazioni che \mathfrak{S}^r deve soddisfare:

1. E.C.S. per tutto il sistema $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 \cup \{C\}$ (scegliendo come polo per i momenti una delle 2 cerniere fisse, ad esempio A)

$\underline{R}^e = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad$ direzione \underline{e}_1

$$H_A + H_B + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_1 = 0 \quad (5.7)$$

direzione \underline{e}_2

$$V_A + V_B + \underline{R}^{e,a} \cdot \underline{e}_2 = 0 \quad (5.8)$$

(dove $\underline{R}^{e,a}$ è la risultante delle forze attive esterne a tutto il sistema, cioè dobbiamo considerare tutte le forze attive escluse eventuali forze interne tra \mathfrak{R}_1 ed \mathfrak{R}_2)

$\underline{M}^e(A) = \underline{0} \quad \Rightarrow$

$$\overline{AB} V_B + \underline{M}^{e,a}(A) \cdot \underline{e}_3 = 0 \quad (5.9)$$

(dove \overline{AB} è al solito la distanza tra le cerniere A e B)

$\underline{M}^{e,a}$ è il momento risultante delle forze attive esterne a tutto il sistema, calcolato con polo A

Notiamo che se $\overline{AB} \neq 0$ l'ultima equazione determina V_B e quindi la (5.8) permette di calcolare V_A . A questo punto le E.C.S. per il sistema completo ci hanno dato tutte le informazioni che ci potevano dare, si vede bene che non sono sufficienti neanche a calcolare le reazioni esterne in A e B, infatti H_A e H_B non sono ancora determinate.

2. E.C.S. per \mathfrak{R}_2 (ovviamente si può scegliere anche \mathfrak{R}_1) scegliendo come polo per i momenti il punto C, per evitare di introdurre le incognite H_{C_2}, V_{C_2} .

$\underline{M}^{e,1}(C) = \underline{0} \quad \Rightarrow$

$$\overline{CD}H_B + \overline{DB}V_B + \underline{M}^{a,2}(C) \cdot \underline{e}_3 = 0 \quad (5.10)$$

(vedi figura 5.6, con $\underline{M}^{a,2}(C)$ momento rispetto a C del sistema \mathfrak{S}_2 che agisce su \mathfrak{R}_2)

Prima di proseguire notiamo che se $\overline{CD} \neq 0$ essendo già nota V_B dai risultati al punto (1) possiamo ricavare H_B dalla (5.10) e quindi H_A dalla (5.7). Quindi se interessano solo le reazioni delle cerniere esterne A e B il calcolo finisce qui. Noi vogliamo ora calcolare anche le reazioni nella cerniera interna C quindi proseguiamo sempre considerando \mathfrak{R}_2 da solo.

$$\underline{R}^{e,2} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\text{direzione } \underline{e}_1 \quad H_B + H_{C_2} + \underline{F}^{a,2} \cdot \underline{e}_1 = 0 \quad (5.11)$$

$$\text{direzione } \underline{e}_2 \quad V_B + V_{C_2} + \underline{F}^{a,2} \cdot \underline{e}_2 = 0 \quad (5.12)$$

(dove $\underline{F}^{a,2}$ è la risultante delle forze attive agenti su \mathfrak{R}_2)

Queste due equazioni permettono di calcolare H_{C_2} e V_{C_2} , essendo già note H_B e V_B

3. *Nodo C*, pensando alla cerniera interna come ad un punto materiale, per il principio d'inerzia la somma delle forze applicate a C deve essere nulla quindi:

$$\text{direzione } \underline{e}_1 \quad -H_{C_1} - H_{C_2} + \underline{F}_C \cdot \underline{e}_1 = 0 \quad (5.13)$$

$$\text{direzione } \underline{e}_2 \quad -V_{C_1} - V_{C_2} + \underline{F}_C \cdot \underline{e}_2 = 0 \quad (5.14)$$

Queste due equazioni permettono di calcolare H_{C_1} e V_{C_1} e con esse tutte le 8 incognite di reazione del problema.

Notiamo subito che, ripercorrendo i calcoli precedenti:

l'arco a 3 cerniere è risolubile per ogni sistema di forze attive applicate se e solo se $\overline{AB} \neq 0$ e $\overline{CD} \neq 0$, cioè A, B, C sono i vertici di un triangolo non degenere (non sono allineati)

Possiamo ripetere anzi i ragionamenti del tipo di quelli al Cap 3. Precisamente

$$\begin{aligned} (5.9) & \Rightarrow \text{ se } \overline{AB} \rightarrow 0 \quad V_B \text{ può tendere ad } \infty \\ (5.10) & \Rightarrow \text{ se } \overline{CD} \rightarrow 0 \quad H_B \text{ può tendere ad } \infty \end{aligned}$$

con effetto a ricaduta sulle altre reazioni.

Nota 5.1

Come nel caso dell'Esempio 5.1, il calcolo delle reazioni \mathfrak{S}^r vuol dire risolvere un sistema lineare di 8 equazioni in 8 incognite. Mettendo insieme le equazioni (5.7) - (5.14) abbiamo

$$A\mathfrak{S}^r = \mathfrak{S}^a \tag{5.15}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^r &= (H_A, V_A, H_B, V_B, H_{C1}, V_{C1}, H_{C2}, V_{C2})^T \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{CD} & \overline{DB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Leftarrow (5.7) \\ \Leftarrow (5.8) \\ \Leftarrow (5.9) \\ \Leftarrow (5.10) \\ \Leftarrow (5.11) \\ \Leftarrow (5.12) \\ \Leftarrow (5.13) \\ \Leftarrow (5.14) \end{array} \\ \mathfrak{S}^a &= \begin{pmatrix} -\underline{R}^{e,a} \cdot e_1 \\ -\underline{R}^{e,a} \cdot e_2 \\ -\underline{M}^{e,a}(A) \cdot e_3 \\ -\underline{M}^{a,2}(C) \cdot e_3 \\ -\underline{F}^{a,2} \cdot e_1 \\ -\underline{F}^{a,2} \cdot e_2 \\ -\underline{F}_C \cdot e_1 \\ -\underline{F}_C \cdot e_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Leftarrow (5.7) \\ \Leftarrow (5.8) \\ \Leftarrow (5.9) \\ \Leftarrow (5.10) \\ \Leftarrow (5.11) \\ \Leftarrow (5.12) \\ \Leftarrow (5.13) \\ \Leftarrow (5.14) \end{array} \end{aligned}$$

Nel sistema lineare (5.15) individuiamo:

- \mathfrak{S}^r incognite di reazione
- \mathfrak{S}^a termine noto dovuto alle forze attive
- A matrice 8x8 legata alla geometria del sistema imposta dai vincoli, le condizioni $\overline{AB} \neq 0$ $\overline{CD} \neq 0$ (danno indipendenza dei vincoli)
 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Quindi l'indipendenza dei vincoli assicura che il sistema è *risolubile* (cioè si calcolano in modo unico le reazioni) qualsiasi sia il sistema di forze applicate (cioè il termine noto \mathfrak{S}^a), in parole povere l'arco *regge*.

Ritroviamo allora la considerazione che se $\det A = 0$, vincoli non indipendenti, a seconda del sistema di forze attive (cioè \mathfrak{S}^a) si hanno:

- ∞ soluzioni \Leftrightarrow problema STATICAMENTE INDETERMINATO
- \emptyset soluzioni \Leftrightarrow problema impossibile (si rompono le cerniere perchè sottoposte ad uno sforzo eccessivo)

Notiamo infine che se i conti sono stati eseguiti correttamente le E.C.S. applicate al pezzo \mathfrak{R}_1 devono essere automaticamente soddisfatte dai valori ottenuti per \mathfrak{S}^r risolvendo il sistema (5.15), servono cioè come verifica.

Come già visto nel Cap 3, se aggiungiamo vincoli (sistema iperstatico) o se i vincoli non sono lisci (aggiungiamo cioè coppie di reazione) il problema diventa S.I. perchè le equazioni indipendenti restano 8 e le incognite diventano maggiori di 8.

Questo tipo di metodo si applica a qualsiasi sistema articolato (isostatico) e porta sempre alla soluzione di sistemi del tipo (5.15). Se ogni componente rigida ha due cerniere alle estremità, sono presenti 4 incognite scalari per rigido (vedi fig 5.7) quindi l'ordine del sistema (numero delle incognite) aumenta molto velocemente.

Esercizio 5.3

Calcolare le reazioni delle due cerniere esterne A e B nei due casi seguenti
(piano orizzontale)

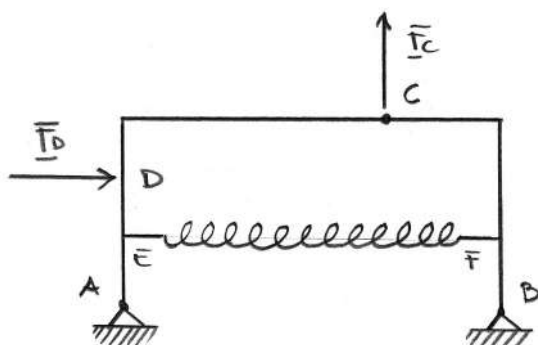


Figure 5.9:

1.

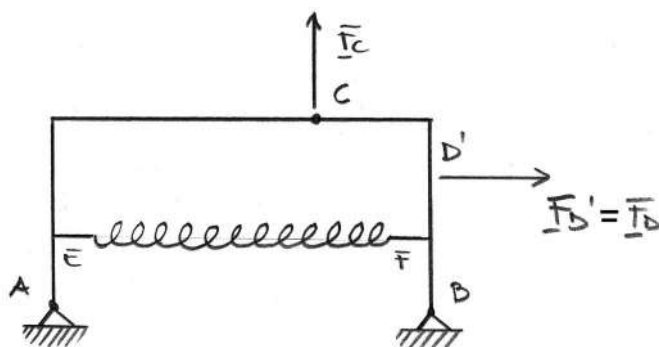


Figure 5.10:

2.

Nel caso di sistemi articolati con uno o più gradi di libertà è in generale più conveniente usare il P.L.V. per determinare l'equilibrio del sistema e poi usare le E.C.S. per calcolare le reazioni dei vincoli (sempre pensando di applicarle ad ogni singola componente rigida).

Esempio 5.3

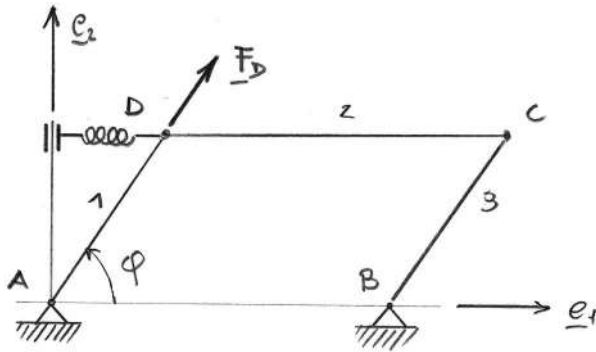


Figure 5.11: 3 aste uguali omogenee *piano verticale*

Determinare le configurazioni di equilibrio, discuterne la stabilità e calcolare le reazioni in A e B.

Le forze attive sono:

forze peso , conservative, energia potenziale

$$\begin{aligned} & m_1 g y_{G1} + m_2 g y_{G2} + m_3 g y_{G3} \\ & = g(m_1 + m_3) \frac{l}{2} \sin \varphi + m_2 g l \sin \varphi \\ & = g l \sin \varphi \left(\frac{m_1 + m_3}{2} + m_2 \right) \end{aligned}$$

forza elastica in D , conservativa, energia potenziale

$$\frac{c}{2} x_D^2 = \frac{c}{2} l^2 \cos^2 \varphi$$

forza follower in D , lavoro virtuale $\underline{F}_D \cdot \delta \underline{x}_D = 0$ (essendo \underline{F}_D sempre ortogonale a $\delta \underline{x}_D$) quindi questa forza *non* dà contributo al L.V., quindi alla forza generalizzata Q (\Rightarrow energia potenziale *generalizzata*)

Quindi l'equilibrio si studia tenendo conto solo dell'energia potenziale dei pesi e della molla. Avremo

$$V(\varphi) = gl \sin \varphi \left(\frac{m_1 + m_3}{2} + m_2 \right) + \frac{c}{2} l^2 \cos^2 \varphi$$

La funzione $V(\varphi)$ dipende da parametri fisici, notiamo che:

$$\begin{aligned} V'(\varphi) &= gl \left(\frac{m_1 + m_3}{2} + m_2 \right) \cos \varphi - cl^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ &= cl^2 (\mu - \sin \varphi) \cos \varphi \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\mu = g \left(\frac{m_1 + m_3}{2} + m_2 \right) / cl$$

Considerando $\varphi \in [-\pi, \pi)$ avremo quindi che:

- se $\mu > 1$ si hanno solo due configurazioni di equilibrio, $\varphi = -\pi/2$, $\varphi = \pi/2$
- se $\mu < 1$ si hanno quattro configurazioni di equilibrio, $\varphi = -\pi/2$, $\varphi = \pi/2$ e φ_1 , φ_2 tali che $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 = \mu$, $0 < \varphi_1 < \pi/2$, $\pi/2 < \varphi_2 < \pi$.

Passando alla derivata seconda di V avremo

$$\begin{aligned} V''(\varphi) &= cl^2 (-\mu \sin \varphi + \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \\ &= cl^2 (-\mu \sin \varphi + 2\sin^2 \varphi - 1) \end{aligned}$$

Quindi:

- se $\mu > 1$ la configurazione $\varphi = -\pi/2$ è stabile mentre $\varphi = \pi/2$ è instabile
- se $\mu < 1$ le configurazioni $\varphi = -\pi/2$ e $\varphi = \pi/2$ sono stabili mentre $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ sono instabili

Passiamo al calcolo delle reazioni in A e B.

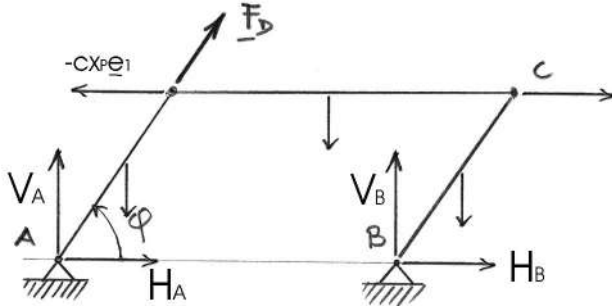


Figure 5.12:

$$\begin{aligned}\underline{F}_D &= F \text{vers}(\underline{x}_D - \underline{x}_A) \\ &= F(\cos\varphi \underline{e}_1 + \sin\varphi \underline{e}_2)\end{aligned}$$

Tutto il sistema:

$$\begin{aligned}\underline{R}^e = \underline{0} \quad & \text{direzione } \underline{e}_1 \quad H_A + H_B - cx_D + F\cos\varphi \\ & = H_A + H_B - cl\cos\varphi + F\cos\varphi = 0 \\ & \text{direzione } \underline{e}_2 \quad V_A + V_B + F\sin\varphi \\ & \quad - (m_1 + m_2 + m_3)g = 0 \\ \underline{M}^e(A) = \underline{0} \quad & lV_B - m_1g\frac{l}{2}\cos\varphi - m_2g(l\cos\varphi + \frac{l}{2}) \\ & - m_3g(\frac{l}{2}\cos\varphi + l) + c(l\cos\varphi)l\sin\varphi = 0\end{aligned}$$

da quest'ultima si ricava V_B e quindi dalla precedente V_A . Per determinare ad esempio H_B consideriamo:

solo asta BC

$$\underline{M}_{BC}^e(C) = \underline{0} \Rightarrow l\sin\varphi H_B - l\cos\varphi V_B + m_3g\frac{l}{2}\cos\varphi = 0$$

da questa si ricava H_B essendo già nota V_B e dalla prima equazione scritta si ricava H_A . Facendo i conti otteniamo:

$$V_B = g\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) + cl\cos\varphi(\mu - \sin\varphi)$$

$$\begin{aligned}
V_A &= (m_1 + m_2 + m_3)g - F \sin\varphi - V_B \\
H_B &= \left(V_B - \frac{m_3 g}{2}\right) \cotan\varphi \\
V_B &= -H_B + (cl - F)\cos\varphi
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \mu$
Precisamente avremo:

$$\varphi = \pi/2$$

$$\begin{aligned}
V_B &= g \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) \\
V_A &= (m_1 + m_2 + m_3)g - F - V_B = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)g - F \\
H_B &= 0 \\
H_A &= 0
\end{aligned}$$

$$\varphi = -\pi/2$$

$$\begin{aligned}
V_B &= g \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) \\
V_A &= \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)g + F \\
H_B &= 0 \\
H_A &= 0
\end{aligned}$$

$$\varphi = \varphi_1$$

$$\begin{aligned}V_B &= g \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) \\V_A &= g \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) - F\mu \\H_B &= \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \left(V_B - m_3 \frac{g}{2} \right) \\H_A &= -H_B + (cl - F)\sqrt{1 - \mu^2}\end{aligned}$$

$$\varphi = \varphi_2$$

$$\begin{aligned}V_B &= g \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) \\V_A &= g \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) - F\mu \\H_B &= -\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \left(V_B - m_3 \frac{g}{2} \right) \\H_A &= -H_B - (cl - F)\sqrt{1 - \mu^2}\end{aligned}$$

Esercizio 5.4

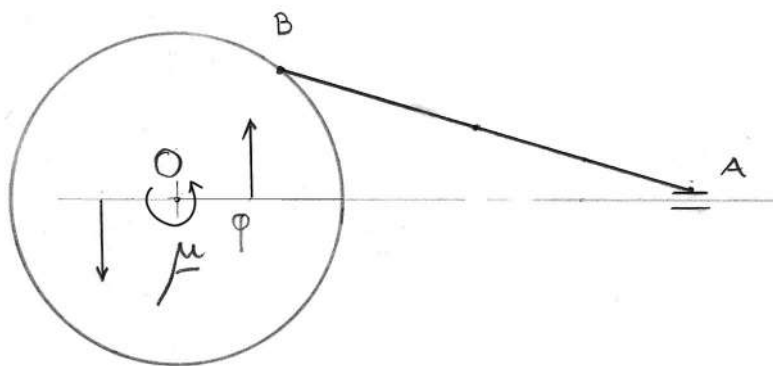


Figure 5.13: piano verticale

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= R \\ \overline{AB} &= L \geq R\end{aligned}$$

Dato il sistema in figura, cerniera fissa in O e carrello in A, determinare i valori del momento $\underline{\mu}$ della coppia applicata al disco per cui si ha equilibrio e calcolare le reazioni in A ed O all'equilibrio (il disco e l'asta si suppongano omogenei).

5.4 Risoluzione degli Esercizi

5.4.1 Risoluzione Esercizio 5.1

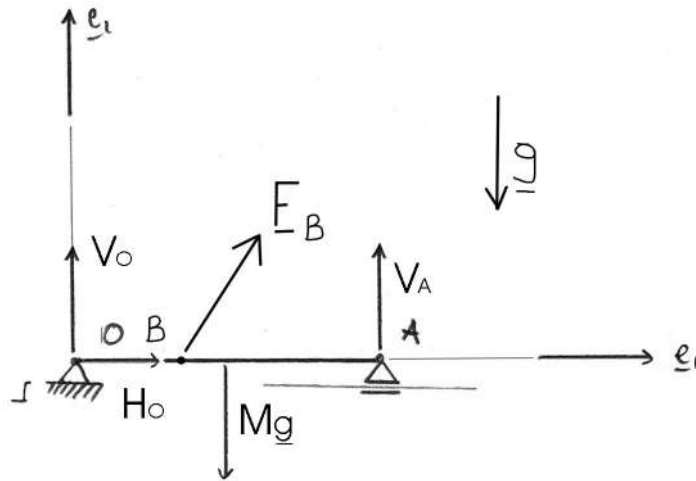


Figure 5.5'

$$\begin{aligned} \underline{R}^e = \underline{0} &= H_O + f = 0 \\ &V_O + V_A - Mg + 2f = 0 \\ \underline{M}^e(O) = \underline{0} &\Rightarrow lV_A - Mg\frac{l}{2} + 2f\frac{l}{4} = 0 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{Mg}{2} - \frac{f}{2} \\ V_O &= Mg - 2f - V_A = \frac{Mg}{2} - \frac{3}{2}f \\ H_O &= -f \end{aligned}$$

5.4.2 Risoluzione Esercizio 5.2

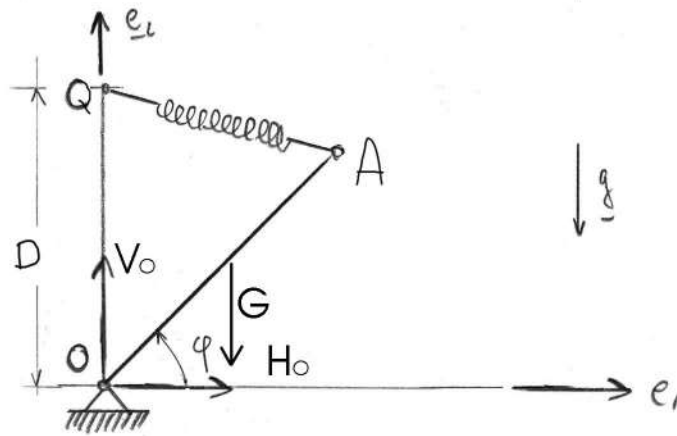


Figure 5.6'

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= D \\ \overline{OA} &= L\end{aligned}$$

Essendo il sistema in esame rigido possiamo usare sia le E.C.S. che il P.L.V., seguiamo entrambi i metodi ma notiamo che in generale conviene usare il P.L.V. nella forma conservativa per determinare l'equilibrio e usare poi le E.C.S. per calcolare le reazioni in O.

$$\begin{aligned}V &= mgy_G + \frac{c}{2} \|\underline{x}_A - \underline{x}_Q\|^2 \\ &= mg \frac{L}{2} \sin \varphi + \frac{c}{2} \|L \cos \varphi \underline{e}_1 + (L \sin \varphi - D) \underline{e}_2\|^2 \\ &= mg \frac{L}{2} \sin \varphi + \frac{c}{2} (L^2 \cos^2 \varphi + L^2 \sin^2 \varphi + D^2 - 2DL \sin \varphi) \\ &= mg \frac{L}{2} \sin \varphi - cDL \sin \varphi + \frac{c}{2} (L^2 + D^2) \\ &= L \sin \varphi \left(\frac{mg}{2} - cD \right) + \frac{c}{2} (L^2 + D^2)\end{aligned}$$

Per determinare l'equilibrio cerchiamo i punti di stazionarietà di V. Notiamo subito che

se $\frac{mg}{2} \neq cD$ essendo V proporzionale alla funzione $\sin\varphi +$
costante i punti cercati sono $+\pi/2$ e $-\pi/2$,
 inoltre
 se $\frac{mg}{2} > cD$ $-\pi/2$ è STABILE
 se $\frac{mg}{2} < cD$ $\pi/2$ è STABILE
 se $\frac{mg}{2} = cD$ V costante quindi c'è equilibrio per ogni val-
 ore di φ (equilibrio indifferente)

Ritroviamo gli stessi risultati con le E.C.S., per illustrare l'applicazione
 e per verifica (è sempre utile saper rispondere ad un quesito con metodi
 diversi)

É chiaro che se vogliamo avere un'equazione che non contenga le incog-
 nite di reazione H_O, V_O (detta anche equazione pura di equilibrio) dobbiamo
 usare l'equazione dei momenti con polo O:

$$\underline{M}^e(O) = \underline{0} \Rightarrow -mg\frac{L}{2}\cos\varphi + (\underline{x}_A - \underline{x}_O) \wedge -c(\underline{x}_A - \underline{x}_Q) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

$$(\underline{x}_A - \underline{x}_O) \wedge -c(\underline{x}_A - \underline{x}_Q) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ L\cos\varphi & L\sin\varphi & 0 \\ -cL\cos\varphi & -c(L\sin\varphi - D) & 0 \end{vmatrix} = cLD\cos\varphi \underline{e}_3$$

\Rightarrow equazione pura di equilibrio

$$-mg\frac{L}{2}\cos\varphi + cLD\cos\varphi = 0$$

Notiamo che il primo membro è $= -V'(\varphi)$ come deve essere, vedi Cap 3,
 essendo $-V' = Q_\varphi = \underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3$, il metodo di calcolo usato è però diverso nei
 due casi ed in questo senso i due metodi si controllano l'un l'altro.

Per calcolare le reazioni in O usiamo l'equazione della risultante in una
 configurazione generica

$$\begin{aligned} \underline{R}^e = \underline{0} &\Rightarrow H_O + \underline{e}_1 \cdot [-c(\underline{x}_A - \underline{x}_Q)] = 0 \\ &V_O - mg + \underline{e}_2 \cdot [-c(\underline{x}_A - \underline{x}_Q)] = 0 \\ &\Rightarrow \text{essendo } ([-c(\underline{x}_A - \underline{x}_Q)] = -c [L\cos\varphi \underline{e}_1 + (L\sin\varphi - D) \underline{e}_2]) \\ &\Rightarrow H_O = cL\cos\varphi \end{aligned}$$

$$V_O = mg + c(L\sin\varphi - D)$$

$$\text{Se } \frac{mg}{2} \neq cD$$

$$\varphi = \pi/2$$

$$H_O = 0$$

$$V_O = mg + c(L - D)$$

$$\varphi = -\pi/2$$

$$H_O = 0$$

$$V_O = mg - c(L + D)$$

$$\text{Se } \frac{mg}{2} = cD$$

(equilibrio per ogni valore di φ)

$$H_O = cL\cos\varphi = \frac{mgL}{2D}\cos\varphi$$

$$V_O = mg \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D}\sin\varphi - 1 \right) \right]$$

5.4.3 Risoluzione Esercizio 5.3

Essendo il piano di figura orizzontale *non* si considerano i pesi.

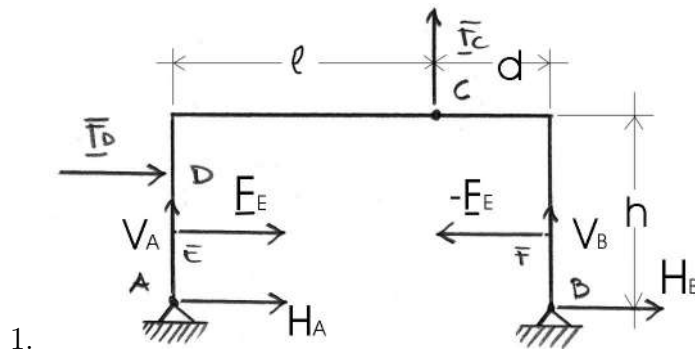


Figure 5.9'

$$\underline{F}_D = F_D \underline{e}_1$$

$$\underline{F}_C = F_C \underline{e}_2$$

$$\underline{F}_E = -c(\underline{x}_E - \underline{x}_F)$$

Tutto il sistema

$$\underline{R}^e = \underline{0} \Rightarrow H_A + H_B + F_D = 0 \quad (5.16)$$

$$V_A + V_B + F_C = 0 \quad (5.17)$$

$$\underline{M}^e(A) = \underline{0} \Rightarrow \overline{AB}V_B - F_D\overline{AD} + F_Cl = 0 \quad (5.18)$$

Dall'ultima equazione ricaviamo V_B

$$V_B = \frac{1}{\overline{AB}}(F_D\overline{AD} - F_Cl) \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_A &= (dalla (5.17)) - V_B - F_C \\ &= -F_D\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} + F_C\left(\frac{l}{\overline{AB}} - 1\right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Per ricavare ad esempio H_B consideriamo solo il pezzo CB, scegliamo come polo C per non introdurre le reazioni della cerniera C su CB

Solo CB

$\underline{M}_{CB}^e(C) = \underline{0} \Rightarrow$ (essendo la forza elastica in F esterna a CB dobbiamo tenere conto)

$$hH_B + dV_B - c\overline{AB}(h - \overline{BF}) = 0 \quad (5.21)$$

\Rightarrow

$$H_B = \frac{-d}{h}V_B + c\overline{AB}\left(1 - \frac{\overline{BF}}{h}\right) \quad (5.22)$$

\Rightarrow

$$H_A (dalla (5.16)) = -H_B - F_D \quad (5.23)$$

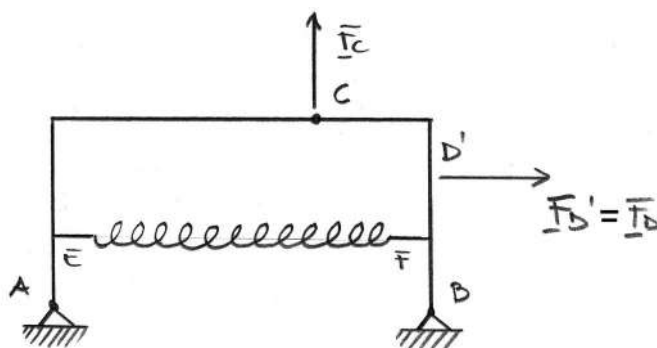


Figure 5.10'

2. Procedendo come sopra, notiamo che le E.C.S. applicate all'intero sistema sono identiche alle precedenti (5.16) - (5.18). Quindi V_A, V_B sono ancora date dalla (5.19) , (5.21)

Quando invece consideriamo solo BC dobbiamo tener conto di $F_{D'}$ in D'

Solo BC

$$\underline{M}_{BC}^e(C) = 0 \Rightarrow$$

$$hH_B + dV_B - c\overline{AB}(h - \overline{BF}) + F_D(h - \overline{D'B}) = 0$$

\Rightarrow

$$H_B = \frac{-d}{h}V_B + c\overline{AB} \left(1 - \frac{\overline{BF}}{h}\right) - F_D \left(1 - \frac{\overline{D'B}}{h}\right) \quad (5.24)$$

$$H_A \text{ (dalla (5.16)) } = -H_B - F_D \quad (5.25)$$

(con H_B calcolato sopra)

Le reazioni orizzontali sono diverse nei due casi, evidenziando il fatto che in un sistema articolato non rigido *non* si può spostare una forza sulla sua

retta d'azione cioè non si può sostituire un determinato sistema di forze applicate con uno equivalente (cioè con la stessa risultante e momento risultante)

5.4.4 Risoluzione Esercizio 5.4

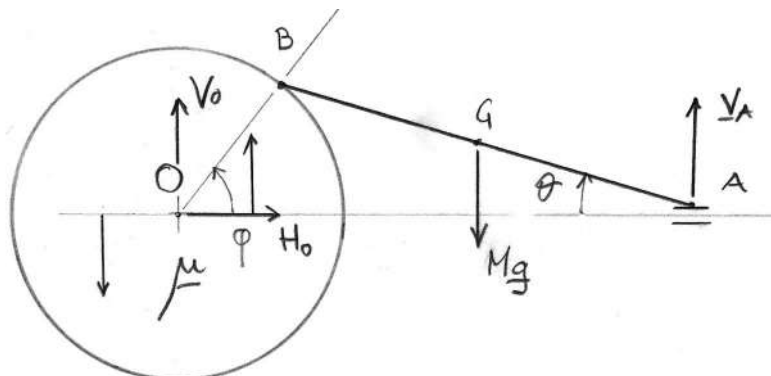


Figura 5.13'

$\overline{AB} = L$, massa m
 Disco di massa M
 $\mu > 0$

Il sistema ha un grado di libertà, scegliamo φ come coordinata libera, allora ϑ è una funzione di φ , $\vartheta = \vartheta(\varphi)$.

Per l'equilibrio usiamo il P.L.V., ricordando Cap 3, 4

$$L.V. \tag{5.26}$$

$$= \mu \delta \varphi - \frac{d}{d\varphi} V_{peso} \delta \varphi$$

$$\left(V_{peso} = mgy_G + Mgy_O = mg \frac{L}{2} \sin \vartheta(\varphi) \right)$$

$$= \delta \varphi \left(\mu - \frac{d}{d\varphi} \left(mg \frac{L}{2} \sin \vartheta(\varphi) \right) \right)$$

$$= \delta \varphi \left(\mu - mg \frac{L}{2} \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)$$

Dobbiamo ora determinare la relazione tra ϑ e φ cioè la funzione $\vartheta(\varphi)$.
Poichè

$$R\sin\varphi = L\sin\vartheta(\varphi) \quad \forall\varphi \quad (5.27)$$

derivando rispetto a φ otteniamo

$$R\cos\varphi = L\cos\vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi}$$

\Rightarrow (dal P.L.V. e (5.25))

$$\mu - mg\frac{R}{2}\cos\varphi = 0$$

Quindi:

Se $\mu > mg\frac{R}{2}$ non c'è equilibrio

Se $\mu < mg\frac{R}{2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2\mu}{mgR} = \lambda$
 \Rightarrow 2 soluzioni di equilibrio $-\pi/2 < \varphi_1 < 0$, $0 < \varphi_2 < \pi/2$ simmetriche rispetto a $\varphi = 0$

Se $\mu = mg\frac{R}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

(Notare, seguendo quanto detto nel Cap 4, che posso introdurre una energia potenziale generalizzata $V = -\mu\varphi + V_{peso}$, $V' = -\mu + mg\frac{R}{2}\cos\varphi$, $V'' = -mg\frac{R}{2}\sin\varphi$, quindi se $\mu < mg\frac{R}{2}$, φ_1 è stabile e φ_2 è instabile)

Per calcolare le reazioni usiamo le E.C.S. applicate a tutto il sistema, scegliendo O come polo per i momenti.

$$\underline{M^e(O)} = \underline{0} \Rightarrow (R\cos\varphi + L\cos\vartheta(\varphi))V_A - mg\left(R\cos\varphi + \frac{L}{2}\cos\vartheta(\varphi)\right) + \mu = 0 \quad (5.28)$$

$$\underline{R^e} = \underline{0} \Rightarrow H_O = 0 \quad (5.29)$$

$$V_O + V_A - Mg - mg = 0 \quad (5.30)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \text{se } \mu < mg\frac{R}{2} &\Rightarrow \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \frac{2\mu}{mgR} = \alpha > 0 \\ &\Rightarrow |\sin\varphi_1| = |\sin\varphi_2| = \sqrt{1 - \alpha^2} \\ &\Rightarrow (\text{dalla (5.27)}) \sin^2\vartheta(\varphi_1) = \sin^2\vartheta(\varphi_2) = \\ &\quad (1 - \alpha^2)\frac{R^2}{L^2} \\ &\Rightarrow \cos\vartheta(\varphi_1) = \cos\vartheta(\varphi_2) = \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}(1 - \alpha^2)} \\ \text{se } \mu = mg\frac{R}{2} &\Rightarrow \varphi = 0 \text{ e } \vartheta(\varphi) = 0 \end{aligned}$$

Sostituendo nelle equazioni (5.29) (5.30) si ricavano V_O e V_A all'equilibrio.

Notare che per $R = L$ si ha $\vartheta(\varphi) = \varphi$ e ovviamente i calcoli risultano semplificati.

Dispense di Meccanica Razionale

Prof. Maura Ughi

20 Marzo 2003

Contents

6	Sforzi Interni ad un Rigido	2
6.1	Introduzione	2
6.2	Archi Rigidi Piani	4
6.3	Archi Scarichi	16
6.4	Aste	20
6.5	Travature Indeformabili Piane	31
6.6	Risoluzione degli Esercizi	37
6.6.1	Risoluzione Esercizio 6.1	37
6.6.2	Risoluzione Esercizio 6.2	41
6.6.3	Risoluzione Esercizio 6.2	43
6.6.4	Risoluzione Esercizio 6.5	46

Chapter 6

Sforzi Interni ad un Rigido

6.1 Introduzione

Abbiamo visto che le E.C.S. assicurano l'equilibrio di un rigido se il sistema delle forze esterne è equilibrato, cioè ha risultante e momento risultante nulli. Vogliamo ora esaminare le forze interne al rigido in equilibrio, quelle che lo mantengono appunto rigido. A tale scopo sezioniamo il rigido con un piano π che lo divide in 2 parti, supponendo che sul piano non ci siano punti di applicazione delle forze esterne concentrate.

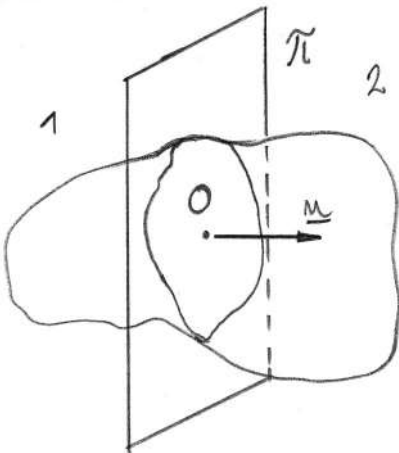


Figure 6.1:

Fissiamo un punto O del piano π , denotiamo con \underline{n} la normale al piano

diretta da 1 verso 2. La parte 1 del rigido è in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne applicate a punti della parte 1 e delle forze interne che agiscono attraverso la sezione. Se applichiamo le equazioni di equilibrio (E.C.S.) alla parte 1 avremo:

$$\begin{aligned}
 & \underline{R}_1 \quad (\text{risultante delle forze esterne agenti su parte 1}) \\
 + & \underline{R}^i \quad (\text{risultante delle forze interne della parte 2 sulla} \\
 & \text{parte 1}) = \underline{0}
 \end{aligned}$$

$$\underline{M}_1(O) + \underline{M}^i(O) = \underline{0} \tag{6.1}$$

(Con significato dei simboli analogo al precedente)

Si usa scomporre \underline{R}^i ed $\underline{M}^i(O)$ nel modo seguente

$$\begin{aligned}
 \underline{R}^i \cdot \underline{n} = N & & = \text{sforzo normale (} N > 0 \text{ trazione, } N < 0 \text{ com-} \\
 & & \text{pressione)} \\
 \underline{R}^i - N\underline{n} = \underline{T} & & = \text{sforzo di taglio} \\
 \underline{M}^i(O) \cdot \underline{n} = M_t(O) & & = \text{momento torcente} \\
 \underline{M}^i(O) - M_T \underline{n} = \underline{M}_f(O) & & = \text{momento flettente}
 \end{aligned}$$

Notiamo che lo sforzo normale ed il momento torcente sono degli scalari mentre lo sforzo di taglio ed il momento flettente sono dei vettori.

Esempio 6.1

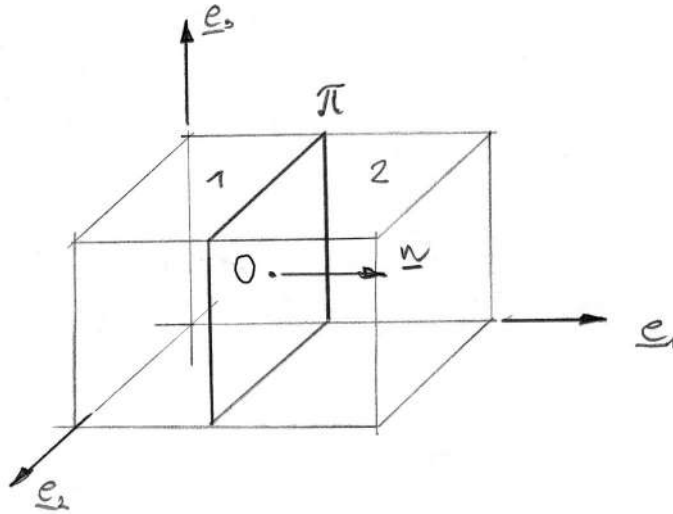


Figure 6.2:

Supponiamo che nel riferimento dato

$$\begin{aligned} \underline{R}_1 &= f \underline{e}_1 + 2f \underline{e}_2 \quad , \quad \underline{M}_1(O) = \mu \underline{e}_1 + 4\mu \underline{e}_3 \\ \Rightarrow \underline{R}_1 + N \underline{n} + \underline{T} &= \underline{0} \quad \Rightarrow \quad (\text{essendo } \underline{n} = \underline{e}_1) \\ & \quad \quad \quad N = -f \quad , \quad \underline{T} = -2f \underline{e}_2 \\ \underline{M}_1(O) + M_t \underline{n} + \underline{M}_f &= \underline{0} \quad \Rightarrow \quad M_t = -\mu \quad , \quad \underline{M}_f = -4\mu \underline{e}_3 \end{aligned}$$

6.2 Archi Rigidi Piani

Noi considereremo in dettaglio rigidi unidimensionali piani (geometricamente archi di curve), in questo caso la sezione viene fatta ortogonalmente alla curva e si riduce ad un punto, che denoteremo S da ora in poi.

Supporremo anche che le forze esterne appartengano tutte al piano dell'arco rigido, avremo allora che

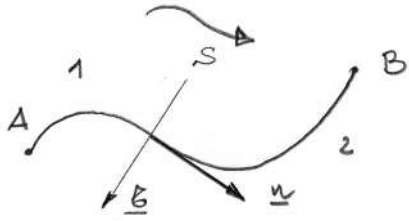


Figure 6.3:

1. la normale al piano di sezione è la tangente geometrica all'arco in S. Se poniamo l'attenzione nella parte 1 il verso di \underline{n} va da 1 verso 2 in modo che uno sforzo normale positivo corrisponda ad uno sforzo di trazione sulla parte 1 (e viceversa uno sforzo normale negativo corrisponde a compressione).

Precisiamo quanto detto (usando un po' di geometria) Supponiamo che la curva sia regolare e di avere la sua equazione parametrica in funzione della lunghezza d'arco s misurata ad esempio a partire da A

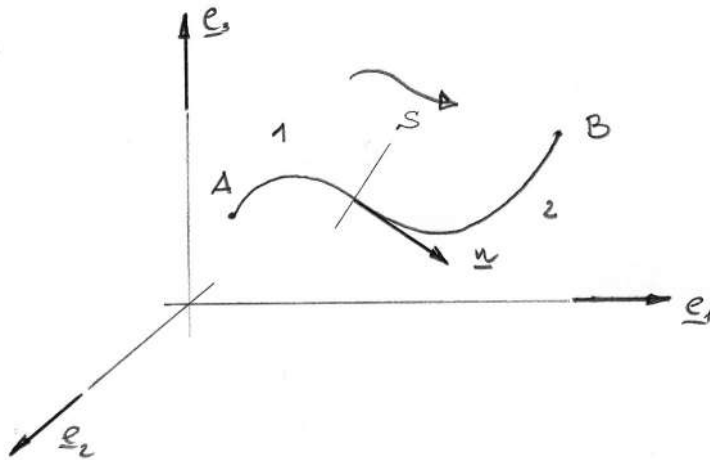


Figure 6.4:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{x}(s) & s \in [0, L] \\ \underline{x}_A &= \underline{x}(0) \\ \underline{x}_B &= \underline{x}(L) \end{aligned}$$

dove L è la lunghezza della curva.

Scegliendo di misurare gli archi a partire da A , abbiamo fissato un verso di percorrenza della curva, nel senso delle s crescenti (cioè abbiamo *orientato* la curva) Ha quindi senso dire che

$$\begin{aligned} \text{parte 1} &= \text{arco AS} = \text{parte che precede S} \\ \text{parte 2} &= \text{arco SB} = \text{parte che segue S} \end{aligned}$$

Dalla geometria avremo quindi che

$$\underline{n} = \frac{d\underline{x}(s)}{ds}$$

Nota: Facendo riferimento alla fig 6.4 abbiamo che la parte 1 è la parte a sinistra della sezione dal punto di vista della persona che guarda la figura. Notiamo che se avessimo invece scelto di misurare la lunghezza d'arco a partire da B verso A , avremmo fissato il verso di percorrenza da B verso A e quindi *la parte di arco che precede la sezione* sarebbe la parte SB , cioè la parte a destra di S dal punto di vista di chi guarda la figura. Quanto diremo in seguito vale per entrambe le scelte di orientazione dell'arco.

2. Le equazioni di bilancio per la parte 1, cioè le 6.1 con $O \equiv S$, si semplificano perchè, essendo le forze esterne appartenenti al piano dell'arco, cioè al piano $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ di fig 6.4, avremo che:

- \underline{R}^1 appartiene al piano $\underline{e}_1, \underline{e}_2 \Rightarrow \underline{T}$ = sforzo di taglio appartiene al piano $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ e dovendo essere ortogonale ad \underline{n} per definizione è sempre diretto come la normale geometrica alla curva in S .
- $\underline{M}^1(S)$ è ortogonale al piano della curva e quindi in particolare è ortogonale ad \underline{n}
- $M_t(S) = \text{momento torcente} = 0$ e
- $\underline{M}_f(S) = \underline{M}^i(S)$ ed è ortogonale al piano della curva (cioè ha sempre direzione \underline{e}_3 con riferimento alla figura 6.4).

Avremo dunque, in questo caso

Equazione di bilancio della parte 1

$$\begin{aligned} \underline{R}_1 + N \underline{n} + \underline{T} &= \underline{0} \\ \underline{M}^1(S) + \underline{M}_f(S) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Notiamo che di fatto in questo caso gli sforzi interni da calcolare sono tre, poichè il taglio ed il momento flettente hanno direzione fissata dalla geometria dell'arco ed il momento torcente è sempre nullo. Le equazioni (6.1) danno appunto tre equazioni scalari significative, precisamente due la prima e una la seconda, e permettono quindi di calcolare per ogni sezione S gli sforzi interni.

Insistiamo sul fatto che è importante conoscere gli sforzi interni per ogni sezione cioè in ogni punto dell'arco (proprio per vedere se questo è in grado di reggere ed anche per la successiva applicazione alle travi deformabili).

Il risultato della nostra analisi dovrà quindi essere una terna di FUNZIONI della sezione cioè

$$N(s) \quad , \quad \underline{T}(s) \quad , \quad \underline{M}_f(s) \quad \text{per} \quad s \in [0, L]$$

Come vedremo negli esempi queste funzioni possono anche essere costanti (sforzo interno uniforme) ma vanno sempre *pensate* come funzioni della sezione (primo errore tipico di molti studenti)

Un altro punto da evidenziare è che, per calcolare gli sforzi interni, bisogna conoscere esattamente la distribuzione delle forze esterne, in particolare distinguere tra le

- forze (o carichi) concentrati, applicate in un punto preciso dell'arco
- forze (o carichi) distribuiti, esempio tipico la forza peso

Per queste ultime si introduce il concetto di

forza specifica (di lunghezza) = $\underline{f}(s)$ (per il peso $\underline{f}(s) = \rho(s) \underline{g}$).

Daremo adesso un risultato importante sulle relazioni differenziali che esistono tra gli sforzi interni e la forza specifica di carico.

Teorema 6.1 *Relazioni differenziali per gli sforzi interni*

Supponiamo che in un intorno della sezione non vi siano carichi concentrati, che la forza specifica di carico sia regolare e che l'arco sia regolare, si ha allora che gli sforzi interni sono regolari e:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(N \underline{n} + \underline{T}) &= -\underline{f}(s) \\ \frac{d\underline{M}_f(s)}{ds} &= \underline{T}(s) \wedge \underline{n}(s) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dimostrazione:

Consideriamo un tratto di arco tra due sezioni S e S' individuate dalle lunghezze d'arco s e s + h rispettivamente (vedi figura 6.4).

Prendiamo $h > 0$, avendo definito:

$$\underline{R}^i = N \underline{n} + \underline{T} \text{ e } \underline{M}_f$$

in ogni sezione come gli sforzi che la parte successiva alla sezione esercita sulla parte precedente alla sezione (nel senso delle s crescenti, fissato all'inizio) avremo la situazione descritta in figura 6.5

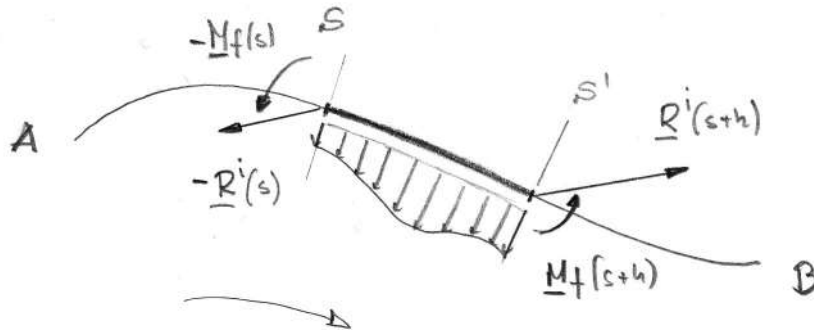


Figure 6.5:

Sul pezzo SS' agiscono le seguenti forze:

- forze esterne distribuite agenti su SS' , di forza specifica $\underline{f}(\xi)$, $\xi \in [s, s+h]$, esse hanno

$$\text{risultante} = \underline{R}^{SS'} = \int_s^{s+h} \underline{f}(\xi) d\xi$$

momento risultante rispetto ad S =

$$\underline{M}^{SS'}(s) = \int_s^{s+h} (\underline{x}(\xi) - \underline{x}(s)) \wedge \underline{f}(\xi) d\xi$$

- sforzi interni che la parte $S'B$ esercita su SS' tramite S' dati da
 risultante $\underline{R}^i(s+h)$
 momento risultante $\underline{M}_f(s+h)$
- sforzi interni che la parte AS esercita su SS' tramite la sezione S , essi sono opposti a quelli che la parte successiva ad S esercita su quella precedente ad S e sono quindi dati da:
 risultante $-\underline{R}^i(s)$
 momento risultante $-\underline{M}_f(s)$

Per l'equilibrio del pezzo SS' devono quindi valere le seguenti equazioni di bilancio:

Equazioni di bilancio di SS' ($h > 0$)

$$\begin{aligned} \underline{R}^{SS'} + \underline{R}^i(s+h) - \underline{R}^i(s) &= \underline{0} \\ \underline{M}^{SS'} + \underline{M}_f(s+h) - \underline{M}_f(s) + \\ + (\underline{x}(s+h) - \underline{x}(s)) \wedge \underline{R}^i(s+h) &= \underline{0} \end{aligned}$$

dove abbiamo scelto come polo per i momenti il punto S.

Dividendo per h otteniamo dalle precedenti i rapporti incrementali destri di \underline{R}^i e \underline{M}_f , precisamente

$$\begin{aligned} \frac{\underline{R}^i(s+h) - \underline{R}^i(s)}{h} &= -\frac{1}{h} \underline{R}^{SS'} \\ \frac{\underline{M}_f(s+h) - \underline{M}_f(s)}{h} &= -\frac{1}{h} \underline{M}^{SS'}(s) + \underline{R}^i(s+h) \wedge \frac{(\underline{x}(s+h) - \underline{x}(s))}{h} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Notiamo che nelle ipotesi fatte, precisamente forza specifica regolare, quindi limitata ($\|\underline{f}\| < F$) ed arco geometrico regolare in S, facendo tendere h a zero si ha:

•

$$\underline{R}^{SS'} = \int_s^{s+h} \underline{f}(\xi) d\xi \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

•

$$\frac{\underline{R}^{SS'}}{h} = \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \underline{f}(\xi) d\xi \xrightarrow{h \rightarrow 0} \underline{f}(s)$$

•

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\underline{M}^{SS'}(s)}{h} \right\| &= \frac{1}{h} \left\| \int_s^{s+h} (\underline{x}(\xi) - \underline{x}(s)) \wedge \underline{f}(\xi) d\xi \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|\underline{x}(\xi) - \underline{x}(s)\| \|\underline{f}\| d\xi \\ &\leq F h \end{aligned}$$

(essendo la distanza fra due punti dell'arco non superiore alla lunghezza dell'arco compreso cioè in formule

$$\|\underline{x}(\xi) - \underline{x}(s)\| \leq h$$

ed essendo $\|\underline{f}\| < F$)

$$\Rightarrow \frac{\underline{M}^{SS'}(s)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0}$$

•

$$\frac{\underline{x}(s+h) - \underline{x}(s)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{d\underline{x}}{ds} = \underline{n}(s)$$

(avendo supposto l'arco regolare in S)

Ripetendo il ragionamento con $h < 0$ e prendendo il limite per $h \rightarrow 0$ si ottengono subito le relazioni differenziali cercate (6.3) (Notare che dalla prima delle (6.4) si ha che se \underline{f} è limitata $\underline{R}^i(s)$ è continua in S).

Notiamo subito che se in S è applicato un carico concentrato oppure non è definito il vettore \underline{n} (come ad esempio in un punto angoloso della curva) non solo non valgono le relazioni differenziali trovate ma addirittura non sono definiti gli sforzi interni. Vedremo in seguito negli esempi che i punti di cui sopra sono in generale *punti di discontinuità* per \underline{N} e \underline{T} e *punti angolosi* per \underline{M}_f

Nota di approfondimento su carichi concentrati

Supponiamo ad esempio che ci sia un carico concentrato \underline{F}_C applicato in un punto della curva S_C in un intorno del quale la curva è regolare (cioè esiste il vettore \underline{n}). Dal teorema 6.1 abbiamo che \underline{R}^i e \underline{M}_f sono regolari per $s \neq s_C$ ($s_C =$ lunghezza arco AS_C). Scriviamo le equazioni di bilancio per un pezzo SS' con S che precede S_C e S' che lo segue. Tali equazioni sono identiche a quelle già scritte (6.4) purchè si aggiunga:

- a $\underline{R}^{SS'}$ la forza \underline{F}_C
- a $\underline{M}^{SS'}(s)$ il momento di \underline{F}_C rispetto ad S cioè $(\underline{x}(s_C) - \underline{x}(s)) \wedge \underline{F}_C$.

Avremo adesso che (vedi 6.4)

•

$$\underline{R}^{SS'} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \underline{F}_C \Rightarrow \underline{R}^i$$

ha un *salto* in S_C precisamente:

$$\begin{aligned} \underline{F}_C + [\underline{R}^i]_{s=s_C} &= \underline{0} \\ \text{dove } [\underline{R}^i]_{s=S_C} &= \text{salto di } \underline{R}^i \text{ attraverso } s = s_C \\ &= \lim_{s \rightarrow S_C^+} \underline{R}^i(s) - \lim_{s \rightarrow S_C^-} \underline{R}^i(s) \end{aligned} \tag{6.5}$$

•

$$\underline{M}^{SS'} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \underline{0} \Rightarrow$$

il momento flettente è continuo in $s = s_C$

•

$$s \neq s_C, \quad \frac{dM_f(s)}{ds} = \underline{T}(s) \wedge \underline{n} \Rightarrow$$

la derivata del momento flettente *salta* attraverso $s = s_C$ poichè in generale il taglio \underline{T} *salta* (quindi il momento flettente *non* è derivabile in $s = s_C$ perchè ha derivata destra e sinistra diverse).

Diagramma degli sforzi interni

Per rappresentare graficamente gli sforzi interni si possono seguire varie strade:

1. (Vedi [Tonti, esercizi] pag 52)

Si chiama diagramma di una azione interna un diagramma che indichi in ogni punto di un'asta l'intensità di una sollecitazione con il rispettivo segno. Si riportano dei segmenti perpendicolari all'asta proporzionali (in una opportuna scala) all'intensità dell'azione.

Ad esempio, riferendosi alla trave ad L dell'Esercizio (6.1) possiamo disegnare gli sforzi interni nel modo seguente:

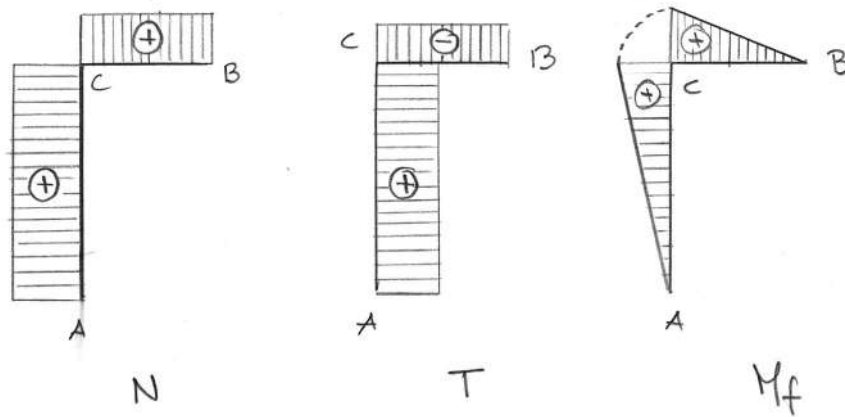


Figure 6.6:

La figura vuol dire che:

N è sempre di trazione ma *salta* nell'angolo C

T è diretto *a destra* in AC ad *sinistra* in CB e *salta* di intensità in C

M_f è sempre antiorario e varia di intensità proporzionalmente al disegno.

- disegnare i grafici degli sforzi interni come funzioni di s . Ora per lo sforzo normale, che è uno scalare, non ci sono problemi. Bisogna però capire come fare con T ed M_f che sono vettori di direzione assegnata geometricamente. È chiaro che basta definire in qualche modo il loro *verso positivo*.

Ad Esempio possiamo definire per ogni sezione una terna locale ($S, \underline{n}, \underline{e}_3, \underline{\tau}$) intrinseca all'arco, nel modo seguente

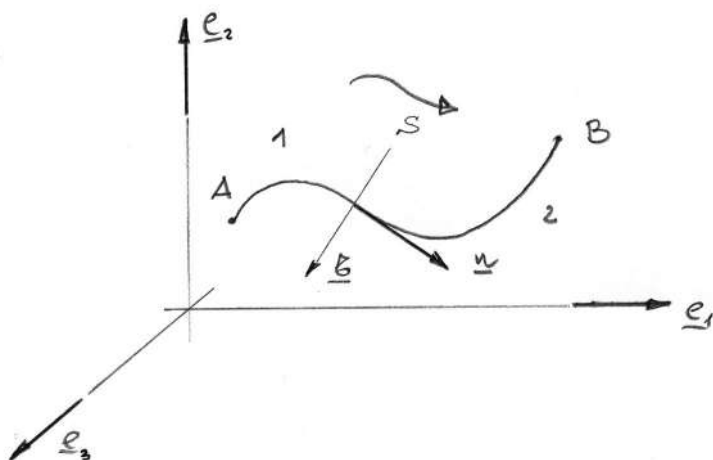


Figure 6.7:

$$\begin{aligned} \underline{n} &= \frac{dx}{ds} \\ \underline{\tau} &= \underline{n} \wedge \underline{e}_3 \\ (\Rightarrow \underline{\tau} \wedge \underline{n} &= \underline{e}_3) \\ \underline{e}_3 &\text{ di figura} \end{aligned}$$

Definiamo poi gli sforzi *scalari*

$$\begin{cases} T = \text{sforzo scalare di taglio} & : \underline{T} = T \underline{\tau} \\ M_f = \text{momento flettente scalare} & : \underline{M}_f = M_f \underline{e}_3 \end{cases} \quad (6.6)$$

Notiamo che, con riferimento alla figura 6.7

$$\begin{aligned} T > 0 &\Rightarrow \text{Taglio a destra di AS} \\ M_f > 0 &\Rightarrow \text{Momento flettente antiorario} \end{aligned}$$

A questo punto i risultati illustrati col metodo grafico precedente, vedi fig 6.6, per la trave ad L diventano i seguenti tre grafici:

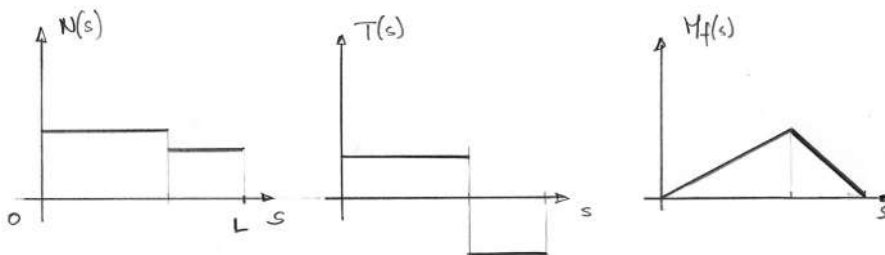


Figure 6.8:

Nota:

Ci siamo dilungati su questo punto perchè la definizione del taglio e del momento flettente *scalari* non è uguale in tutti i testi che trattano dell'argomento ed ha una ricaduta importante delle relazioni differenziali tra gli sforzi interni. Infatti con la scelta fatta prima (6.6) avremo:

$$\frac{dM_f}{ds} = \left(\frac{dM_f}{ds} \right) \underline{e}_3 = T \underline{\tau} \wedge \underline{n} = T \underline{e}_3 \Rightarrow \frac{dM_f(s)}{ds} = T(s) \quad (6.7)$$

cioè, a parole, *la derivata del momento flettente è uguale al taglio*

Cosa accade invece se scegliamo per il taglio il verso *positivo* opposto al precedente, cioè fissiamo una terna ($S; \underline{n}, \tilde{\underline{\tau}}, \underline{e}_3$)

$$\begin{aligned} \underline{n} &= \text{come prima} \\ \underline{e}_3 &= \text{come prima} \\ \tilde{\underline{\tau}} &= \underline{e}_3 \wedge \underline{n} \quad (\tilde{\underline{\tau}} = -\underline{\tau} \text{ e } \tilde{\underline{\tau}} \wedge \underline{n} = -\underline{e}_3) \end{aligned}$$

e definiamo gli sforzi *scalari* come:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &: \underline{T} = \tilde{T} \tilde{\underline{\tau}} \\ M_f &: \underline{M}_f = M_f \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Avremo allora, ovviamente:

$$\frac{dM_f}{ds} = \left(\frac{dM_f}{ds} \right) \underline{e}_3 = \tilde{T} \tilde{\tau} \wedge \underline{n} = -\tilde{T} \underline{e}_3 \Rightarrow \frac{dM_f}{ds} = -\tilde{T}$$

cioè, a parole, *la derivata del momento flettente è uguale all'opposto del taglio.*

Penso che l'ambiguità che si trova nei testi su questo argomento sia legata appunto alle diverse scelte *locali* di riferimento fatte per rappresentare *graficamente* gli sforzi interni. In queste note utilizzeremo sempre la scelta (6.6) (e quindi *devono* valere le (6.7))

6.3 Archi Scarichi

Un *arco scarico* è un arco rigido soggetto solo a due forze applicate all'estremità dell'arco, per avere equilibrio tali forze debbono essere una coppia di braccio nullo (vedi E.C.S.), quindi:

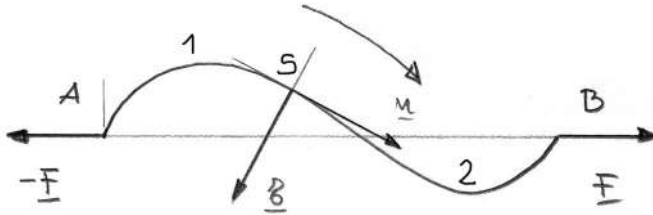


Figure 6.9:

avremo allora, per l'equilibrio della parte 1:

$$\begin{aligned} -\underline{F} + N \underline{n} + T \underline{\tau} &= 0 \\ -(\underline{x}_A - \underline{x}_S) \wedge \underline{F} \cdot \underline{e}_3 + M_f &= 0 \end{aligned}$$

Notiamo che per un arco *curvo* la direzione di \underline{n} e $\underline{\tau}$ rispetto alla retta AB (e quindi alla direzione di \underline{F}) varia e quindi N e T ed M_f *non* sono costanti. In particolare $|M_f| = \|\underline{F}\| \cdot \text{distanza di S dalla retta AB.}$

Nelle applicazioni si considera spesso un *segmento* rigido AB

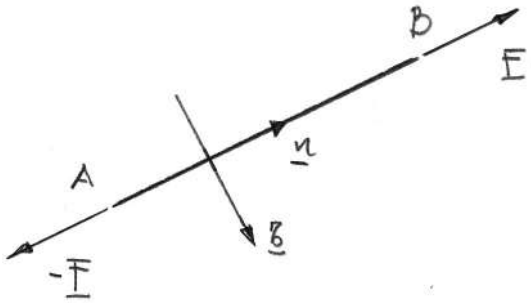


Figure 6.10:

⇒ per i *segmenti*:

$$T = M_f = 0$$

$$N \begin{cases} \|F\| > 0 & \text{trazione se } F \text{ è diretta verso l'esterno di AB} \\ & \text{(come in figura)} \\ -\|F\| < 0 & \text{compressione se } F \text{ è diretta verso l'interno di} \\ & \text{AB} \end{cases}$$

Ma ripetiamo che questo è un caso particolare di arco rigido.

Esercizio 6.1

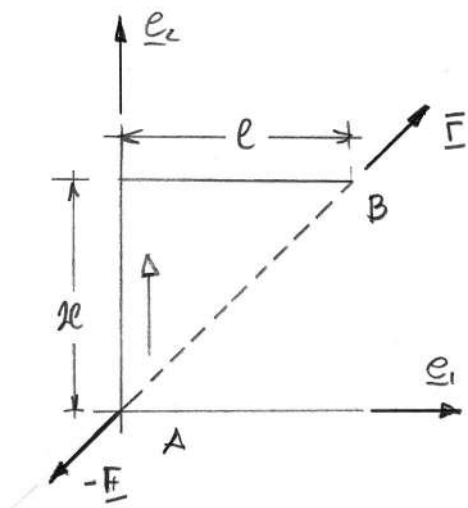


Figure 6.11:

Calcolare gli sforzi interni dell'arco AB di figura (6.11)

$$\underline{F} = F \text{ vers}(\underline{x}_B - \underline{x}_A) , F > 0$$

Esercizio 6.2

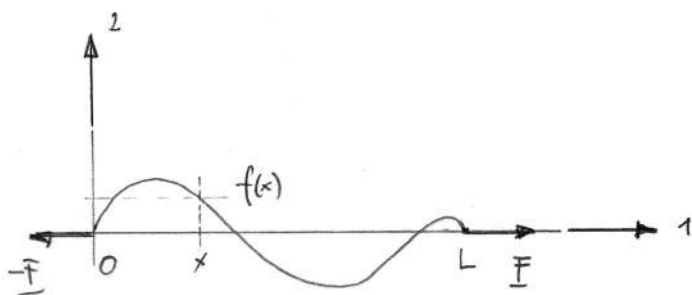


Figure 6.12:

Arco rigido dato dal grafico della funzione $f(x)$ come in figura (6.12)
calcolare gli sforzi interni in funzione di x .

Esercizio 6.3

Dato l'arco di figura,

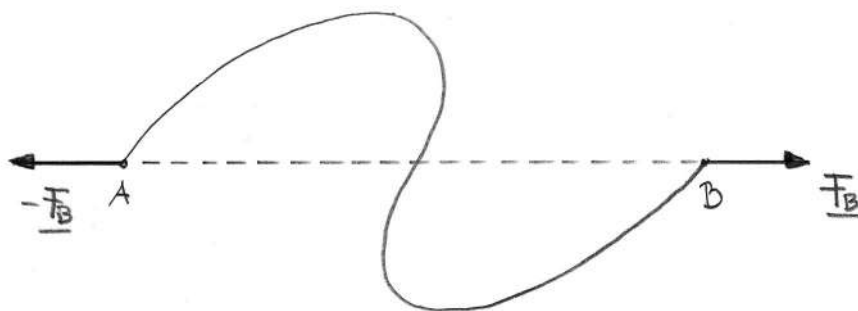


Figure 6.13:

determinare graficamente:

1. le parti sottoposte a trazione e quelle a compressione
2. i punti di minimo e di massimo dei valori assoluti degli sforzi $|N|$, $|T|$, $|M_f|$ ed i valori massimi degli stessi

6.4 Aste

Consideriamo ora un'asta rettilinea AB sottoposta sia a carico continuo che a carichi concentrati.

In questo caso la geometria si semplifica perchè la normale alla sezione \underline{n} ed il versore di taglio $\underline{\tau} = \underline{n} \wedge \underline{e}_3$ sono costanti per ogni sezione. con riferimento alla figura (6.14), dove *non* abbiamo disegnato i carichi esterni

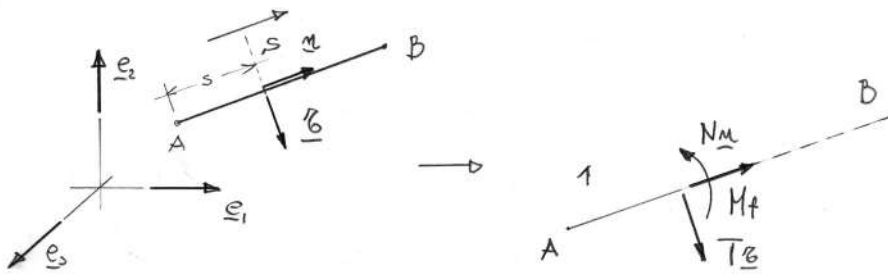


Figure 6.14:

avremo che, per ogni sezione *non* coincidente con i punti di applicazione dei carichi concentrati, la parte 1 è in equilibrio sotto l'azione di:

1. tutti i carichi concentrati agenti sulla parte 1 di risultante \underline{R}_1^C e momento risultante *rispetto ad S* $\underline{M}_1^C(s)$
2. la parte di carico distribuito agente sulla parte 1: detto $\underline{f}(s)$ lo sforzo specifico di carico distribuito avremo quindi

$$\underline{R}_1^d = \int_0^s \underline{f}(x) dx$$

$$\underline{M}_1^d = \int_0^s (x - s) \underline{n} \wedge \underline{f}(x) dx$$

(dove l'espressione del momento è ottenuta visualizzando il vettore $\underline{f}(x)$ applicato sul punto a distanza x da A e ricordando che per tale punto $\underline{x} - \underline{x}_S = x \underline{n} - s \underline{n} = (x - s) \underline{n}$)

3. gli sforzi interni:

$$\begin{aligned} N(s) \underline{n} + T(s) \underline{\tau}, \text{ applicati in } S \\ M_f(s) \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Il bilancio di questi 3 contributi permette di ricavare N e T dall'equazione vettoriale della risultante ed M_f dall'equazione dei momenti, *scegliendo la sezione S come polo* (altrimenti si dovrebbe tenere presente anche il momento del Taglio rispetto al polo scelto non in S).

Un altro modo per calcolare gli sforzi interni è quello di utilizzare le relazioni differenziali trovate (vedi 6.2)). Con le scelte fatte per $\underline{\tau}$, e ricordando oltre alla (6.7) il fatto che \underline{n} e $\underline{\tau}$ sono ora costanti rispetto ad s avremo che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (N \underline{n} + T \underline{\tau}) &= \frac{dN(s)}{ds} \underline{n} + \frac{dT(s)}{ds} \underline{\tau} = -\underline{f}(s) \\ \Rightarrow \frac{dN(s)}{ds} &= -\underline{f}(s) \cdot \underline{n} \\ \frac{dT(s)}{ds} &= -\underline{f}(s) \cdot \underline{\tau} \\ \frac{dM_f(s)}{ds} &= T(s) \end{aligned} \tag{6.8}$$

Avremo ad esempio:

$$M_f(s) - M_f(0) = \int_0^s T(x) dx ,$$

cioè $M_f(s)$ è la *funzione integrale* di T , nel senso dell'Analisi, aumentata del valore $M_f(0)$.

Prima di passare ad esempi ed esercizi vari, ci permettiamo alcune considerazioni. Nonostante questo sia un problema *semplice* da risolvere in teoria, perchè basta solo *bilanciare tutte* le forze agenti su una data porzione di rigido, la sua applicazione ad esempi concreti, anche se *addomesticati* per semplificarli, da parte degli studenti è spesso piena di errori.

Segnaliamo qui alcuni fra i più comuni:

- pensare che basti fare una sezione a caso, mentre in generale gli sforzi variano con la sezione (anche per questo è utile disegnare i diagrammi degli sforzi)
- pensare alle forze distribuite come se fossero concentrate, nel caso tipico del peso, pensarlo concentrato nel centro di massa (e questo contro ogni evidenza pratica!)
- pensare che tutti i carichi distribuiti lo siano uniformemente (cioè che la forza specifica di carico sia sempre costante)
- disegnare diagrammi del taglio e del momento flettente tra loro incompatibili, cioè non tener conto della relazione differenziale tra momento flettente e taglio (6.7) (quindi ripassare un po' Analisi 1)

Esempio 6.2 (*Trave con carico di taglio distribuito*)

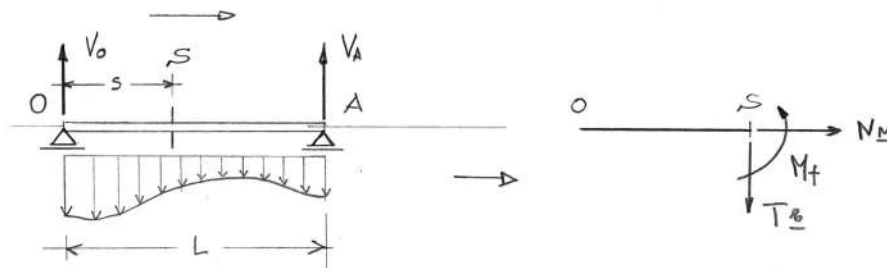


Figure 6.15:

Data un'asta vincolata con due appoggi orizzontali alle estremità e soggetta ad un carico verticale di densità variabile, quindi forza specifica

$$\underline{f}(s) = \rho(s) \underline{g}$$

vedi figura (6.15), calcolare:

1. la posizione del centro di massa G (s_G)
2. le reazioni esterne V_O e V_A
3. gli sforzi interni in funzione di s

Daremo prima le formule generali e vedremo poi cosa succede specificando $\rho(s)$, lo svolgimento è pensato per una programmazione del problema, Il verso positivo dei momenti è, al solito, antiorario per chi guarda la figura

1.

$$s_G = \frac{1}{M} \int_0^L s\rho(s)ds, \quad M = \int_0^L \rho(s)ds$$

2.

$$\underline{M}^e(A) = \underline{0} \Rightarrow V_O L = Mg(L - s_G) \Rightarrow V_O = Mg \left(1 - \frac{s_G}{L}\right)$$

$$\begin{aligned} \underline{R}^e = \underline{0} &\Rightarrow V_O + V_A - Mg = 0 \\ &\Rightarrow V_A = Mg - V_O \end{aligned}$$

3. Per ogni $0 < s < L$, $\underline{\tau} = \text{vers } g$, $\underline{n} = \text{vers}(\underline{x}_A - \underline{x}_O)$ quindi

$$N \underline{n} + T \underline{\tau} - V_O \underline{\tau} + m(s)g \underline{\tau} = \underline{0}$$

con $m(s) = \int_0^s \rho(x)dx = \text{massa del tratto OS}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow N &= 0 \\ T &= V_O - m(s)g \end{aligned}$$

Passando al momento flettente si ha che:

essendo $\frac{dM_f}{dx} = T$ ed $M_f \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow$

$$M_f(s) = \int_0^s T(x)dx$$

Notare che

$$\frac{dT}{ds} = -\rho(s)g$$

come previsto da (6.8)

Facciamo alcuni esempi:

- densità costante: $\rho = \text{costante} = \frac{M}{L} \Rightarrow V_O = Mg/2 = V_A$

$$T(s) = Mg \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{L} \right), \quad M_f(s) = \frac{Mg}{2} s \left(1 - \frac{s}{L} \right)$$

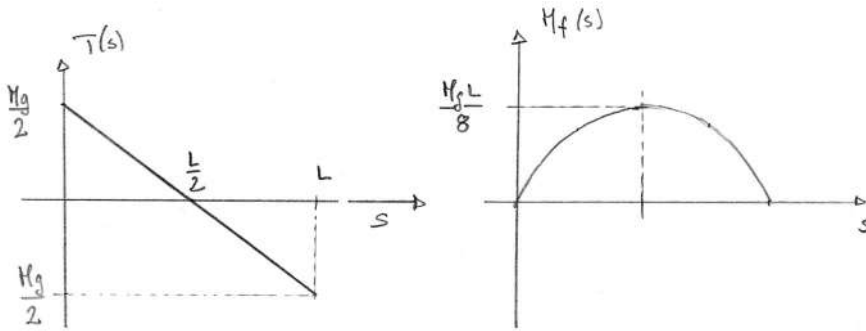


Figure 6.16:

- densità:

$$\rho(s) \begin{cases} 0 & 0 < s < \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ n \frac{M}{L} & \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) < s < \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ 0 & \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) < s < L \end{cases}$$

in grafico, ($n > 1$):

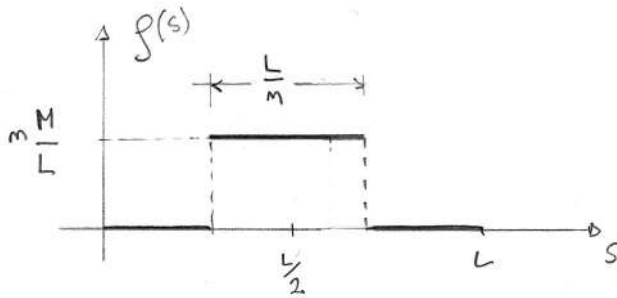


Figure 6.17:

Avremo che la massa totale, il centro di massa e V_O rimangono identici ai precedenti mentre $T(s)$ ed $M_f(s)$ risultano diversi. Infatti la massa del pezzo OA è data in questo caso da:

$$m(s) \begin{cases} 0 & 0 < s < \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ n \frac{M}{L} \left[s - \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] & \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < s < \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ M & \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) < s < L \end{cases}$$

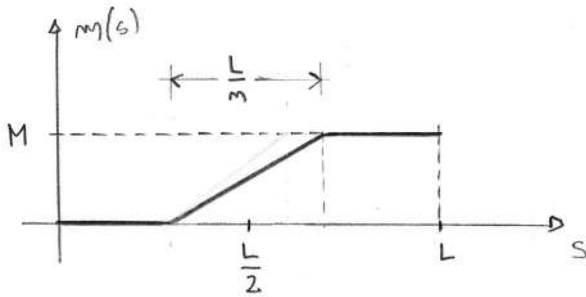


Figure 6.18:

Avremo quindi:

$$T(s) \begin{cases} \frac{Mg}{2} & 0 < s < \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ Mg n \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{L} \right) & \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < s < \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ -\frac{Mg}{2} & \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) < s < L \end{cases}$$

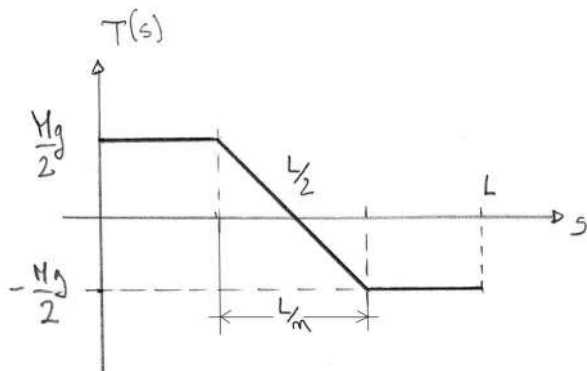


Figure 6.19:

$$M_f(s) \begin{cases} \frac{Mg}{2}s & 0 < s < \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ Mg n \left(\frac{s}{2} - \frac{s^2}{2L} \right) + a & \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < s < \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ -\frac{Mg}{2}(L - s) & \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) < s < L \end{cases}$$

dove la costante a (tale che M_f è continua) è data dalla formula seguente

$$a = \frac{MgL}{4} \left(1 - \frac{n}{2} - \frac{1}{2n} \right)$$

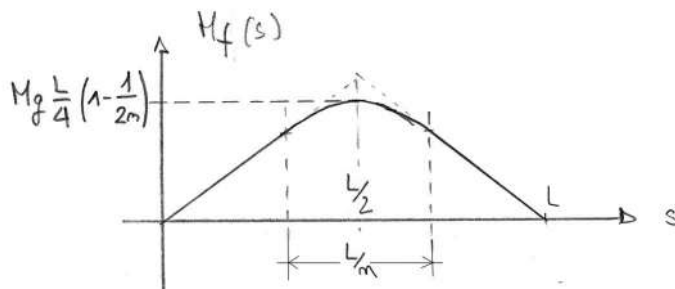


Figure 6.20:

Notare Bene il fatto che gli sforzi interni sono diversi tra loro nei due casi appena descritti.

Esercizio 6.4

Calcolare gli sforzi interni nell'esempio 6.2 prendendo come densità:

1.

$$\rho(s) = 6 \frac{M}{L} \frac{s}{L} \left(1 - \frac{s}{L}\right)$$

2.

$$\rho(s) = 3 \frac{M}{L} \left(\frac{s}{L}\right)^2$$

Esempio 6.3

Data un'asta vincolata come nell'Esempio precedente, supponiamo ora che non ci siano carichi distribuiti ma sia presente un carico concentrato in $L/2$ e pari a Mg (per avere in mente un caso concreto supponiamo che l'asta sia *leggera* e che a metà di essa sia posta una massa, molto più grande di quella totale dell'asta, cioè trascuriamo il peso dell'asta nei confronti del carico)

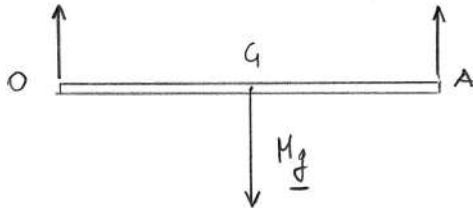


Figure 6.21:

Le reazioni esterne V_O e V_A sono identiche al caso in cui $\rho = M/L$ e sono date quindi da:

$$V_O = V_A = \frac{Mg}{2}$$

In questo caso avremo però che:

- per ogni sezione $S \in OG$ la situazione delle forze è la seguente

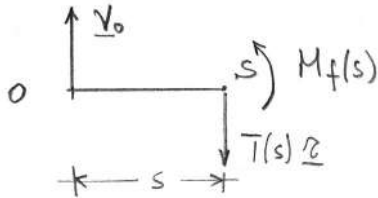


Figure 6.22:

- per ogni sezione $S \in GA$ abbiamo invece

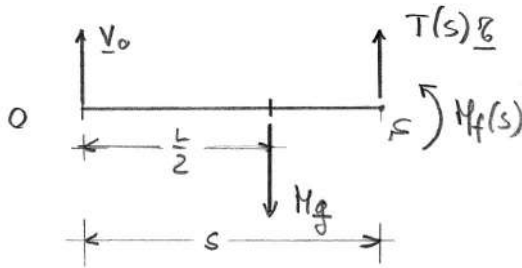


Figure 6.23:

Avremo quindi:

$$N(s) \equiv 0 \quad s \in [0, L]$$

$$T(s) \begin{cases} \frac{Mg}{2} & 0 \leq s < \frac{L}{2} \\ -\frac{Mg}{2} & \frac{L}{2} < s \leq L \end{cases}$$

Per il calcolo del momento flettente possiamo seguire due strade, che si *controllano* a vicenda: utilizzare le relazioni differenziali o calcolare direttamente il momento totale del pezzo OS (*rispetto ad S* vedi equazioni di bilancio). Otteniamo

$$M_f(s) \begin{cases} \frac{Mg}{2}s & 0 < s < \frac{L}{2} \\ \frac{Mg}{2}s - Mg \left(s - \frac{L}{2} \right) & \frac{L}{2} < s < L \end{cases}$$

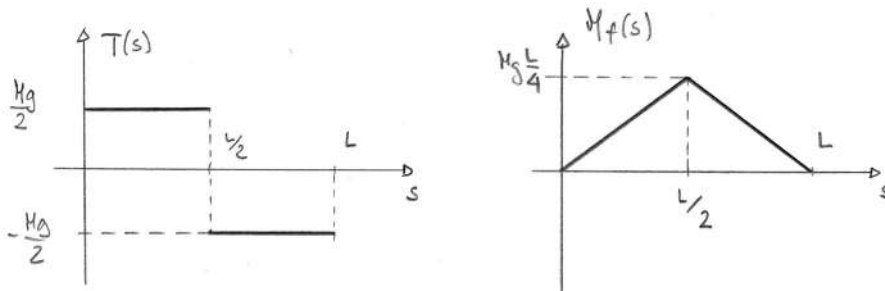


Figure 6.24:

Notare bene che:

- T e $\frac{dM_f}{ds}$ sono discontinui in $L/2$
- Il momento flettente del carico concentrato è sempre maggiore di quello di un uguale carico distribuito uniformemente, su tutta l'asta o su una sua parte (vedi i casi particolari dell'esempio 6.2) In particolare controllate il massimo del momento flettente!
- Detto un po' a soldoni, gli sforzi interni per il carico concentrato sono il limite per $n \rightarrow \infty$ di quelli dovuti ad un carico distribuito simmetricamente intorno a G e di pari intensità totale (caso particolare 2 dell'esempio 6.2). Quest'idea si può precisare introducendo il concetto di *distribuzione*, in particolare la distribuzione δ di Dirac (concentrata in $L/2$ e di intensità Mg). Per fare i calcoli col programma Maple abbiamo usato proprio questo concetto.

Esercizio 6.5

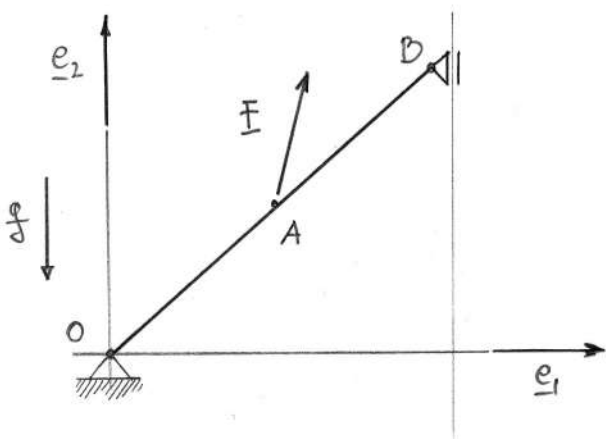


Figure 6.25:

piano verticale, asta OB di massa M e densità data, $\overline{OB} = L$, $\overline{AB} = L$, $0 < a < 1$

1. Calcolare le reazioni in B
2. Determinare gli sforzi interni all'asta, per ogni sezione

Notare sempre che il peso è una forza distribuita su tutti i punti dell'asta, quindi quando si calcolano gli sforzi interni *non* si può considerare il peso totale applicato nel centro di massa dell'asta. Per evidenziare la differenza, considerare il caso in cui si suppone che l'asta OB abbia massa trascurabile e la forza F applicata in A sia data da Mg .

6.5 Travature Indeformabili Piane

Ricordiamo che una travatura indeformabile è un tipo particolare di sistema rigido, supponendo che sia in equilibrio vogliamo determinare gli sforzi interni alle aste che compongono la struttura. In generale dovremmo per prima cosa determinare le azioni all'estremità di ogni asta dovute alla presenza del resto della travatura, potremo poi procedere, come indicato nel paragrafo 4 a calcolare gli sforzi interni all'asta in esame.

Notiamo in generale che:

Se la travatura ha m aste ed N nodi:

per ogni asta si hanno 2 incognite vettoriali (le due forze agenti alle estremità dell'asta) \Rightarrow in totale $4m$ incognite

Le equazioni da usare, spezzando il sistema nelle sue componenti, cioè nodi ed aste, sono:

- per ogni asta le E.C.S. $\Rightarrow 3m$ equazioni
- per ogni nodo l'annullarsi della forza totale sul nodo $\Rightarrow 2N$ equazioni

Di queste $3m + 2N$ equazioni, 3 saranno automaticamente soddisfatte perchè essendo la travatura in equilibrio valgono le E.C.S. per tutto il sistema. Avremo quindi in totale $3m + 2N - 3$ equazioni indipendenti. potremo quindi calcolare in modo *unico* le $4m$ incognite solo se

$$3m + 2N - 3 = 4m \Leftrightarrow m = 2N - 3 = \text{travatura strettamente indeformabile}$$

Se la travatura è ad aste sovrabbondanti: incognite $4m >$ equazioni $3m + 2N - 3$ avremo quindi infinite soluzioni, cioè il problema è *staticamente indeterminato* (almeno finchè manteniamo l'ipotesi che le aste siano rigide).

Notiamo che l'ordine di grandezza del problema è elevato essendo appunto $4m$.

Se la travatura è soggetta a forze esterne applicate *solo ai nodi*, poichè le singole aste sono scariche, le forze alle loro estremità devono essere coppie di braccio nullo (vedi par 2 di questo capitolo)

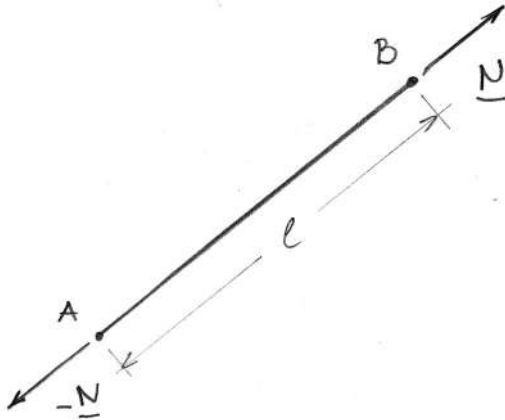


Figure 6.26:

$$\underline{N} = N \text{ vers } (\underline{x}_B - \underline{x}_A)$$

Ricordiamo che questo si determina applicando le E.C.S. all'asta AB. Avremo quindi in questo caso:

Travature ad aste scariche

- Per ogni asta: una incognita (la forza normale N) $\Rightarrow m$ incognite
- per ogni nodo: 2 equazioni scalari di equilibrio(avendo già usato le E.C.S. per ogni singola asta) $\Rightarrow 2N$ equazioni scalari, di cui 3 automaticamente soddisfatte (le E.C.S. per tutta la travatura)
- $\Rightarrow 2N - 3$ equazioni indipendenti

L'ordine di grandezza del problema è comunque ridotto da $4m$ a m .

Notiamo che c'è un metodo standard per ricondursi dalla situazione generale a quella ad aste scariche (vedi per approfondimenti [LCA])

Non intendiamo approfondire qui l'analisi delle travature, per le cui soluzioni sono stati elaborati nel passato metodi interessanti sia grafici che analitici, ora in parte in disuso per l'adozione di pacchetti software pronti, per chi vuole approfondire l'argomento citiamo ([FDRM] [LCA], St. Grafica). Ci limiteremo a fare un esempio di risoluzione di una travatura di 3 aste scariche.

Esempio 6.4

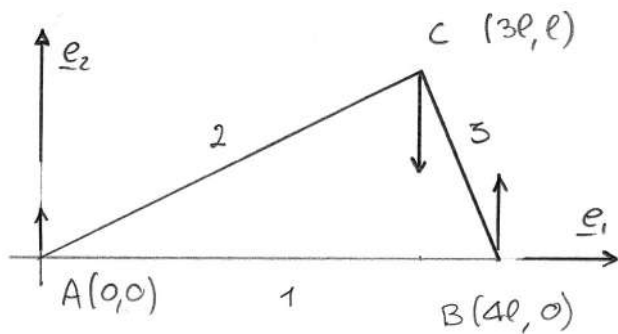


Figure 6.27:

$$\begin{aligned} \underline{F}_A &= \frac{1}{4}F \underline{e}_2 \\ \underline{F}_B &= \frac{3}{4}F \underline{e}_2 \\ \underline{F}_C &= -F \underline{e}_2 \end{aligned}$$

Incognite: N_1 , N_2 , N_3 sforzi normali nelle 3 aste

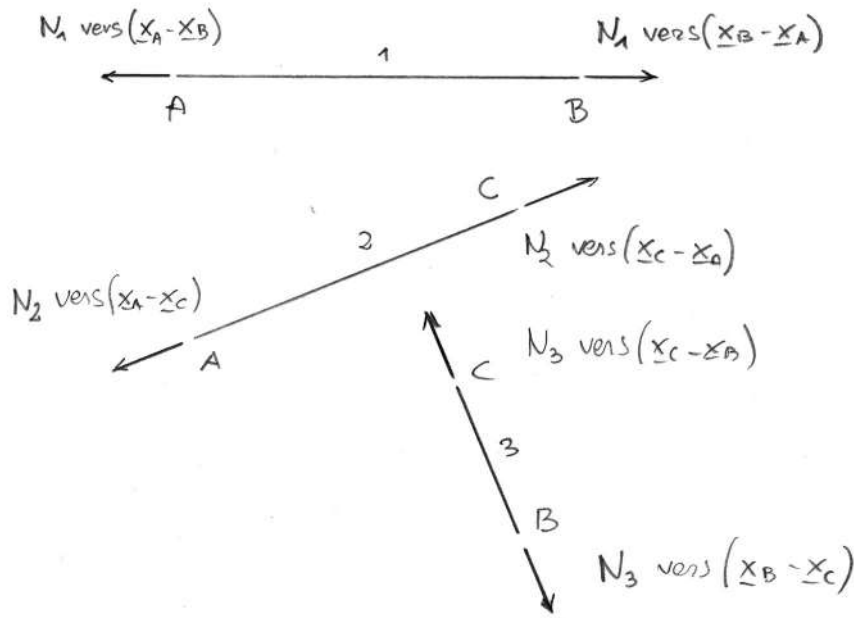


Figure 6.28:

Equazioni:

Nodo A $\underline{F}_A - N_1 \text{vers}(\underline{x}_A - \underline{x}_B) - N_2 \text{vers}(\underline{x}_A - \underline{x}_C) = 0$
 (poichè per principio di azione e reazione se il nodo A esercita sull'asta 1 la forza $N_1 \text{vers}(\underline{x}_A - \underline{x}_B)$ l'asta 1 esercita sul nodo A una forza uguale e contraria appunto $-N_1 \text{vers}(\underline{x}_A - \underline{x}_B)$)
 $\Rightarrow \underline{F}_A = N_1 \text{vers}(\underline{x}_A - \underline{x}_B) + N_2 \text{vers}(\underline{x}_A - \underline{x}_C)$

Nodo B: in modo analogo si ha

$$\underline{F}_B = N_1 \text{vers}(\underline{x}_B - \underline{x}_A) + N_3 \text{vers}(\underline{x}_B - \underline{x}_C)$$

Nodo C:

$$\underline{F}_C = N_2 \text{vers}(\underline{x}_C - \underline{x}_A) + N_3 \text{vers}(\underline{x}_C - \underline{x}_B)$$

Nota bene: 6 equazioni scalari di cui 3 indipendenti. Avremo quindi, da

un punto di vista *grafico - geometrico*

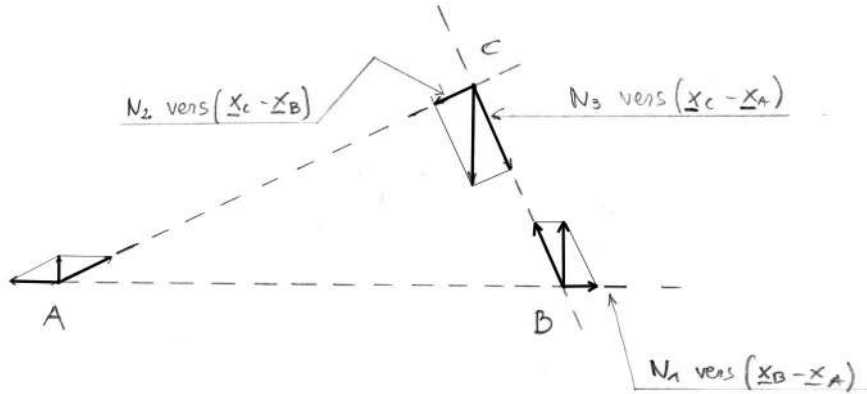


Figure 6.29:

Da un punto di vista analitico:

Nodo A:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}F e_2 &= -N_1 e_1 - N_2 \frac{3l e_1 + l e_2}{l\sqrt{10}} \\ \Rightarrow \begin{cases} 0 &= -N_1 - N_2 \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{F}{4} &= -\frac{N_2}{\sqrt{10}} \end{cases} \\ \Rightarrow N_2 &= -\frac{\sqrt{10}}{4}F, \quad N_1 = -N_2 \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{4}F \end{aligned}$$

(Notare che l'asta 2 è soggetta a compressione a l'asta 1 a trazione)

Nodo B:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}F e_2 &= N_1 e_1 + N_3 \frac{l e_1 - l e_2}{l\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \begin{cases} 0 &= N_1 + \frac{N_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{4}F &= -\frac{N_3}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \Rightarrow N_3 &= -\frac{3}{4}\sqrt{2}F \end{aligned}$$

(dalla seconda equazione)

la prima equazione è di verifica dei valori già trovati:

$$0 = \frac{3}{4}F + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{3}{4}\sqrt{2}F \right)$$

resta quindi verificata

Nodo C: è di sola verifica per i valori già trovati

$$\begin{aligned} -F e_2 &= -\frac{\sqrt{10}}{4}F \left(\frac{3 e_1 + e_2}{\sqrt{10}} \right) \\ &= -\frac{3}{4}\sqrt{2}F \left(\frac{-e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

resta quindi verificata

Riassumendo:

$$N_1 = \frac{3}{4}F, \quad N_2 = -\frac{\sqrt{10}}{4}F, \quad N_3 = -\frac{3}{4}\sqrt{2}F$$

Il metodo *grafico* è detto *Metodo dei nodi* per approfondimenti vedere [F.DRM] e [St.Graf.]

6.6 Risoluzione degli Esercizi

6.6.1 Risoluzione Esercizio 6.1

Individuiamo la sezione con la lunghezza d'arco s a partire da A.

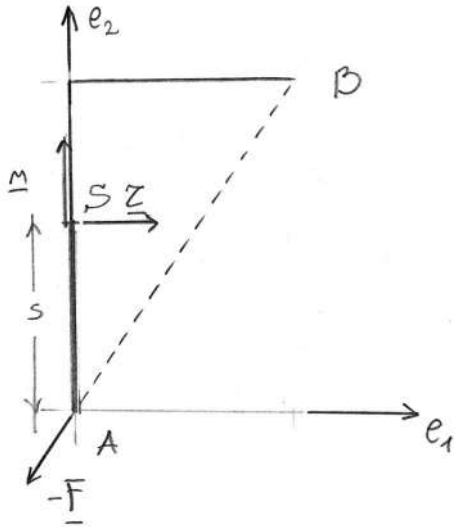


Figure 6.30:

Per $0 < s < 2l$

$$\begin{aligned} \underline{n} &= e_2 \quad \underline{T} = e_1 \\ \Rightarrow -\underline{F} + N \underline{e}_2 + T \underline{e}_1 &= \underline{0} \\ \Rightarrow (\text{essendo } \underline{F} &= F \text{ vers}(\underline{x}_B - \underline{x}_A) = \frac{F}{\sqrt{5}}(e_1 + 2e_2)) \\ N &= \frac{2}{\sqrt{5}}F, \quad T = \frac{1}{\sqrt{5}}F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_f + (\underline{x}_A - \underline{x}_S) \wedge -\underline{F} \cdot e_3 &= 0 \\ \Rightarrow M_f + s e_2 \wedge \frac{F}{\sqrt{5}}(e_1 + 2e_2) \cdot e_3 &= \\ = M_f - \frac{F}{\sqrt{5}}s &= 0 \Rightarrow M_f = \frac{F}{\sqrt{5}}s, \end{aligned}$$

verifica

$$\frac{dM_f}{ds} = \frac{F}{\sqrt{5}} = T \quad \text{ok}$$

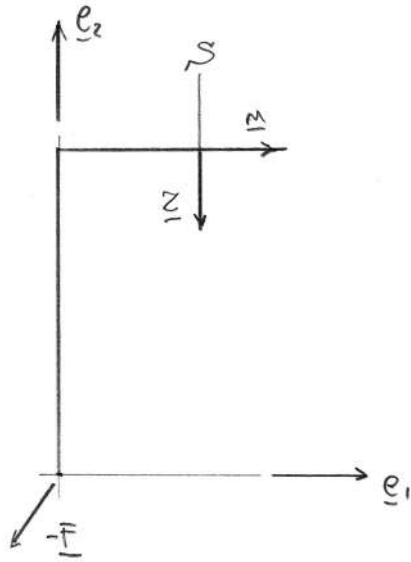


Figure 6.31:

Per $2l < s < 3l$

$$\begin{aligned} \underline{n} &= \underline{e}_1 & \underline{\tau} &= -\underline{e}_2 \\ \Rightarrow & & & -\underline{F} + N \underline{e}_1 - T \underline{e}_2 = \underline{0} \\ \Rightarrow & & & N = \frac{F}{\sqrt{5}}, T = -\frac{2}{\sqrt{5}}F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_f + (\underline{x}_A - \underline{x}_S) \wedge -\underline{F} \cdot \underline{e}_3 &= 0 \\ \Rightarrow M_f + [(s - 2l) \underline{e}_1 + 2l \underline{e}_2] \wedge \frac{F}{\sqrt{5}} (\underline{e}_1 + 2 \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3 & \\ = M_f + \frac{F}{\sqrt{5}} [2(s - 2l) - 2l] &= \\ = M_f + 2\frac{F}{\sqrt{5}} (s - 3l) &= 0 \\ \Rightarrow M_f = -\frac{2}{\sqrt{5}}F (s - 3l) & \end{aligned}$$

verifica $\frac{dM_f}{ds} = -\frac{2}{\sqrt{5}}F = T \text{ OK}$

Notare che si può ottenere M_f utilizzando la relazione differenziale.

$$\frac{dM_f}{ds} = T$$

Riassumendo avremo:

$$N(s) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}}F & \text{per } 0 < s < 2l \\ \frac{1}{\sqrt{5}}F & \text{per } 2l < s < 3l \end{cases}$$

$$T(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}F & \text{per } 0 < s < 2l \\ -\frac{2}{\sqrt{5}}F & \text{per } 2l < s < 3l \end{cases}$$

$$M_f(s) = \begin{cases} \frac{F}{\sqrt{5}}s & \text{per } 0 < s < 2l \\ \frac{2}{\sqrt{5}}F(3l - s) & \text{per } 2l < s < 3l \end{cases}$$

Per diagrammi vedere fig (6.6) (6.8), precisata sotto:

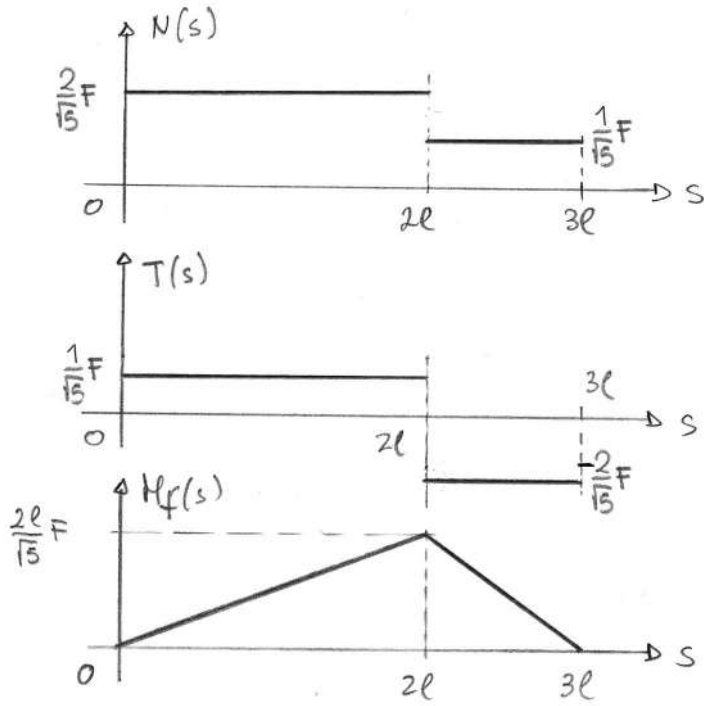


Figure 6.32:

6.6.2 Risoluzione Esercizio 6.2

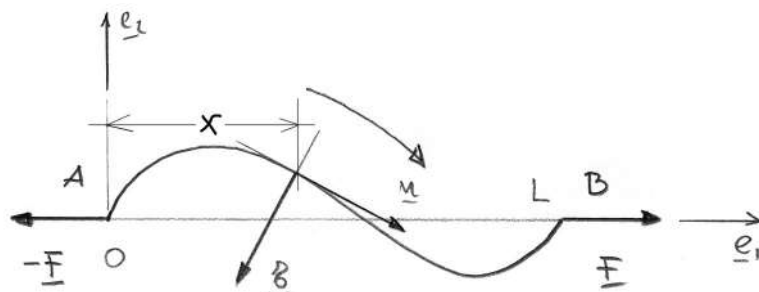


Figure 6.33:

$$\underline{F} = F \underline{e}_1$$

L'arco è dato in coordinate da $\{ x, y : x \in [0, L], y = f(x) \}$

$\underline{n}(x)$ = versore tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$

$$= \frac{\underline{e}_1 + f' \underline{e}_2}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

$$\begin{aligned} \underline{\tau} &= \underline{n} \wedge \underline{e}_3 = \frac{\underline{e}_1 + f' \underline{e}_2}{\sqrt{1 + f'^2}} \wedge \underline{e}_3 \\ &= \frac{f' \underline{e}_1 - \underline{e}_2}{\sqrt{1 + f'^2}} \end{aligned}$$

Il bilancio delle forze per l'arco OS dà:

$$-\underline{F} + N \underline{n} + T \underline{\tau} = \underline{0}$$

$$M_f(x) + (\underline{x}_O - \underline{x}_A) \wedge -\underline{F} \cdot \underline{e}_3 = 0$$

\Rightarrow per $0 \leq x \leq L$ si ha

$$\begin{aligned}
N(x) &= \underline{F} \cdot \underline{n} = \frac{F}{\sqrt{1+f'^2}} \\
T(x) &= \underline{F} \cdot \underline{\tau} = \frac{F f'}{\sqrt{1+f'^2}} \\
M_f(x) &= (\underline{x}_O - \underline{x}_S) \wedge \underline{F} \cdot \underline{e}_3 = -(x \underline{e}_1 + f(x) \underline{e}_2) \wedge F \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3 \\
&= f(x) F
\end{aligned}$$

(La formula per M_f si può ricavare direttamente essendo $f(x)$ il braccio rispetto ad S della forza $-\underline{F}$ applicata in O)

Nota: Poichè nell'esercizio il parametro è x e *non* la lunghezza d'arco s , *non* è vero che

$$\frac{dM_f(x)}{dx} = T(x)$$

Verifichiamo che

$$\frac{dM_f(x(s))}{ds} = T(x(s))$$

con s lunghezza d'arco, infatti:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} M_f(x(s)) &= \frac{dM_f(x)}{dx} \frac{dx}{ds} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \frac{dM_f}{dx} = \frac{f' F}{\sqrt{1+f'^2}} = T(x(s)).
\end{aligned}$$

Ad esempio se $f(x) = x(x - L) \Rightarrow f' = 2x - L$

$$\Rightarrow \sqrt{1+f'^2} = \sqrt{1+(2x-L)^2}$$

$$\Rightarrow N(x) = \frac{F}{\sqrt{1 + (2x - L)^2}}, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$T(x) = (2x - L) \frac{F}{\sqrt{1 + (2x - L)^2}}$$

$$M_f(x) = Fx(x - L)$$

6.6.3 Risoluzione Esercizio 6.2

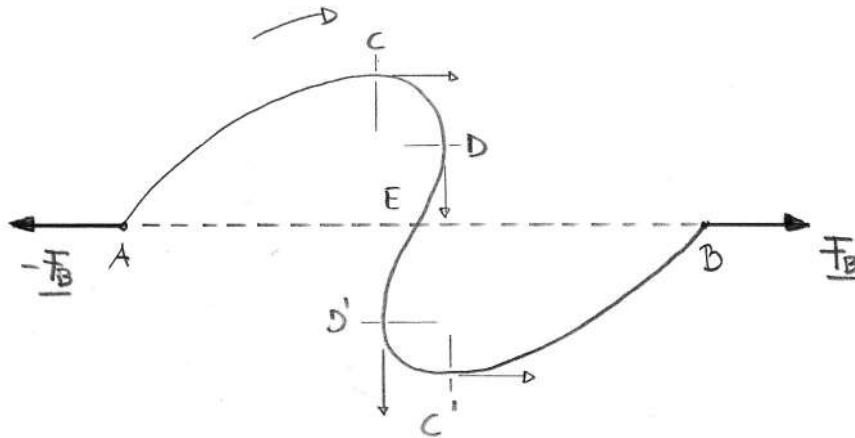


Figure 6.34:

Seguendo l'andamento (vettoriale) di \underline{n} lungo l'arco si ha che:

1. AD e D'B sono sottoposti a trazione DD' è sottoposto a compressione
2. $|N|$ è nullo in D e D' e massimo in C e C' (in cui ovviamente vale $\|\underline{F}_B\|$)
 $|T|$ è nullo in C e C' e massimo in D e D', pari a $\|\underline{F}_B\|$
 $|M_f|$ è nullo in E (oltre che in A ed in B), ha due massimi relativi in C e C' e massimo assoluto in C' pari a $\|\underline{F}_B\| \cdot$ (distanza di C' dalla retta AB).

Risoluzione dell'Esercizio 6.3

Caso I

$$\rho(s) = 6 \frac{M}{L} \frac{s}{L} \left(1 - \frac{s}{L}\right)$$

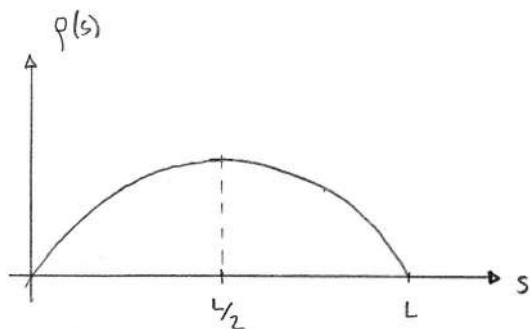


Figure 6.35:

Notare che essendo la densità simmetrica rispetto ad $L/2$ si ha subito che $s_G = L/2$, calcolando l'integrale di ρ su $[0, L]$ troviamo che

$$M = \int_0^L \rho(s) ds = \text{massa totale}$$

Quindi le reazioni esterne sono identiche al caso omogeneo di densità M/L , cioè

$$V_O = V_A = Mg/2 .$$

Gli sforzi interni invece cambiano, infatti

$$\begin{aligned} m(s) &= \int_0^s \rho(x) dx = 3M \frac{s^2}{L^2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{s}{L}\right) \\ T(s) &= \frac{Mg}{2} - m(s)g = Mg \left(\frac{1}{2} - 3 \frac{s^2}{L^2} + 2 \frac{s^3}{L^3}\right) \\ M_f(s) &= Mg L \left(\frac{1}{2} \frac{s}{L} - \frac{s^3}{L^3} + \frac{1}{2} \frac{s^4}{L^4}\right) \end{aligned}$$

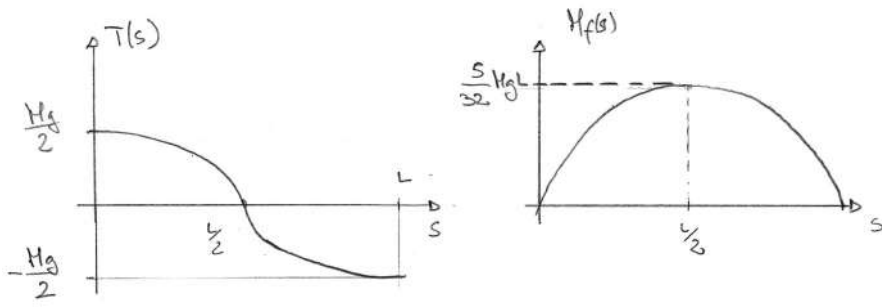


Figure 6.36:

Notare il valore massimo del momento flettente.

Caso II

$$\rho(s) = 3 \frac{M}{L} \left(\frac{s}{L} \right)^2$$

Diamo brevemente i risultati:

massa totale = M, $s_G = 3/4L$, $V_O = Mg/4$, $V_A = 3/4Mg$

$$T(s) = Mg \left(\frac{1}{4} - \frac{s^3}{L^3} \right)$$

$$M_f(s) = \frac{Mg}{4} s \left(1 - \frac{s^3}{L^3} \right)$$

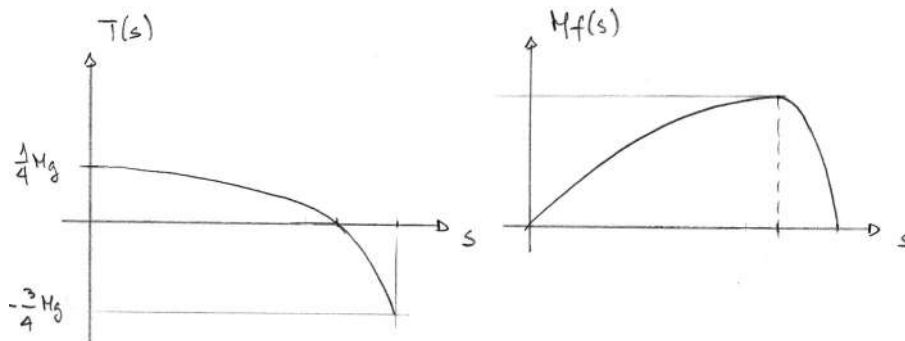


Figure 6.37:

6.6.4 Risoluzione Esercizio 6.5

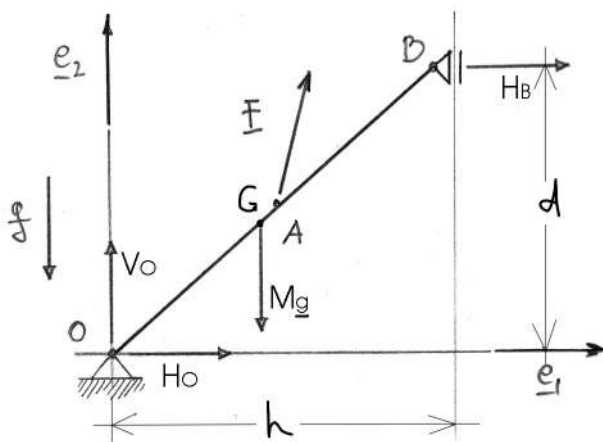


Figure 6.38:

1.

$$\begin{aligned} \underline{F} &= F_1 \underline{e}_1 + F_2 \underline{e}_2 \\ AB &= aL, \quad 0 < a < L \\ L &= \sqrt{d^2 + h^2} \end{aligned}$$

Supponendo di avere già calcolato G , l'equilibrio dei momenti rispetto ad O dà:

$$-d H_b - (1 - a) d F_1 + (1 - a) h F_2 - \frac{\overline{OG}}{L} h M_g = 0$$

$$\Rightarrow H_B = -(1-a) F_1 + (1-a) \frac{h}{d} - \frac{\overline{OG} h}{L} \frac{h}{d} Mg$$

2. Scegliamo di misurare la sezione a partire da B

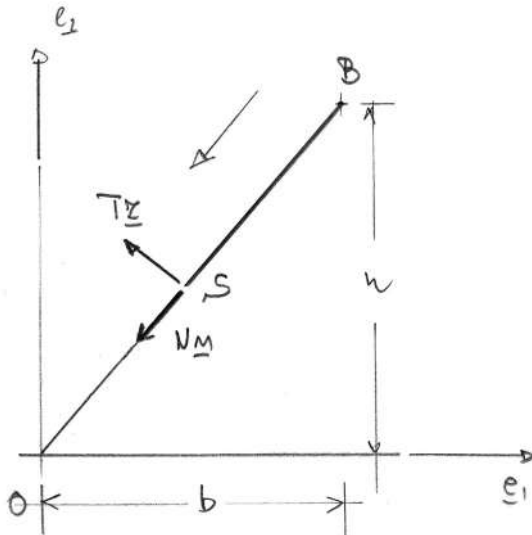


Figure 6.39:

$$SB = s$$

$$\rho = \rho(s) \text{ assegnata}$$

avremo allora:

$$\underline{n} = -\frac{h}{L} \underline{e}_1 - \frac{d}{L} \underline{e}_2$$

$$\underline{\tau} = \underline{n} \wedge \underline{e}_3 = -\frac{d}{L} \underline{e}_1 + \frac{h}{L} \underline{e}_2$$

Per $0 < s < aL$ si ha

$$N \underline{n} + T \underline{\tau} - m(s)g \underline{e}_2 + H_B \underline{e}_1 = \underline{0}$$

dove H_B è ricavato sopra ed

$$m(s) = \int_0^s \rho(x) dx$$

Quindi:

$$\begin{aligned} N &= m(s)g \underline{e}_2 \cdot \underline{n} - H_B \underline{e}_1 \cdot \underline{n} = N^-(s) \\ T &= m(s)g \underline{e}_2 \cdot \underline{\tau} - H_B \underline{e}_1 \cdot \underline{\tau} = T^-(s) \end{aligned}$$

Attraverso la sezione $S = A$, dalla relazione di salto (vedi (6.5))

$$\begin{aligned} (N^+ - N^-) \underline{n} + (T^+ - T^-) \underline{\tau} + \underline{F} &= \underline{0} \\ N^+(s) &= N^-(s) - \underline{F} \cdot \underline{n} \\ T^+(s) &= T^-(s) - \underline{F} \cdot \underline{\tau} \end{aligned}$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} N(s) &\begin{cases} N^-(s) = -\frac{d}{L}m(s)g + \frac{h}{L}H_B & , \quad 0 < s < aL \\ N^+(s) = N^-(s) - \left(-\frac{h}{L}F_1 - \frac{d}{L}F_2\right) & , \quad aL < s < L \end{cases} \\ T(s) &\begin{cases} T^-(s) = \frac{h}{L}m(s)g - \frac{d}{L}H_B & , \quad 0 < s < aL \\ T^+(s) = T^-(s) - \left(-\frac{d}{L}F_1 + \frac{h}{L}F_2\right) & , \quad aL < s < L \end{cases} \end{aligned}$$

Essendo

$$M_f(s) = \int_0^s T(x) dx$$

avremo infine

$$M_f(s) \begin{cases} \int_0^s T^-(x) dx & , \quad 0 < s < aL \\ \int_0^{aL} T^-(x) dx + \int_{aL}^s T^+(x) dx & , \quad aL < s < L \end{cases}$$

Ovviamente per disegnare i diagrammi bisogna fissare tutti i dati del problema, cioè $\rho(s)$, h , d , L , a , F_1 , F_2 (e provare a fare un programma di calcolo ?)

Il caso con asta di massa trascurabile e forza \underline{F} pari ad $m \underline{g}$ si ottiene dal precedente ponendo

$$\rho \equiv 0 \Rightarrow m(s) \equiv 0$$

$$F_1 = 0 , F_2 = -mg$$

Dispense di Meccanica Razionale

Prof. Maura Ughi

20 Marzo 2003

Contents

7	Trasformazione d'inerzia	2
7.1	Introduzione	2
7.2	Studio della Trasformazione d'inerzia relativa ad un punto fisso (generico) O	4
7.3	Ellissoide d'Inerzia (forma quadratica associata alla trasformazione d'inerzia)	11
7.4	Assi Principali d'Inerzia	16
7.5	Variazione di \mathbf{I}_O col polo O	24
7.6	Proprietà degli assi principali d'inerzia relativi al centro di massa G	28
7.7	Calcolo di elementi d'inerzia per alcune figure geometriche	31
7.8	Risoluzione degli Esercizi	38
7.8.1	Risoluzione Esercizio 7.1	38
7.8.2	Risoluzione Esercizio 7.2	39
7.8.3	Risoluzione Esercizio 7.3	41
7.8.4	Risoluzione Esercizio 7.4	42
7.8.5	Risoluzione Esercizio 7.5	45
7.8.6	Risoluzione Esercizio 7.6	45

Chapter 7

Trasformazione d'inerzia

7.1 Introduzione

Dato un sistema S di punti materiali P , ciascuno di massa m_P , si definisce il momento d'inerzia rispetto ad una retta data come la somma delle masse moltiplicata per la distanza al quadrato dei punti della retta.

Per un sistema continuo si parla di integrale sul campo della densità per la distanza al quadrato. Useremo in seguito il *modello discreto* per facilità di esposizione, ed anche perchè in molte situazioni concrete di sistemi continui l'integrale si fa discretizzando il campo continuo (con metodi numerici).

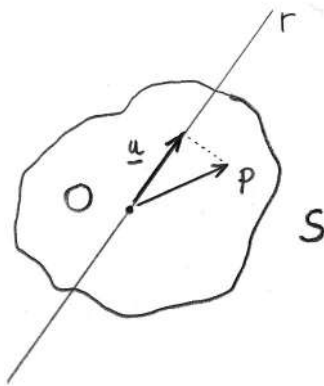


Figure 7.1:

Detto \underline{u} il versore della retta r ed O un suo punto si ha che:

$$\text{distanza di } P \text{ da } r = \|\underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)\|$$

Avremo quindi:

$$I_r = \sum_{P \in S} m_P \|\underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)\|^2 \quad (7.1)$$

Se il sistema il questione è un rigido \mathfrak{R} e la retta r è una retta assegnata solidale al rigido il momento d'inerzia è una costante, dipendendo solo dalle posizioni reciproche dei punti che non variano comunque il rigido si muova. Studieremo per ora il modo di variare di I_r con r per un *rigido*.

Notiamo subito che per questo studio conviene mettersi in un sistema *solidale* al rigido (i.e. rispetto al quale il rigido è immobile). Dalla definizione di I_r si ha che:

$$\begin{aligned} I_r &= \sum_{P \in \mathfrak{R}} m_P [\underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)] \cdot [\underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)] = \\ &= \underline{u} \cdot \sum_{P \in S} m_P (\underline{x}_P - \underline{x}_O \wedge [\underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)]) \end{aligned}$$

(Dove abbiamo usato la proprietà $\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \wedge \underline{c}$).

Notiamo che I_r è il prodotto scalare di \underline{u} per un vettore che, fissato \mathfrak{R} e quindi le masse e le loro distanze relative, è funzione vettoriale solo di \underline{u} , precisamente:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{I}_O(\underline{y}) = \sum_{P \in \mathfrak{R}} (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge [\underline{y} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)] \\ \underline{y} \in \mathbf{R}^3 \mathbf{I}_O : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ I_r = \underline{u} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}) \quad \underline{u} = \text{versore di } r \end{array}} \quad (7.2)$$

La trasformazione \mathbf{I}_O è molto importante sia in statica che in dinamica e viene chiamata *Trasformazione d'inerzia relativa ad O* (o tensore d'inerzia); essa dipende essenzialmente dalla distribuzione di massa sul rigido.

Per evidenziarne l'importanza nello studio dei rigidi ricordiamo qui che, utilizzando le formule di Poisson, si vede che sia il momento angolare che l'energia cinetica di un rigido in un moto generico sono legati alla Trasformazione d'Inerzia (per un maggiore approfondimento rimandiamo al Cap 9 Par. 5)

Infatti si ha che il momento angolare di un rigido rispetto ad un punto O solidale al rigido è dato da

$$\begin{aligned} O \in \mathfrak{R}, \underline{L}(O) &= \sum_{P \in \mathfrak{R}} (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge m_P \underline{v}_P = \\ &= M(\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge \underline{v}_O + \mathbf{I}_O(\underline{\omega}) \end{aligned}$$

L'energia cinetica è data da

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_P m_P \|\underline{v}_P\|^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_O^2 + \underline{v}_O \cdot \underline{\omega} \wedge M(\underline{x}_G - \underline{x}_O) + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{\omega}) \end{aligned}$$

7.2 Studio della Trasformazione d'inerzia relativa ad un punto fissato (generico) O

Cominciamo dimostrando il seguente risultato

Proposizione (Linearità e Simmetria)

La trasformazione d'inerzia è una trasformazione lineare e simmetrica rispetto al prodotto scalare:

Dimostrazione Direttamente dalle definizioni si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O(\lambda \underline{y} + \mu \underline{z}) &= \lambda \mathbf{I}_O(\underline{y}) + \mu \mathbf{I}_O(\underline{z}) \\ \forall \underline{y}, \underline{z} \in \mathbf{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

questo vuol dire che $\mathbf{I}_O(\underline{y})$ è lineare.

Per quanto riguarda la simmetria dobbiamo verificare che

$$\underline{y} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{z}) = \underline{z} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{y})$$

Dalla definizione di \mathbf{I}_O e sfruttando la proprietà $\underline{a} \wedge [\underline{b} \wedge \underline{c}] = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$ otteniamo:

$$\mathbf{I}_O(\underline{y}) = \sum_{P \in \mathfrak{R}} m_P [\|\underline{x}_P - \underline{x}_O\|^2 \underline{y} - ((\underline{x}_P - \underline{x}_O) \cdot \underline{y}) (\underline{x}_P - \underline{x}_O)]$$

Quindi

$$\begin{aligned} \underline{z} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{y}) &= \sum_{P \in \mathfrak{R}} m_P [\|\underline{x}_P - \underline{x}_O\|^2 \underline{z} \cdot \underline{y} + \\ &\quad - ((\underline{x}_P - \underline{x}_O) \cdot \underline{y}) (\underline{z} \cdot (\underline{x}_P - \underline{x}_O))] \\ &= \underline{y} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{z}) \end{aligned} \quad \text{q.e.d.} \quad (7.3)$$

Da questo semplice risultato otteniamo delle conseguenze importanti. Una volta fissato un riferimento cartesiano ortogonale *solidale* ad \mathfrak{R} (origine O , versori degli assi $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$) alla Trasformazione d'inerzia è associata una *matrice* 3×3 *simmetrica*, che chiameremo ancora \mathbf{I}_O , *matrice d'inerzia* relativa ad O , tale che, una volta espresso il vettore generico \underline{y} sulla base data, al solito $\underline{y} = y_1 \underline{u}_1 + y_2 \underline{u}_2 + y_3 \underline{u}_3$ e detti I_{ij} i sei elementi distinti della matrice d'inerzia, (detti anche elementi d'inerzia) si ha:

$$\mathbf{I}_O(\underline{y}) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Insistiamo sul fatto che una volta nota la matrice, i.e. una volta calcolati i suoi 6 elementi distinti, possiamo calcolare $\mathbf{I}_O(\underline{y})$ per un qualsiasi $\underline{y} \in \mathbf{R}^3$. Ritorniamo su questo punto in seguito, ora evidenziamo il significato fisico degli elementi d'inerzia. Come per ogni matrice simmetrica avremo

$$I_{jk} = \underline{u}_j \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}_k) , \quad j, k = 1, 2, 3$$

Ricordando come abbiamo introdotto la trasformazione d'inerzia, vedi (7.2), si ha subito:

elemento d'inerzia diagonale

$$I_{jj} = \underline{u}_j \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}_j) \quad (7.5)$$

= momento d'inerzia di \mathfrak{R} rispetto all'asse \underline{u}_j

Dette (x_1, x_2, x_3) le coordinate del generico punto P del rigido nel sistema di riferimento fissato avremo (vedi fig. (7.2))

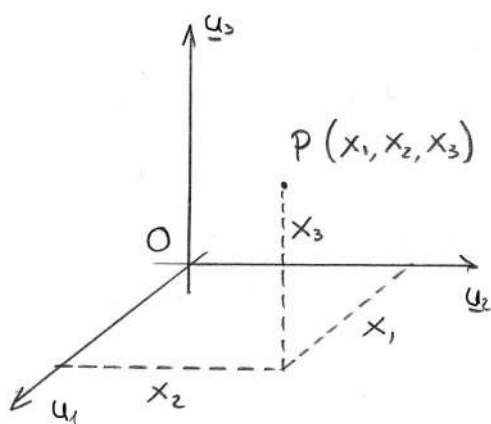


Figure 7.2:

$$I_{11} = \sum_P m_P(x_2^2 + x_3^2) \quad (7.6)$$

$$I_{22} = \sum_P m_P(x_1^2 + x_3^2)$$

$$I_{33} = \sum_P m_P(x_1^2 + x_2^2)$$

Pensando agli elementi fissati fuori diagonale notiamo dapprima che fissati 2 generici *versori* \underline{u} e \underline{v} tra loro *ortogonali*, dalla (7.3) essendo $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, otteniamo

$$\underline{u} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{v}) = - \sum_{P \in \mathfrak{R}} m_P [(\underline{x}_P - \underline{x}_O) \cdot \underline{u}] [(\underline{x}_P - \underline{x}_O) \cdot \underline{v}] \quad (7.7)$$

$\stackrel{def}{=} \text{momento deviatore rispetto alla coppia di piani } \pi_O, \pi'_O$

dove $\pi_O = \text{piano passante per } O \text{ ortogonale ad } \underline{u}$ e
 $\pi'_O = \text{piano passante per } O \text{ ortogonale a } \underline{v}$

Con riferimento alla figura (7.3)

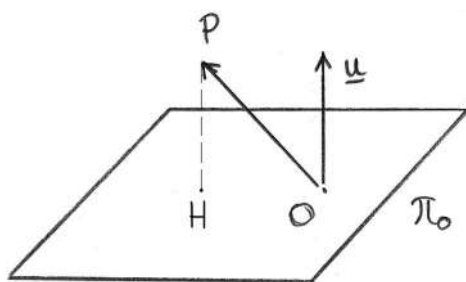


Figure 7.3:

si ha che $\underline{u} \cdot (\underline{x}_P - \underline{x}_O)$ è la distanza *col segno* di P dal piano π_O .

Quindi abbiamo:

gli elementi d'inerzia fuori diagonale I_{jk} $j \neq k$ sono i momenti deviatori rispetto ai piani coordinati normali ad $\underline{u}_j, \underline{u}_k$.

Quindi (vedi fig. 7.7)

$$I_{12} = - \sum_P m_P x_1 x_2 \quad (7.8)$$

$$I_{23} = - \sum_P m_P x_2 x_3$$

$$I_{13} = - \sum_P m_P x_1 x_3$$

Esempio 7.1

(Trave indetormabile con massa delle aste trascurabile rispetto alla massa dei nodi). Poichè i punti appartengono al piano $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ abbiamo

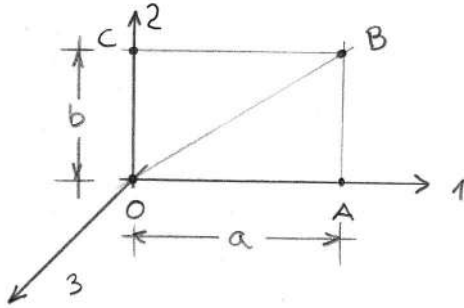


Figure 7.4:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= m_C b^2 + m_B b^2 \\
 I_{22} &= m_A a^2 + m_B a^2 \\
 I_{33} &= m_C b^2 + m_A a^2 + m_B (a^2 + b^2) = I_{11} + I_{22} \\
 I_{12} &= -m_B ab \\
 I_{13} &= I_{23} = 0
 \end{aligned}$$

Osserviamo che per ogni rigido *piano* (lamine, sezione di traversi, ecc.) posto \underline{u}_3 il versore ortogonale a tale piano ogni punto del sistema ha coordinate $(x_1, x_2, 0)$ Quindi dalle (7.7) e (7.9) si ha

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} \text{ e } I_{13} = I_{23} = 0$$

Per ogni rigido piano la matrice d'inerzia, con la solita scelta precedente degli assi ha la forma

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

Vista l'importanza applicativa dei rigidi piani (appunto sezioni piane di travi) spesso in questo caso si parla di *matrice d'inerzia piana*

$$\tilde{\mathbf{I}}_O = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Insistiamo ancora sul fatto che, una volta calcolato \mathbf{I}_O (6 elementi nel caso generale e 3 nel caso piano) si possono calcolare i momenti d'inerzia o i momenti deviatori rispetto ad una qualsiasi retta o coppia di piani per O .

Precisamente

$$\begin{cases} I_{r_O} = \underline{u} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}) & \underline{u} \text{ versore di } r \\ I_{\pi_O \pi'_O} = \underline{u} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{v}) & \underline{u}, \underline{v} \text{ versori ortogonali} \\ & \text{rispettivamente a } \pi_O \text{ e } \pi'_O \end{cases}$$

Esercizio 7.1

Dato il rigido all'Esempio 7.1, calcolare:

1. momenti d'inerzia rispetto alla retta \overline{OQ} dove Q è il punto di coordinate (a, a, a)
2. momento deviatore rispetto alla coppia di piani $\pi = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ versore normale \underline{u}_3) e π' passante per l'asse 3 e inclinato di α rispetto ad \underline{u}_1 versore normale $-\sin\alpha \underline{u}_1 + \cos\alpha \underline{u}_3$

Nota:

In Scienza delle Costruzioni si parla anche di momenti deviatori rispetto a coppie di piani non ortogonali.

Tali momenti si possono definire tramite la (7.3) per ogni coppia di versori $\underline{u} = \underline{y}$, $\underline{v} = \underline{z}$ anche non ortogonali tra loro, ma ovviamente ortogonali ai piani in esame

Nota:

Dall'espressione in coordinate dei momenti d'inerzia (7.7) si vede subito che

$$\begin{aligned} \text{Traccia}(\mathbf{I}_O) &= I_{11} + I_{22} + I_{33} = 2 \sum_P m_P (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (7.11) \\ &= 2 \sum_P m_P \|\underline{x}_P - \underline{x}_O\|^2 = 2J_O \text{ dove} \\ J_O &= \text{momento polare rispetto ad } O \end{aligned}$$

Questo esprime fisicamente il fatto che la traccia di \mathbf{I}_O non dipende dal sistema di riferimento scelto.

7.3 Ellissoide d'Inerzia (forma quadratica associata alla trasformazione d'inerzia)

In questo paragrafo daremo una rappresentazione geometrica della Trasformazione d'inerzia.

Fissato $O \in \mathfrak{R}$ generico e fissato un numero positivo c consideriamo il luogo geometrico dei punti P t.c.

$$\|\underline{x}_P - \underline{x}_O\|^2 = c I_{r_{OP}} , \quad (7.12)$$

dove $I_{r_{OP}}$ è il momento d'inerzia rispetto alla retta passante per O e P .

Notiamo subito che, escluso il caso di un rigido composto da punti tutti allineati (cioè le aste), I_r è sempre positivo, qualsiasi sia r . Quindi tutti i punti P appartenenti al luogo geometrico definito dalla (7.12) sono a distanza *fissata* da O. Usando la trasformazione d'inerzia relativa ad O possiamo esprimere la (7.12) in forma analitica (implicita). Precisamente posto al solito \underline{x} = vettore di posizione di P nella terna solidale data di origine O (cioè $\underline{x} = \underline{x}_P - \underline{x}_O$) e per ogni $\underline{x} \neq 0$, posto $\underline{u} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$ il versore di \underline{x} (e quindi anche il versore della retta passante per P ed O), abbiamo dalla definizione

dei \mathbf{I}_O (7.2) e dalla linearità, che:

$$\begin{aligned}\underline{x} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{x}) &= \|x\| \underline{u} \cdot \mathbf{I}_O(\|x\| \underline{u}) = \|x\|^2 \underline{u} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}) \\ &= \|x\|^2 I_{r_{OP}} = \|\underline{x}_P - \underline{x}_O\|^2 I_{r_{OP}}\end{aligned}\tag{7.13}$$

Possiamo quindi riscrivere la (7.12) nella forma seguente:

$$\begin{aligned}\{P : \|\underline{x}_P - \underline{x}_O\|^2 = c I_{r_{OP}}\} = \\ \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{x}) = c\}\end{aligned}\tag{7.14}$$

La prima formulazione è *geometrica* e la seconda è *analitica* (i.e. insieme di livello della funzione $f(\underline{x})$). Per il seguito chiameremo, come è d'uso, $f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{x})$ la forma quadratica associata ad \mathbf{I}_O , poichè essendo \mathbf{I}_O una trasformazione lineare e simmetrica, $f(\underline{x})$ è un polinomio di secondo grado nelle 3 coordinate di $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i cui coefficienti sono gli elementi della matrice \mathbf{I}_O .

Precisamente, una volta fissato il riferimento solidale con origine O, e quindi data la matrice \mathbf{I}_O , $f(\underline{x})$ è data da:

$$\begin{aligned}f(\underline{x}) &= \sum_{i,j=1}^3 I_{i,j} x_i x_j = \\ &I_{11}x_1^2 + I_{22}x_2^2 + I_{33}x_3^2 + \\ &+ 2I_{12}x_1x_2 + 2I_{23}x_2x_3 + 2I_{13}x_1x_3\end{aligned}\tag{7.15}$$

Abbiamo subito il seguente risultato

Proposizione *Escluso il caso delle aste (rigido allineato), la forma quadratica associata alla Trasformazione d'inerzia relativa ad un polo generico è definita positiva, cioè*

$$\begin{cases} f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbf{R}^3 \\ e f(\underline{x}) = 0 \text{ se e solo se } \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

Dimostrazione Basta leggere attentamente la (7.13), cioè $\underline{x} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{x}) = \|\underline{x}\|^2 I_{r_{OP}}$ e notare che $I_{r_{OP}} > 0$ (escluse le aste)
Abbiamo quindi (da risultati in geometria) il seguente

Proposizione Il luogo geometrico definito dalla (7.14) è, per ogni $c > 0$ e per ogni rigido non allineato, un ellissoide di centro O , detto *Ellissoide d'inerzia del rigido relativo ad O* ($E.I.(O)$)

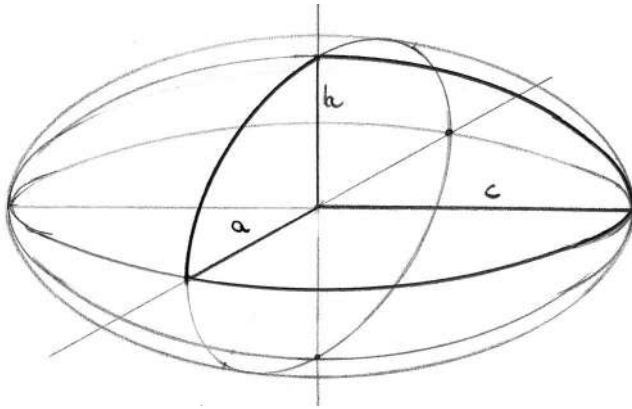


Figure 7.5:

Dimostrazione Si può dare in modi diversi. Ad esempio l'insieme è una *quadrica* (insieme di livello di un polinomio di secondo grado in 3 variabili), di centro O per costruzione, i cui punti sono tutti a distanza finita da O e quindi l'unica quadrica che gode di tali proprietà è un ellissoide.

Per l'importanza applicativa dei sistemi rigidi piani, ricordiamo qui che se rifacciamo i precedenti ragionamenti restringendoci al caso piano del rigido ed usando la matrice d'inerzia piana (vedi 7.10) si arriva alla Ellisse d'inerzia relativa ad O (definita appunto dalle (7.14) restringendoci al piano del rigido π o come $E.I.(O) \cap \pi$)

Con le notazioni precedenti avremo

$$\underline{x} = (x_1, x_2) \quad \tilde{\mathbf{I}}_O = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}(\underline{x}) = \underline{x} \cdot \tilde{\mathbf{I}}_O \underline{x} = I_{11}x_1^2 + I_{22}x_2^2 + 2I_{12}x_1x_2$$

Notiamo qui che *disegnare l'Ellissoide d'inerzia relativo ad O* per un dato rigido \mathfrak{R} , ovviamente avendo fissato la costante c , dà una rappresentazione

grafica del modo di variare del momento d'inerzia rispetto ad una qualsiasi retta per O oltre a darne la misura (da qui la sua importanza e.g. in Scienza delle Costruzioni)

Esempio 7.2

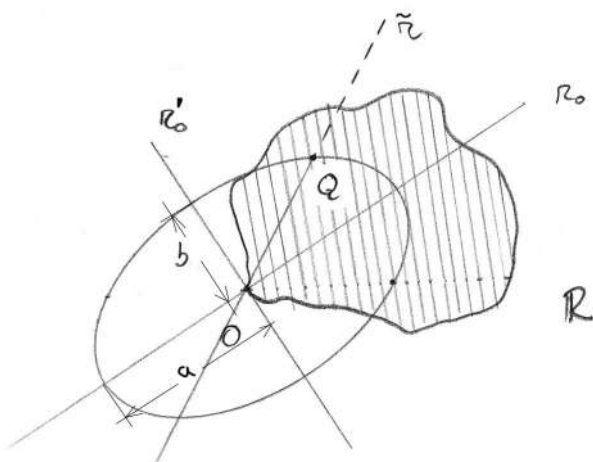


Figure 7.6:

Supponiamo che la lamina piana di fig 7.6 abbia l'ellisse d'inerzia per O per e.g. $c = 1$ disegnata in figura, $a = 1/\sqrt{I_{r_0}}$ $b = 1/\sqrt{I_{r_0'}}$.

Il momento d'inerzia di una qualsiasi retta \tilde{r} , per O e appartenente al piano del rigido si determina graficamente considerando il punto di intersezione Q di \tilde{r} con l'Ellisse d'inerzia, dalla definizione si ha che

$$I_{\tilde{r}} = \frac{1}{OQ^2}$$

Ad esempio direttamente dalla figura e ricordando che $b \leq \overline{OQ} \leq a$ abbiamo che:

1.

$$\frac{1}{a^2} = I_{r_0} \leq I_{\tilde{r}} \leq I_{r_0'} = \frac{1}{b^2}$$

per ogni \tilde{r} generico

2. se \tilde{r} ed \hat{r} sono simmetriche rispetto ad r_O allora i loro 2 momenti d'inerzia sono uguali

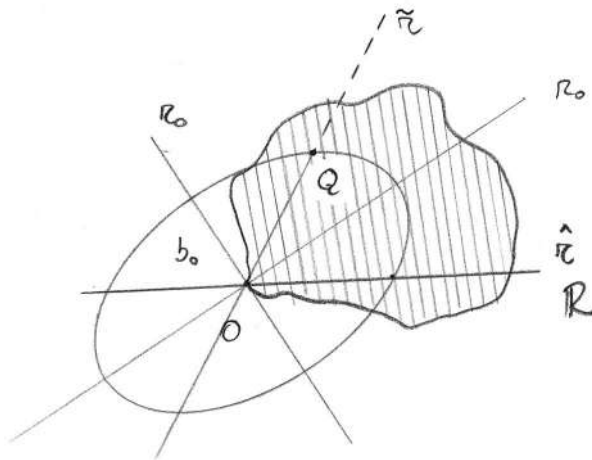


Figure 7.7:

7.4 Assi Principali d'Inerzia

Ricordiamo che un ellissoide ha, almeno, 3 assi di simmetria ortogonale fra loro e prendendo come riferimento solidale una di tali terne (o la terna se ci sono solo 3 assi di simmetria) l'equazione dell'ellissoide ha forma canonica cioè

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7.16)$$

Se consideriamo l'E.I.(O) e prendiamo come riferimento i suoi 3 assi di simmetria $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ l'equazione dell'E.I.(O) è

$$\underline{x} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{x}) = 1 \Rightarrow J_1 x^2 + J_2 y^2 + J_3 z^2 = 1$$

dove J_1, J_2, J_3 sono i momenti d'inerzia rispetto ad $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ cioè agli assi di simmetria.

Quindi in tale riferimento la matrice d'inerzia è *diagonale*, precisamente

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

Ne segue subito che:

1. $\mathbf{I}_O (\underline{i}) = J_1 \underline{i}$, $\mathbf{I}_O (\underline{j}) = J_2 \underline{j}$, $\mathbf{I}_O (\underline{k}) = J_3 \underline{k}$
 \Rightarrow Se \underline{u} è il versore di un asse di simmetria dell'E.I.(O) $\Rightarrow \mathbf{I}_O \underline{u} = \lambda \underline{u}$
 cioè \underline{u} è autovettore di \mathbf{I}_O e $\lambda =$ momento d'inerzia relativo all'asse considerato è il corrispondente autovalore
2. gli elementi fuori diagonale sono nulli \Rightarrow momenti deviatori rispetto alla coppia di piani di simmetria dell'E.I.(O) sono nulli.

Abbiamo quindi che:

Definizione di API(O)

Assi principali d'inerzia (relativi ad O)

= assi di simmetria dell'E.I.(O)

= autovettori di \mathbf{I}_O

= assi ortogonali tra loro tali che i momenti deviatori rispetto alle coppie di piani ortogonali a tali assi siano nulli

Gli assi principali d'Inerzia hanno importanti proprietà in Statica e Dinamica (vedi Scienza delle Costruzioni e Cap. Dinamica) ed è quindi importante saperli determinare.

Illustreremo ora i vari metodi per la ricerca di tali assi per un rigido qualsiasi ad un suo punto O generico, metodi che discendono in modo naturale dalla definizione.

1. **Metodo di ricerca degli autovettori ed autovalori di \mathbf{I}_O (algebrico)**

Supponiamo di avere calcolato la matrice d'inerzia \mathbf{I}_O , in una terna data, cerchiamo i vettori $\underline{x} \neq \underline{0}$ ed i numeri reali λ tali che:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O(\underline{x}) = \lambda \underline{x} &\Rightarrow \mathbf{I}_O \underline{x} - \lambda I_d \underline{x} = 0 \\ & \quad (I_d \text{ è la matrice identità}) \\ &\Rightarrow (\mathbf{I}_O - \lambda I_d) \underline{x} = \underline{0} \end{aligned}$$

Questo è un sistema lineare ed omogeneo di 3 equazioni nelle incognite $(x_1, x_2, x_3) = \underline{x}$ con matrice dei coefficienti $(\mathbf{I}_O - \lambda I_d)$ che dipende dal parametro λ . Poichè noi vogliamo soluzioni $\underline{x} \neq \underline{0}$ dobbiamo chiedere che:

$\lambda \text{ t.c. } \det(\mathbf{I}_O - \lambda I_d) = 0$ <p><i>equazione caratteristica per gli autovalori</i></p>	(7.18)
--	--------

Nota 1: per la matrice d'inerzia sappiamo già che gli autovalori saranno i momenti d'inerzia relativi gli assi principali (detti *momenti d'inerzia principali*) e saranno quindi dei *numeri reali positivi*.

Per una generica matrice A $n \times n$ l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I_d) = 0$ è una equazione algebrica di grado n , ed ha quindi n radici nel campo complesso.

Ricordiamo che si dimostra il seguente

Lemma (autovalori reali) A matrice $n \times n$ *simmetrica* reale $\Rightarrow n$ autovalori reali.

Fissato λ soluzione dell'equazione caratteristica l'autovettore normalizzato è

$$\underline{u} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \text{ con } \underline{x} \text{ soluzione di} \quad (7.19)$$

$$(\mathbf{I}_O - \lambda I_d) \underline{x} = \underline{0}$$

Nota 2: Per la matrice d'inerzia sappiamo già che, essendo gli autovettori gli assi di simmetria dell'E.I.(O), ve ne sono almeno tre ortogonali tra loro. In generale per una matrice A $n \times n$ si ha che

Lemma 2 (ortogonalità) matrice simmetrica $n \times n$ (reale) \Rightarrow autovalori sono reali e gli autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono tra loro ortogonali.

Lemma 3 (rappresentazione diagonale) A matrice $n \times n$ simmetrica reale \Rightarrow esiste almeno una base ortonormale di n autovettori (in cui la rappresentazione della matrice è diagonale con gli elementi diagonali dati dagli autovalori).

Per avere un'idea del ruolo della *simmetria* nei risultati precedenti notiamo che (per la dimostrazione rigorosa vedi libri di Algebra Lineare):

(a) Se $\lambda \in \mathbf{C}$ è radice del polinomio caratteristico $\Rightarrow \tilde{\lambda} =$ complesso coniugato di λ è anch'esso radice dello stesso polinomio, quindi entrambi sono autovalori e detti \underline{u} e $\tilde{\underline{u}}$ gli autovettori corrispondenti che sono complessi coniugati \Rightarrow

$$\begin{aligned} A \underline{u} &= \lambda \underline{u} \\ A \tilde{\underline{u}} &= \tilde{\lambda} \tilde{\underline{u}} \\ \Rightarrow \tilde{\underline{u}} \cdot A(\underline{u}) &= \lambda \tilde{\underline{u}} \cdot \underline{u} \\ \underline{u} \cdot A(\tilde{\underline{u}}) &= \tilde{\lambda} \underline{u} \cdot \tilde{\underline{u}} \\ \Rightarrow (A \text{ simmetrica } \Rightarrow \tilde{\underline{u}} \cdot A(\underline{u}) &= \underline{u} \cdot A(\tilde{\underline{u}})) \Rightarrow \\ \lambda \tilde{\underline{u}} \cdot \underline{u} = \tilde{\lambda} \underline{u} \cdot \tilde{\underline{u}} &\Rightarrow \lambda = \tilde{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

- (b) Poichè λ è reale, \underline{u} soluzione di $(A - \lambda I_d) \underline{u} = \underline{0}$ è reale: presi $\lambda_1 \neq \lambda_2$ si ha che gli autovettori corrispondenti sono ortogonali:

$$\begin{aligned} A(\underline{u}_1) &= \lambda_1 \underline{u}_1 & , & & A(\underline{u}_2) &= \lambda_2 \underline{u}_2 \Rightarrow \\ \underline{u}_2 \cdot A(\underline{u}_1) &= \lambda_1 \underline{u}_2 \cdot \underline{u}_1 & , & & \underline{u}_1 \cdot A(\underline{u}_2) &= \lambda_2 \underline{u}_2 \cdot \underline{u}_1 \\ \Rightarrow (A \text{ simmetrica}) &\Rightarrow & & & \underline{u}_2 \cdot A(\underline{u}_1) &= \underline{u}_1 \cdot A(\underline{u}_2) \Rightarrow \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \underline{u}_2 \cdot \underline{u}_1 &= 0 & \Rightarrow & & \text{poichè } \lambda_1 - \lambda_2 &\neq 0 \\ &\text{si ha} & & & \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 &= 0. \end{aligned}$$

- (c) in una base di n autovettori tra loro ortogonali e normalizzati ad 1 (cioè $\|\underline{u}_i\|^2 = 1$):

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \underline{u}_i \cdot A(\underline{u}_i) = \underline{u}_i \cdot \lambda_i \underline{u}_i = \lambda_i \|\underline{u}_i\|^2 = \lambda_i \\ i \neq j \quad A_{ij} &= \underline{u}_i \cdot A(\underline{u}_j) = \underline{u}_i \cdot \lambda_j \underline{u}_j = \lambda_j \underline{u}_i \cdot \underline{u}_j = 0 \end{aligned}$$

Il metodo degli autovettori di \mathbf{I}_O è il più generale per la ricerca degli assi principali d'inerzia e fornisce automaticamente anche i momenti d'inerzia principali.

2. Ricerca dei massimi e minimi di I_r nel fascio di rette per O .

Diciamo subito che questo metodo funziona bene quando uno degli assi principali è noto e si debbono trovare gli altri due, come accade ad esempio per i rigidi piani. Come vedremo fornisce una *formula*, utile in applicazioni grafiche, quale il *Cerchio di Mohr*.

Se tutti e 3 gli assi sono da determinare questo metodo *ritorna* al metodo degli autovalori già indicato.

Supponiamo quindi che l'asse \underline{k} scelto sia asse principale per O , mentre \underline{i} ed \underline{j} non lo sono, la matrice \mathbf{I}_O avrà allora nella terna $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ la forma

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \quad I_{12} \neq 0$$

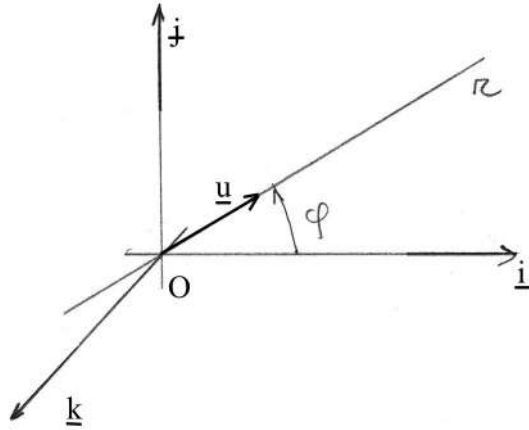


Figure 7.8:

$$\underline{u} = \cos\varphi \underline{i} + \sin\varphi \underline{j}$$

Preso una retta per O nel piano $\underline{i}, \underline{j}$ come in figura avremo

$$I_r(\varphi) = I_{11}\cos^2\varphi + I_{22}\sin^2\varphi + 2I_{12}\sin\varphi\cos\varphi \quad (7.20)$$

Se consideriamo l'ellisse d'inerzia nel piano $\underline{e}_1, \underline{e}_2$, i suoi assi di simmetria corrispondono alla retta per cui I_r è massimo o minimo al variare di φ tra 0 e π , cioè ai punti di stazionarietà della funzione $I_r(\varphi)$

$$\varphi \text{ t.c. } \frac{dI_r(\varphi)}{d\varphi} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dI_r(\varphi)}{d\varphi} &= -2I_{11}\sin\varphi\cos\varphi + & (7.21) \\ &+ 2I_{22}\sin\varphi\cos\varphi + 2I_{12}\cos 2\varphi = \\ &= (I_{22} - I_{11}) \sin 2\varphi + 2I_{12}\cos 2\varphi = 0 \\ \Rightarrow \cotan(2\varphi) &= \frac{I_{11} - I_{22}}{2I_{12}} \end{aligned}$$

Notiamo che per $\varphi = [0, \pi]$ otteniamo dalle precedenti due valori

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2I_{12}} \right)$$

e

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$$

Per calcolare i due momenti d'inerzia principali si usa la (7.20), rispettivamente con $\varphi = \varphi_1$ e $\varphi = \varphi_2$.

3. Annullamento dei momenti deviatori

Nelle stesse condizioni del metodo 2 cerchiamo una coppia di assi $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ tali che il momento deviatore nella nuova terna $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{k})$ sia nullo.

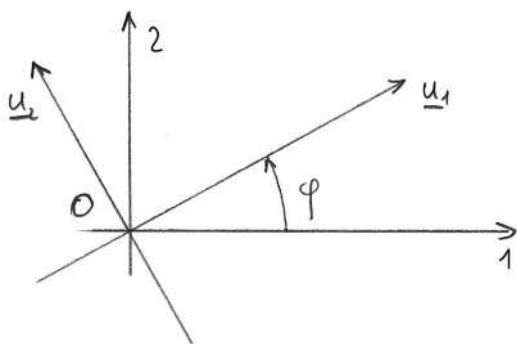


Figure 7.9:

dobbiamo quindi cercare φ tale che $\underline{u}_2 \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}_1) = 0$.
Sviluppando il calcolo abbiamo:

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \cos\varphi \underline{i} + \sin\varphi \underline{j} \\ \underline{u}_2 &= -\sin\varphi \underline{i} + \cos\varphi \underline{j} \\ \mathbf{I}_O(\underline{u}_1) &= \begin{pmatrix} I_{11}\cos\varphi + I_{12}\sin\varphi \\ I_{12}\cos\varphi + I_{22}\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{u}_2 \cdot \mathbf{I}_O (\underline{u}_1) &= -\sin\varphi (I_{11}\cos\varphi + I_{12}\sin\varphi) + \\
&+ \cos\varphi (I_{12}\cos\varphi + I_{22}\sin\varphi) \\
&= I_{12}\cos 2\varphi + (I_{22} - I_{11}) \frac{\sin 2\varphi}{2} = 0
\end{aligned}$$

otteniamo quindi le formule precedenti (7.21)

4. Simmetria materiale ortogonale

Diciamo che π è un piano di *simmetria materiale ortogonale* se è un piano di simmetria *geometrica* ortogonale ed i punti simmetrici rispetto al piano hanno uguale massa (o densità per i corpi continui)

Proposizione Se π è un piano di simmetria materiale ortogonale per il rigido, per ogni punto O del piano π la retta per O ortogonale a π è un API(O).

Dimostrazione Per ogni coppia di rette r ed r' *simmetriche* rispetto a π e passanti per O si ha $I_r = I_{r'}$, quindi π è un piano di simmetria dell'ellissoide d'inerzia per O cioè, per definizione, un piano principale d'inerzia per O . Ne segue che la retta per O ortogonale a π è un asse principale per O .

É evidente che questo metodo ha diretta applicazione ai solidi omogenei geometricamente simmetrici, quali cubi, parallelepipedi, poliedri e poligoni regolari etc.

Esercizio 7.2

Data una lamina rettangolare omogenea di lati a e $2a$ determinare gli Assi principali d'inerzia relativi ad un vertice con i primi 3 metodi.

Esercizio 7.3

Dato il rigido dell'esempio 7.1 dire se la retta OB è un asse principale per O .

Esercizio 7.4

Determinare gli API ed i momenti principali rispetto al *centro di massa* G dei seguenti corpi omogenei:

1. superficie sferica
2. sfera
3. parallelepipedo
4. cubo
5. rettangolo
6. triangolo isoscele
7. poligono regolare di n lati

vedere prima Par 7.

7.5 Variazione di \mathbf{I}_O col polo O

Consideriamo due punti del rigido O ed O' , poichè

$$\begin{aligned}
 \forall B \in \mathfrak{R} \quad (\underline{x}_B - \underline{x}_O) &= (\underline{x}_B - \underline{x}_{O'}) + (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \Rightarrow \\
 \mathbf{I}_O(\underline{u}) &= \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge [\underline{u} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O)] \\
 &= \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_{O'}) \wedge [\underline{u} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_{O'})] + \\
 &+ \left(\sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B \right) (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \wedge [\underline{u} \wedge (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O)] + \\
 &+ \left[\sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_{O'}) \right] \wedge [\underline{u} \wedge (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O)] + \\
 &+ (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \wedge \left[\underline{u} \wedge \left(\sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_{O'}) \right) \right]
 \end{aligned}$$

Quindi se scegliamo $O' = G =$ centro di massa, essendo

$$\sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_G) \stackrel{def}{=} M (\underline{x}_G - \underline{x}_G) = \underline{0}$$

otteniamo che la formula di *trasporto* della matrice d'inerzia ha la forma più semplice se riferita al centro di massa, precisamente:

$$\mathbf{I}_O(\underline{u}) = \mathbf{I}_G(\underline{u}) + M (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge [\underline{u} \wedge (\underline{x}_G - \underline{x}_O)] \quad (7.22)$$

Dalla precedente formula di trasporto si ottiene:

- **Teorema di Huygens - Steiner** per i momenti d'inerzia rispetto a 2 rette r_O e r_G parallele fra loro e passanti rispettivamente per O generico e per G :

$$\begin{aligned} I_{r_O} &= I_{r_G} + M \|\underline{u} \wedge (\underline{x}_G - \underline{x}_O)\|^2 \\ &= I_{r_G} + M (\text{distanza tra } r_O \text{ ed } r_G)^2 \end{aligned}$$

Dimostrazione: basta moltiplicare (7.22) scalarmente per \underline{u} e ricordare che $\underline{u} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}) = I_{r_O}$ e $\underline{u} \cdot \mathbf{I}_G(\underline{u}) = I_{r_G}$.

- **Teorema di trasporto per i momenti deviatori**

Detti : π_O, π_G i 2 piani ortogonali ad un vettore \underline{u}
: π'_O, π'_G i 2 piani ortogonali ad un vettore \underline{v}

passanti rispettivamente per O e G con $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ si ha:

$$I_{\pi_O, \pi'_O} = I_{\pi_G, \pi'_G} + M [\underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_O)] [\underline{v} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_O)] \quad (7.23)$$

Dimostrazione: basta moltiplicare scalarmente le (7.22) per \underline{v} e ricordare che $I_{\pi_O, \pi'_O} = \underline{v} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u})$ e $I_{\pi_G, \pi'_G} = \underline{v} \cdot \mathbf{I}_G(\underline{u})$.

Esercizio 7.5

Data una lamina rettangolare omogenea di lati a e b ed il punto O di coordinate, nel sistema di riferimento di figura, $(a/2, b/6)$, calcolare I_{r_G} ed I_{r_O} .

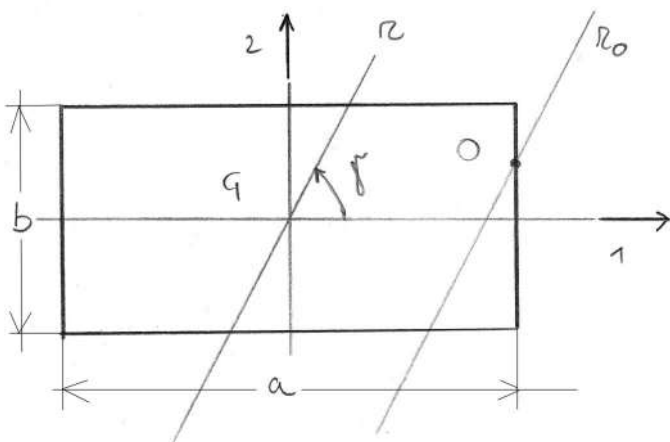


Figure 7.10:

Notiamo che i due risultati precedenti permettono, data la matrice \mathbf{I}_G in un riferimento con origine G , di *ricostruire* \mathbf{I}_O in un riferimento con origine in O (generico) ed assi paralleli a quelli di riferimento per G .

Esercizio 7.6

Con riferimento all'esercizio precedente scrivere \mathbf{I}_O in una terna parallela a quella per G di figura

Come altre conseguenze importanti della formula di trasporto diciamo innanzitutto che:

Proposizione: Dato il fascio di rette parallele di versore \underline{u} , il minimo momento d'inerzia è quello rispetto alla retta del fascio passante per G

Dimostrazione: dal teorema di Huygens - Steiner (7.23) si ha

$$I_{r_O} \geq I_{r_G}, \forall O \neq G$$

Segue che se disegniamo tutti i possibili $EI(O)$ centrati in un unico punto *virtuale* Ω solidale ad \mathfrak{R} , essi sono tutti contenuti nell' $EI(G)$, poichè le distanze dei punti dell' $EI(O)$ da Ω sono inversamente proporzionali alle radici dei momenti d'inerzia corrispondenti e vale la relazione d'ordine sopra scritta.

in formula si ha:

$$\begin{aligned} \forall \underline{u} \text{ dato si ha} \\ \underline{x} = \|\underline{x}\| \quad \underline{u} \in EI(O) &\Leftrightarrow \|\underline{x}\|^2 \underline{u} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}) = 1 \\ \underline{y} = \|\underline{y}\| \quad \underline{u} \in EI(G) &\Leftrightarrow \|\underline{y}\|^2 \underline{u} \cdot \mathbf{I}_G(\underline{u}) = 1 \\ \text{poichè } \underline{u} \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}) &\geq \underline{u} \cdot \mathbf{I}_G(\underline{u}) \Rightarrow \|\underline{x}\|^2 \leq \|\underline{y}\|^2 \end{aligned}$$

Esempio 7.3

Con riferimento all'esercizio (7.5) essendo $a > b$, $J_1 =$ momento d'inerzia rispetto all'asse 1 di fig (7.10) $= \frac{1}{12}Mb^2$ è il più piccolo momento d'inerzia della lamina per qualsiasi retta passante per qualsiasi punto O . Ovviamente il massimo è infinito, basta allontanarsi da G . Avremo che il massimo momento d'inerzia del rigido per una qualsiasi retta per O sarà minore o uguale al massimo momento d'inerzia per G ($J_3 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ per la lamina rettangolare) aumentato di $m \overline{OG}^2$ (infatti se r_O dà il massimo momento d'inerzia per O , $I_{r_O} = I_{r_G} + M \|\underline{u} \wedge (\underline{x}_G - \underline{x}_O)\|^2 \leq \max(I_{r_G}) + M \|\underline{x}_G - \underline{x}_O\|^2$).

7.6 Proprietà degli assi principali d'inerzia relativi al centro di massa G

Per brevità li chiameremo assi principali centrali.

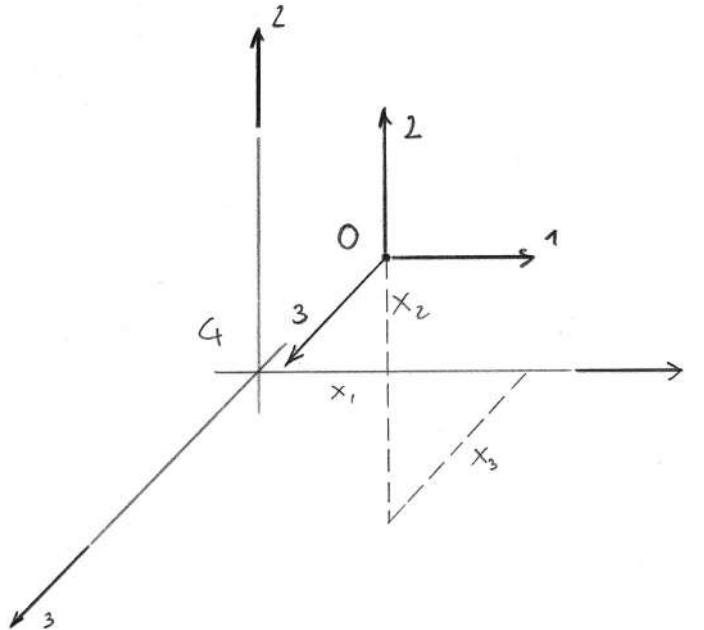


Figure 7.11:

Data una *terna principale per G* ed un punto O di coordinate (x_1, x_2, x_3) in tale terna possiamo usare le formule di trasporto per determinare la matrice d'inerzia relativa ad O in una terna di riferimento con origine in O ed assi paralleli a quelli centrali. Poichè, per ipotesi

$$\mathbf{I}_G = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

allora

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} J_1 + M(x_2^2 + x_3^2) & -Mx_1x_2 & -Mx_1x_3 \\ -Mx_1x_2 & J_2 + M(x_1^2 + x_3^2) & -Mx_2x_3 \\ -Mx_1x_3 & -Mx_2x_3 & J_3 + M(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

Segue subito che:

1. Se $O \in$ Asse principale centrale \Rightarrow la terna principale per O è parallela a quella centrale (infatti O ha 2 coordinate nulle e quindi tutti e 3 i momenti deviatori sono nulli)
2. Se $O \in$ piano principale centrale \Rightarrow l'asse per O ortogonale al piano suddetto è principale e gli altri due sono ruotati rispetto a quelli centrali (infatti O ha una sola coordinata nulla e quindi solo i due momenti deviatori che la contengono sono nulli)
3. Se O non appartiene ai piani principali \Rightarrow la terna principale per O è diversa da quella centrale (infatti in tal caso le 3 coordinate di O non sono nulle e quindi tutti e tre i momenti deviatori sono diversi da zero)

Nota: I risultati precedenti si possono ottenere anche direttamente dalla formula di trasporto per \mathbf{I}_O (7.22) che scriviamo qui, facendo uso della formula del doppio prodotto vettoriale $\underline{a} \wedge [\underline{b} \wedge \underline{c}] = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$:

$$\mathbf{I}_O(\underline{u}) = \mathbf{I}_G(\underline{u}) + M \|\underline{x}_G - \underline{x}_O\|^2 \underline{u} - M (\underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_O)) (\underline{x}_G - \underline{x}_O)$$

Se \underline{u} è autovettore per \mathbf{I}_G , cioè $\mathbf{I}_G(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$
 allora \underline{u} è autovettore per \mathbf{I}_O , cioè $\mathbf{I}_O(\underline{u}) = \tilde{\lambda} \underline{u}$

se e solo se

$$(\underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_O)) (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge \underline{u} = \underline{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{o } \underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_O) = 0$$

cioè $O \in$ piano per G ortogonale ad \underline{u} = piano principale centrale ortogonale ad \underline{u}

$$\text{o } (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \text{ è parallelo ad } \underline{u}$$

cioè $O \in$ retta per G di direzione \underline{u} = asse principale centrale di direzione \underline{u}

Esempio 7.4

Data una lamina quadrata omogenea, preso un punto O qualsiasi del suo piano, gli assi principali per O sono la retta congiungente OG e la sua normale per O . Infatti, essendo l'ellisse d'inerzia centrale del quadrato una circonferenza (vedi Esercizio (7.4)), ogni retta per G è un asse principale centrale. Prendiamo allora come terna principale centrale la terna costituita dalle rette $\underline{i} = OG$, $\underline{j} = \text{normale ad } OG$, $\underline{k} = \text{normale al piano}$. Per la proprietà 1 la terna principale per O è parallela alla precedente.

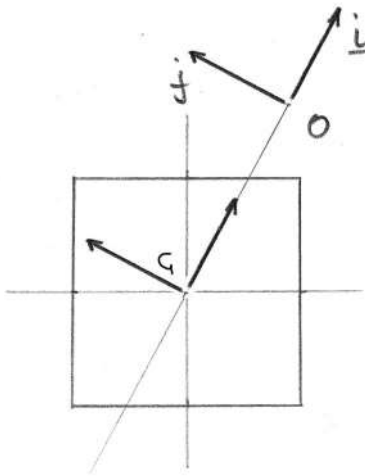


Figure 7.12:

Notare che in tale terna

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}Ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Ml^2 + M\overline{OG}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}Ml^2 + M\overline{OG}^2 \end{pmatrix}$$

Analoghe considerazioni valgono per i poligoni regolari. Cosa succede per cubi, tetraedri, etc. omogenei? (ricordiamo che per tali solidi l'ellissoide d'inerzia centrale è una superficie sferica (vedi Esercizio (7.4))).

7.7 Calcolo di elementi d'inerzia per alcune figure geometriche

Per comodità del lettore raggruppiamo in questo paragrafo alcuni esempi di calcolo di elementi d'inerzia per i sistemi rigidi continui, notando che si potranno utilizzare tali calcoli per ottenere elementi d'inerzia di figure geometriche complesse utilizzando l'additività degli elementi d'inerzia ed il teorema di Huygens - Steiner (7.23)

Aste (momento d'inerzia rispetto la retta r per O)

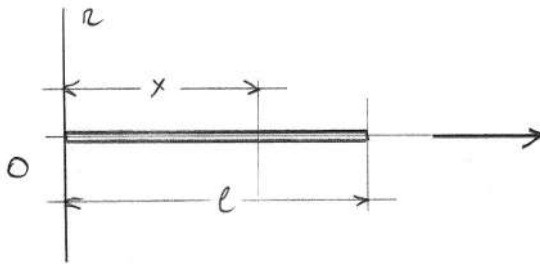


Figure 7.13:

$$\rho = \rho(x)$$

$$I_r = \int_0^l \rho(x)x^2 dx$$

Asta omogenea $\rho = \text{costante} \Rightarrow$

$$I_r = \rho \frac{l^3}{3} = M \frac{l^3}{3}$$

Rettangolo (matrice d'inerzia rispetto al vertice O)

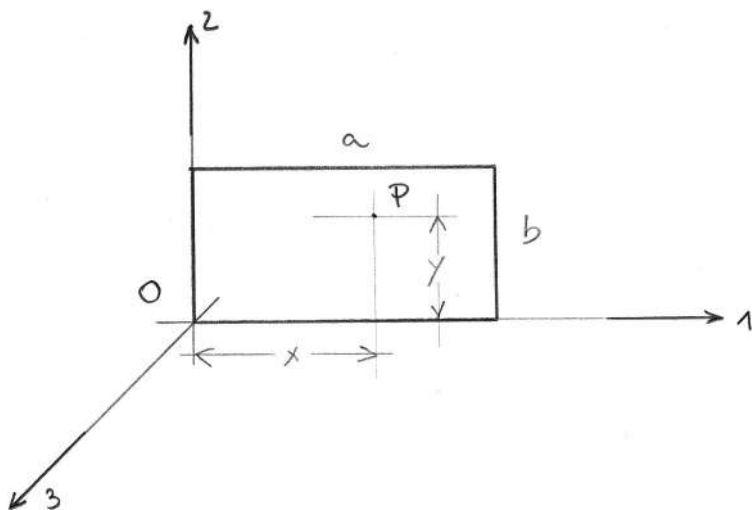


Figure 7.14:

$$\rho = \rho(x, y)$$

$$I_{11} = \int_0^a \int_0^b \rho y^2 dx dy$$

caso omogeneo:

$$I_{11} = \rho a \frac{b^3}{3} = M \frac{b^2}{3}$$

$$I_{22} = \int_0^a \int_0^b \rho x^2 dx dy$$

caso omogeneo:

$$I_{22} = \rho b \frac{a^3}{3} = M \frac{a^2}{3}$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} , I_{13} = I_{23} = 0$$

$$I_{12} = - \int_0^b \int_0^a \rho xy dx dy$$

caso omogeneo:

$$I_{12} = -\rho \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} = -M \frac{ab}{4}$$

Triangolo Rettangolo (matrice d'inerzia rispetto ad O)

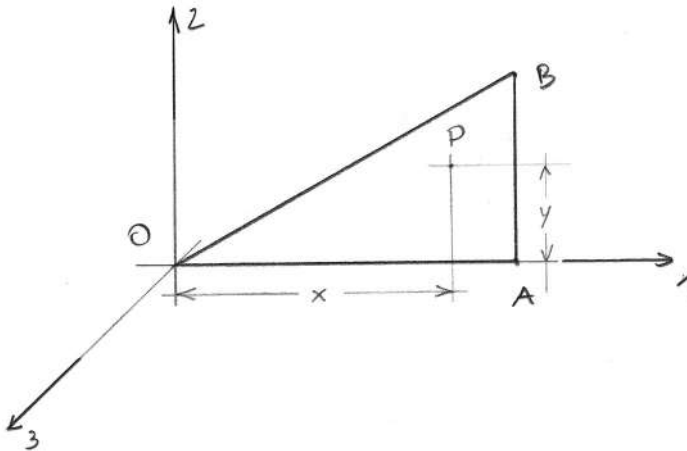


Figure 7.15:

$$\rho = \rho(x, y)$$

$$I_{11} = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} \rho y^2 dx dy$$

caso omogeneo:

$$I_{11} = \frac{\rho}{3} \int_0^b \left(\frac{h}{b}x \right)^3 dx = \frac{\rho h^3 b^4}{3 b^3 4} = \rho \frac{hb h^2}{2 6} = M \frac{h^2}{6}$$

$$I_{22} = \int_0^b x^2 \int_0^{\frac{h}{b}x} \rho dx dy$$

caso omogeneo:

$$I_{22} = \rho \int_0^b \frac{h}{b} x^3 dx = \rho \frac{h}{b} \frac{b^4}{4} = \rho \frac{hb}{2} \frac{b^2}{2} = M \frac{b^2}{2}$$

$$I_{12} = - \int_0^b x \int_0^{\frac{h}{b}x} \rho y dy dx$$

caso omogeneo:

$$I_{12} = -\rho \int_0^b \frac{x}{2} \left(\frac{h}{b} x \right)^2 dx = -\rho \frac{h^2}{2b^2} \frac{b^4}{4} = -M \frac{hb}{4}$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22}, \quad I_{13} = I_{23} = 0$$

Nota: si può dimostrare che per ogni triangolo *omogeneo* di base b ed altezza h

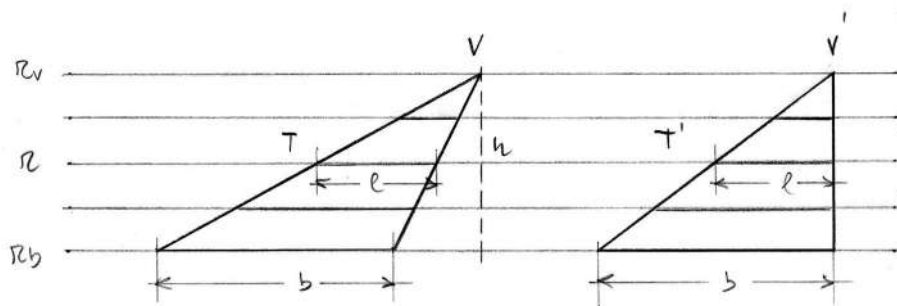


Figure 7.16:

In generale se:

- r_b = retta di base $\Rightarrow I_{r_b} = M \frac{h^2}{6}$
 r_V = retta per il vertice opposto alla base e parallela alla base stessa $\Rightarrow I_{r_V} = M \frac{h^2}{2}$
 r = retta parallela alla base: I_r del triangolo T = I_r del triangolo T'

Quindi in particolare dal Teorema di Huygens Steiner si ha

- r_G = retta parallela alla base passante per il centro di massa G
 I_{r_G} = del triangolo T' = I_{r_G} del triangolo T = $I_{r_b} - M \left(\frac{h}{3}\right)^2 = M \frac{h^2}{18}$

Considerazioni analoghe valgono per le relazioni tra parallelogrammi e rettangolo di uguale base ed altezza.

Circonferenza (rispetto alla retta r passante per il centro ed ortogonale al piano della circonferenza)

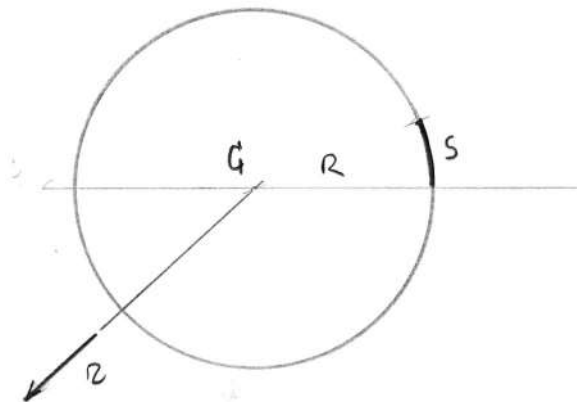


Figure 7.17:

$$I_r = \int_0^{2\pi R} \rho(s) R^2 ds = MR^2$$

Poichè

$$M = \int_0^{2\pi R} \rho(s) ds$$

N.B. vale anche nel caso non omogeneo.

Cerchio (rispetto alla retta r_C per il centro G ed ortogonale al piano del cerchio)

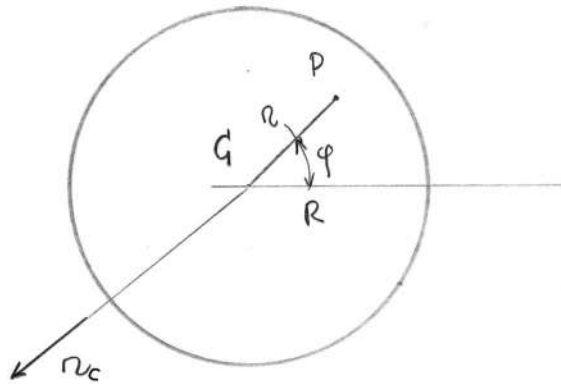


Figure 7.18:

Con le notazioni precedenti e con densità in coordinate polari

$$I_{r_C} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho(r, \varphi) r^3 d\varphi dr$$

$$\rho = \rho(r) \Rightarrow I_r = 2\pi \int_0^R \rho(r) r^3 dr$$

$$\text{caso omogeneo} \Rightarrow I_r = 2\pi \rho \frac{R^4}{4} = \pi \rho \frac{R^4}{2} = M \frac{R^2}{2}$$

Parallelepipedo (matrice d'inerzia calcolata rispetto al polo O)

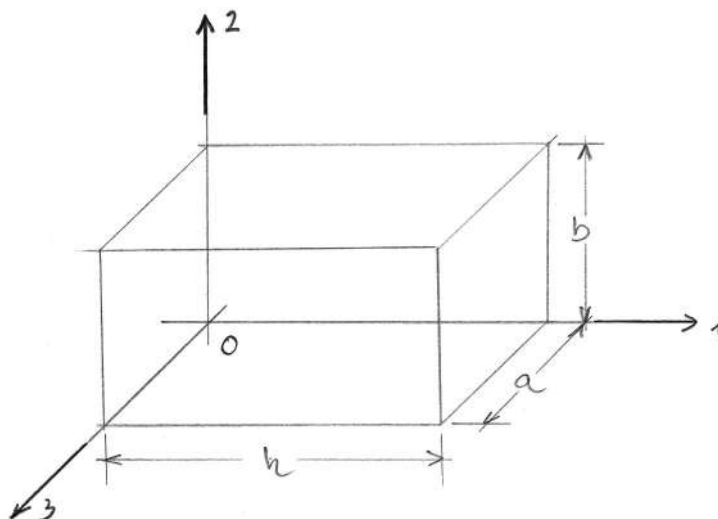


Figure 7.19:

$$\rho = \rho(x, y, z)$$

$$I_{11} = \int_0^h \int_0^a \int_0^b \rho (y^2 + z^2) dydzdx$$

caso omogeneo:

$$I_{11} = \rho \int_0^h \frac{ab}{3} (a^2 + b^2) dx = M \frac{(a^2 + b^2)}{3}$$

Superficie sferica e sfera omogenea rispetto al loro centro Per le proprietà di simmetria e la proprietà della traccia di \mathbf{I}_G , vedi (7.11)

$$2J_G = tr(\mathbf{I}_G) = 3 I_r \Rightarrow \quad (7.25)$$

$$I_r = \frac{2}{3} I_G, \text{ per ogni retta per } G$$

- superficie sferica

$$J_G = MR^2 \Rightarrow I_r = \frac{2}{3}MR^2$$

- Sfera omogenea

$$\begin{aligned} J_G &= \int_0^R \rho 4\pi r^2 r^2 dr \\ &= \rho \frac{4}{5} \pi R^5 = \frac{3}{5} M R^2 \\ &\Rightarrow I_r = \frac{2}{5} M R^2 \end{aligned}$$

Notare che per una sfera non omogenea ma con densità variabile col raggio, vale ancora la 7.25 con $J_G = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^4 dr$.

7.8 Risoluzione degli Esercizi

7.8.1 Risoluzione Esercizio 7.1

1. il versore di r è

$$\underline{u} = \frac{\underline{x}_Q - \underline{x}_O}{\|\underline{x}_Q - \underline{x}_O\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I_r &= \frac{1}{3}(1, 1, 1) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} (b^2(m_C + m_B) + a^2(m_A + m_B) - 2m_B ab + \\ &+ b^2(m_C + m_B) + a^2(m_A + m_B)) \\ &= \frac{2}{3} ((m_C + m_B)b^2 + (m_A + m_B)a^2 - m_B ab) \end{aligned}$$

2.

$$I_{\pi_O, \pi'_O} = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

7.8.2 Risoluzione Esercizio 7.2

Dai calcoli del paragrafo 7 otteniamo la matrice d'inerzia \mathbf{I}_O nella terna di figura (7.14)

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} Ma^2 4/3 & -Ma^2/2 & 0 \\ -Ma^2/2 & Ma^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & Ma^2 5/3 \end{pmatrix}$$

Si verifica subito che l'asse 3 è principale (come per tutti i rigidi piani). Consideriamo allora solo la matrice piana

$$\tilde{\mathbf{I}}_O = \begin{pmatrix} Ma^2 4/3 & -Ma^2/2 \\ -Ma^2/2 & Ma^2/3 \end{pmatrix} = Ma^2 \begin{pmatrix} 4/3 & -1/2 \\ -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Basta allora determinare gli autovalori ed autovettori della matrice (rescaled)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(salvo poi moltiplicare gli autovalori ottenuti per il fattore di scala Ma^2).

Cerchiamo allora λ e $\underline{x} = (x_1, x_2)$ tali che $(A - \lambda I_d) \underline{x} = \underline{0}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(A - \lambda I_d) &= \det \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + \frac{7}{36} = 0 \\ \Rightarrow &= \lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} \pm \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

entrambe radici positive.

Poniamo ora $\lambda = \frac{5}{3} + \sqrt{2}$, le due righe del sistema $(A - \lambda I_d) \underline{x} = \underline{0}$, sono proporzionali consideriamo allora solo la prima equazione

$$\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} + \sqrt{2} \right) \right) x_1 - \frac{1}{2} x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 (1 - \sqrt{2}) , x_1 \in \mathbf{R}$$

normalizziamo ad 1: $\alpha = (1 + (1 + \sqrt{2})^2)^{1/2}$

$$\underline{u} = \alpha (1, 1 - \sqrt{2}) = \text{autovettore relativo a } \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} + \sqrt{2} \right)$$

Procedendo il modo analogo otteniamo

$$\underline{v} = \rho (1, 1 + \sqrt{2}) = \text{autovettore relativo a } \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} - \sqrt{2} \right)$$

Nella base $(\underline{u}, \underline{v})$ la matrice \mathbf{I}_O ha quindi la forma

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{2} \left(\frac{5}{3} + \sqrt{2} \right) & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{2} \left(\frac{5}{3} - \sqrt{2} \right) \end{pmatrix}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto così i 3 momenti d'inerzia principali rispetto ad O , precisamente

$$J_2 = \frac{Ma^2}{2} \left(\frac{5}{3} - \sqrt{2} \right) < J_1 = \frac{Ma^2}{2} \left(\frac{5}{3} + \sqrt{2} \right) < J_3 = \frac{5}{3} Ma^2$$

Possiamo fare alcune verifiche per vedere se i calcoli sono sensati:

1. autovalori positivi, OK
2. autovettori ortogonali, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, OK
3. $J_1 + J_2 = J_3$, OK

Con i secondi due metodi otteniamo invece (vedi 7.21)

$$\cotan 2\varphi = \frac{\frac{Ma^2}{3} - 4\frac{Ma^2}{3}}{Ma^2} = -1$$

$$\Rightarrow 2\varphi_1 = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow \varphi_1 = \frac{3}{8}\pi \text{ e } \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

(verificare che siano in accordo coi risultati ottenuti col metodo degli autovettori).

7.8.3 Risoluzione Esercizio 7.3

La retta \overline{OB} ha versore (vedi fig (7.4))

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a \underline{e}_1 + b \underline{e}_2) \Rightarrow \\ \mathbf{I}_O(\underline{u}) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} (m_C + m_B)b^2 & -m_B ab & 0 \\ -m_B ab & (m_A + m_B)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (m_C + m_B)b^2 + (m_A + m_B)a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} ab^2(m_C + m_B) - m_B ab^2 \\ -m_B a^2b + (m_A + m_B) a^2b \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} m_C b \\ m_A a \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Poichè \underline{u} è autovettore se $\mathbf{I}_O(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$ la retta \overline{OB} è API(O) solo se $m_C/m_A = a^2/b^2$.

7.8.4 Risoluzione Esercizio 7.4

1. e 2. superficie sferica e sfera, G coincide col centro geometrico, tutte le rette per G sono assi principali ed hanno uguale momento d'inerzia I_r (vedi Par. 7) \Rightarrow in ogni riferimento con origine G

$$\mathbf{I}_G = I_r \mathbf{I}_d, \quad \mathbf{I}_d = \text{matrice identità}$$

(qual'è il simbolo Latex per la matrice identità ?)

e l'E.I.(G) = Superficie Sferica

- 3 parallelepipedo, i piani per G paralleli alle facce del parallelepipedo sono piani di simmetria materiale ortogonale quindi le 3 rette per G parallele agli spigoli sono API(G).

Con riferimento alla fig. (7.19) di Par. 7 avremo (valendo la 7.23)

$$I_{11} = M \frac{a^2 + b^2}{12}, \quad I_{22} = M \frac{a^2 + h^2}{12}, \quad I_{33} = M \frac{b^2 + h^2}{12}$$

Notare che se $a \neq b \neq h$ l'EI(G) ha 3 semiassi distinti (e quindi solo 3 assi principali), se ad esempio $a = b$ allora $I_{22} = I_{33}$ quindi l'EI(G) è di rotazione intorno all'asse 1 (come si vede anche direttamente da considerazioni di simmetria)

- 4 Cubo di lato $l \Rightarrow$

$$\mathbf{I}_G = \frac{Ml^2}{6} \mathbf{I}_d$$

\Rightarrow EI(G) = superficie sferica (come si vede direttamente dalla simmetria)

5 rettangolo, gli assi principali per G sono la retta ortogonale al piano del rettangolo e le 2 rette sul piano del rettangolo paralleli ai lati

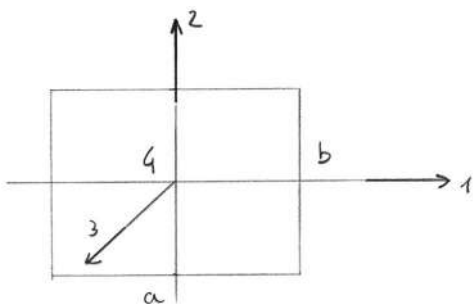


Figure 7.20:

e

$$I_{11} = M \frac{b^2}{12}, \quad I_{22} = M \frac{a^2}{12}, \quad I_{33} = M \frac{a^2 + b^2}{12}$$

Se $a \neq b$ l'EI(G) ha i semiassi distinti e l'Ellisse d'Inerzia per G è una ellisse propria. Se $a = b$ (quadrato) $I_{11} = I_{22}$ e l'Ellisse d'Inerzia per G è una circonferenza (e l'E.I.(G) è di rotazione intorno all'asse 3)

6 Triangolo isoscele

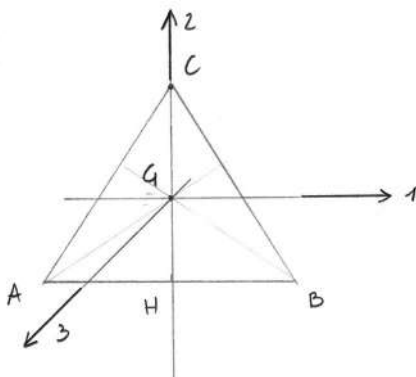


Figure 7.21:

$$\overline{AB} = b, \quad \overline{CH} = h$$

Per simmetria gli API(G) sono quelli di figura (7.21). Dai calcoli di Par 7 si ha

$$I_{11} = \frac{Mh^2}{18}$$

I_{22} = doppio del momento d'inerzia rispetto ad HC base del triangolo rettangolo HCB
=

$$2 \frac{M}{2} \frac{1}{6} \left(\frac{b}{2} \right)^2 = M \frac{b^2}{24}$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{M}{6} \left(\frac{h^2}{3} + \frac{b^2}{4} \right)$$

Se il triangolo è equilatero, dalla simmetria si ha che l'Ellisse d'Inerzia per G è una circonferenza e

$$I_{11} = I_{22} = M \frac{b^2}{24}, \quad I_{33} = M \frac{b^2}{12}$$

2. *Poligono regolare di n lati iscritto in una circonferenza di raggio R e centro C*

Per simmetria l'Ellisse d'Inerzia per $G \equiv C$ è una circonferenza e, preso al solito come asse 3 la normale al piano del poligono si ha

$$I_{11} = I_{22} = \frac{1}{2} I_{33}$$

Scomponendo il poligono in $2n$ triangoli rettangoli del tipo di fig. (7.15) e ponendo $\overline{OB} = R$, angolo $\widehat{AOB} = \pi/n$, $h = R \sin(\pi/n)$, $b = R \cos(\pi/n)$ si ha

$$\begin{aligned} I_{33} &= 2n \frac{M}{2n} \left(\frac{b^2}{2} + \frac{h^2}{6} \right) = M \left(\frac{R^2}{2} \cos^2(\pi/n) + \frac{R^2}{6} \sin^2(\pi/n) \right) \\ &= \frac{MR^2}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2(\pi/n) \right) \end{aligned}$$

Notare che per $n \rightarrow +\infty$, $I_{33} \rightarrow$ momento d'inerzia del cerchio, come ovvio.

7.8.5 Risoluzione Esercizio 7.5

Nella terna data la matrice *piana* $\tilde{\mathbf{I}}_G$ è

$$\begin{pmatrix} Mb^2/12 & 0 \\ 0 & Ma^2/12 \end{pmatrix} \Rightarrow I_{r_G} = \frac{Mb^2}{12} \cos^2 \gamma + \frac{Ma^2}{12} \sin^2 \gamma$$

Poichè il quadrato della distanza tra r_O ed $r_G =$

$$\begin{aligned} &= \left\| (\cos \gamma \mathbf{e}_1 + \sin \gamma \mathbf{e}_2) \wedge \left(\frac{a}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{b}{6} \mathbf{e}_2 \right) \right\|^2 \\ &= \left\| \left(\frac{b}{6} \cos \gamma - \frac{a}{2} \sin \gamma \right) \mathbf{e}_3 \right\|^2 \\ &= \left(\frac{b}{6} \cos \gamma - \frac{a}{2} \sin \gamma \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_{r_O} &= I_{r_G} + M \left(\frac{b}{6} \cos \gamma - \frac{a}{2} \sin \gamma \right)^2 \\ &= M \left(\frac{b^2}{9} \cos^2 \gamma + \frac{a^2}{3} \sin^2 \gamma - \frac{ab}{6} \sin \gamma \cos \gamma \right) \end{aligned}$$

7.8.6 Risoluzione Esercizio 7.6

Con riferimento ad O si ha

$$\begin{aligned} I_{11,O} &= M \frac{b^2}{12} + M \left(\frac{b}{6} \right)^2 = \frac{Mb^2}{9} \\ I_{22,O} &= M \frac{a^2}{12} + M \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{Ma^2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{12,O} &= 0 - M \frac{ab}{12} = -M \frac{ab}{12} \\ I_{33,O} &= I_{11,O} + I_{22,O}, \quad I_{13,O} = I_{23,O} = 0 \end{aligned}$$

(Notare l'accordo con il risultato dell'esercizio precedente)

Dispense di Meccanica Razionale

Prof. Maura Ughi

20 Marzo 2003

Contents

8	Statica dei Continui Deformabili	2
8.1	Introduzione	2
8.2	Metodo del Bilancio di Forze	3
8.3	Metodi Variazionali	13
8.4	Catenaria	26
8.5	Risoluzione degli Esercizi	29
8.5.1	Risoluzione Esercizio 8.1	29
8.5.2	Risoluzione Esercizio 8.2	30
8.5.3	Risoluzione Esercizio 8.3	32
8.5.4	Risoluzione Esercizio 8.4 (Catenaria)	33

Chapter 8

Statica dei Continui Deformabili

8.1 Introduzione

Data la complessità dell'argomento considereremo alcuni esempi unidimensionali *addomesticati* per far comprendere le tematiche di base del problema.

Per cominciare a fare un *modello matematico* dobbiamo considerare tre aspetti (rimandiamo anche a [V] Introduzione)

1. geometria del continuo in esame, nel seguito considereremo il *continuo unidimensionale deformabile* come una curva regolare da definire bene volta per volta (vedi anche Cap 1)
2. informazioni sulle forze agenti, del tutto analoghe a quanto detto finora per i rigidi (Vedi Cap 6 *Sforzi Interni ad un Rigido*)
3. informazioni sulla struttura meccanica del materiale in esame, queste si tradurranno in ipotesi sulla natura delle forze interne che un dato materiale è in grado di esercitare in risposta a sollecitazioni esterne e saranno chiamate *equazioni costitutive del materiale*

In sintonia con i precedenti capitoli considereremo due metodi di deduzione del modello matematico:

- a) metodo basato sul *bilancio di forze per ogni porzione del mezzo*, in un certo senso un analogo dell'uso intelligente delle equazioni cardinali

- b) (quando è possibile) metodo variazionale basato sulla *stazionarietà* dell'energia potenziale delle forze attive (questo metodo sarà utile anche in Dinamica vedi Cap 9)

Introduciamo ora i tre *esempi guida* che tratteremo in questo capitolo:

Esempio 1 Catena fissata alle estremità e soggetta al proprio peso (come esempio di *filo flessibile ed inestendibile*)

Esempio 2 Trave (o filo) elastico sollecitato da sforzo assiale distribuito e fissato ad una estremità

Esempio 3 Trave elastica inflessa appoggiata alle estremità e soggetta a carico distribuito di taglio.

8.2 Metodo del Bilancio di Forze

Esempio 8.1 (*Catena*)

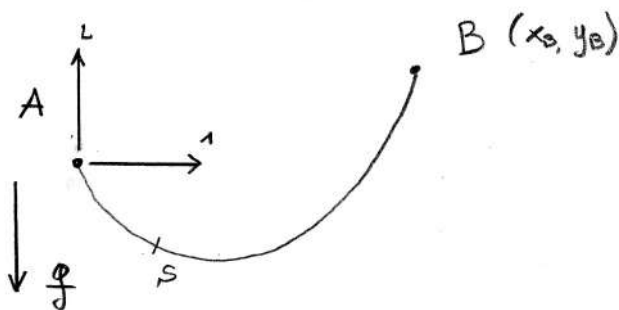


Figure 8.1:

carico specifico = $\rho(s) \underline{g}$
 s = lunghezza d'arco AS
 $\overline{AB} < L$ = lunghezza catena

Diversamente da un arco rigido una catena si può disporre come si vuole, cioè la sua configurazione generica sarà una qualsiasi curva (regolare) di

estremi A e B e di lunghezza data L. Essendo per ipotesi *inestendibile* conviene prendere come parametro per descrivere tale curva proprio il parametro d'arco s , ad esempio misurato a partire da A. Ovviamente la configurazione di equilibrio dipenderà dal particolare carico applicato alla catena.

Dobbiamo appunto capire come scegliere tra le infinite configurazioni possibili quella (o quelle) che realizzano l'equilibrio, cioè legare la forma geometrica della catena alle forze agenti.

Supponendo di conoscere la curva di equilibrio, le equazioni di bilancio delle forze su ogni tratto di catena AS sono le stesse di quelle che abbiamo ricavato per l'arco rigido (vedi (6.3)) che riscriviamo qui, ricordando che il vettore \underline{n} è la tangente geometrica alla curva (ammettiamo che la notazione non è molto felice !)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (N \underline{n} + \underline{T}) &= -\rho \underline{g} \\ \frac{d}{ds} \underline{M}_f &= \underline{T} \wedge \underline{n} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Queste equazioni vengono chiamate *equazioni indefinite di equilibrio*

L'espressione analitica della curva è, nel riferimento di figura (8.1):

$$\begin{aligned} x &= x(s) \quad s \in [0, L] \\ y &= y(s) \quad s \in [0, L] \end{aligned} \quad (8.2)$$

con $x(s)$, $y(s)$ regolari e tali che:

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 1, \text{ per } s \in [0, L] \quad (8.3)$$

(s = lunghezza d'arco)

$$\begin{aligned} x(0) &= x_A = 0 & y(0) &= y_A = 0 \\ x(L) &= x_B & y(L) &= y_B \end{aligned} \quad (8.4)$$

Il vettore \underline{n} è dato da

$$\underline{n} = \frac{dx}{ds} \underline{e}_1 + \frac{dy}{ds} \underline{e}_2 = \frac{dx}{ds} \quad (8.5)$$

Dobbiamo ora introdurre il fatto che stiamo considerando una catena, un filo flessibile, quindi essa non può reagire con sforzo di taglio e momento flettente ma solo con una *tensione* cioè con uno sforzo normale *positivo* (cioè di verso concorde ad \underline{n}). Esprimendo in formule quanto sopra abbiamo le *Equazioni Constitutive*

$$\underline{T} = \underline{0} , \underline{M}_f = \underline{0} , N > 0$$

Mettendo insieme le equazioni indefinite di equilibrio, la forma geometrica della curva e le equazioni costitutive otteniamo: dalla prima equazione in (8.1) \Rightarrow

$$\frac{d}{ds} \left(N \frac{dx}{ds} \right) = -\rho \underline{g} , \quad (8.6)$$

la seconda delle (8.1) è identicamente soddisfatta.

Per maggiore chiarezza enunciamo per esteso il modello matematico da risolvere:

Modello della Catena 1

Determinare tre funzioni regolari da $[0, L]$ in \mathbf{R} $x(s)$, $y(s)$, $N(s) > 0$ tali che, per ogni $s \in [0, L]$ valgano le seguenti relazioni differenziali (ottenute scrivendo le (8.6) secondo gli assi di figura 8.1 ed usando le (8.3))

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \left(N \frac{dx}{ds} \right) &= 0 & (8.7) \\ \frac{d}{ds} \left(N \frac{dy}{ds} \right) &= \rho g \\ \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 &= 1\end{aligned}$$

e che soddisfano le seguenti condizioni di bordo (cioè i vincoli in A e B)

$$\begin{aligned}x(0) &= x_A & x(L) &= x_B \\ y(0) &= y_A & y(L) &= y_B .\end{aligned}$$

Notiamo che una volta risolto il problema si ottengono anche gli sforzi sui vincoli in A e B, precisamente

$$\underline{F}_A^r = -N(0) \frac{dx}{ds} \Big|_{s=0}, \quad \underline{F}_B^r = N(L) \frac{dx}{ds} \Big|_{s=L}$$

Queste reazioni equilibrano il peso totale applicato nel centro di massa della curva.

Esempio 8.2 (*Trave con Sforzo Assiale*)

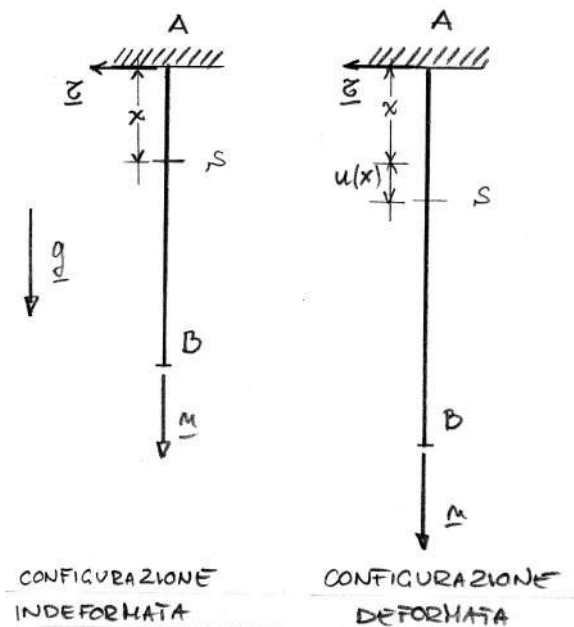


Figure 8.2:

A = punto di sospensione
 B = estremo libero

Stiamo supponendo che l'asta sia soggetta al proprio peso e che si possa allungare proprio a causa del peso, mantenendo la forma rettilinea visto che il carico è tutto normale (o assiale se pensiamo ad un'asta come approssimazione di una trave di sezione costante).

Denotiamo con:

$u(x) + x$ la posizione in configurazione deformata del punto che ha posizione x nella configurazione indeformata.

Le equazioni indefinite di equilibrio (8.1), insieme alle condizioni di bilancio per il sistema complessivo danno:

$$\frac{dN}{dx} = -\rho g \quad (8.8)$$

$$T \equiv 0 \quad M_f \equiv 0$$

Dobbiamo ora definire cosa intendiamo per asta (o trave o filo) *elastico* cioè l'equazione costitutiva: Detto a parole l'equazione è:

Lo sforzo normale (tensione) è proporzionale alla deformazione (variazione unitaria di lunghezza)

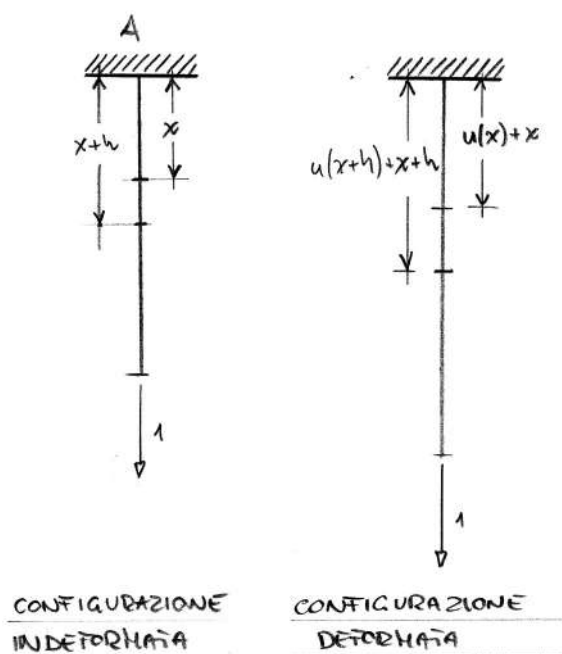


Figure 8.3:

In formule:

$$\text{variazione unitaria di lunghezza} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$\text{deformazione} = \epsilon = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \frac{du}{dx}$$

$$\text{equazione costitutiva } N = E \epsilon = E \frac{du}{dx},$$

dove E è detto modulo di elasticità (lineare) o modulo di Young, è caratteristico del materiale ed è positivo.

Mettendo insieme tutto abbiamo una equazione differenziale del secondo ordine in u , precisamente:

$$\frac{d}{dx} \left(E \frac{du}{dx} \right) = -\rho g$$

Ricordiamo che $u(0) = 0$ perchè l'estremo A è fissato, l'estremo B è libero, quindi dobbiamo valutare il

$$\lim_{x \rightarrow l} N(x)$$

tenendo conto delle forze agenti. Avendo supposto che agisca solo il peso proprio dell'asta, procedendo come per l'asta rigida avremo che tale limite deve essere nullo. Usando l'equazione costitutiva avremo allora che:

$$N(l) = 0 \Rightarrow E \frac{du}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow u'(l) = 0$$

Riassumendo tutto avremo

Modello 2

Determinare una funzione regolare $u(x)$ da $x \in [0, L]$ in \mathbf{R}^+ , tale che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(E \frac{du}{dx} \right) &= -\rho g & (8.9) \\ u(0) &= 0 \quad , \quad u'(l) = 0 \end{aligned}$$

Una volta trovata la soluzione $u(x)$ possiamo trovare $N(x)$ dalla relazione costitutiva

$$N(x) = E \frac{du}{dx} \tag{8.10}$$

Notare che l'allungamento totale sarà dato da $u(l) - l$, e dipende quindi da E oltre che ovviamente dalla densità ρ .

Esercizio 8.1

Risolvere il problema precedente con ρ ed E costanti.

Nota:

Il modello si può riformulare nel modo seguente: *trovare* $N(x)$, $x \in [0, l]$, *tale che*:

$$\frac{dN}{dx} = -\rho g , \quad N(l) = 0$$

Una volta risolto si ha che

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{E}N \Rightarrow u(x) = \int_0^x \frac{N}{E} d\xi$$

Abbiamo seguito l'altra strada (metodo degli spostamenti secondo [V] Cap 1) per evidenziare meglio le deformazioni subite dall'asta.

Il modello riformulato come sopra (metodo delle tensioni [V] Cap I) da subito una informazione interessante. Infatti data una certa $\rho(x)$, la tensione è identica al caso dell'asta rigida nelle stesse condizioni di forze e vincoli.

Quindi essa è indipendente dal modulo di elasticità E . Ne segue che la deformazione du/dx è inversamente proporzionale ad E e tende a zero per E tendente all'infinito. quindi il modello *asta rigida* è in qualche senso il limite per $E \rightarrow \infty$ del modello *asta elastica*, o in altre parole i rigidi sono una idealizzazione di solidi elastici con grande modulo di elasticità.

Esempio 8.3 (*Trave Elastica Inflessa*)

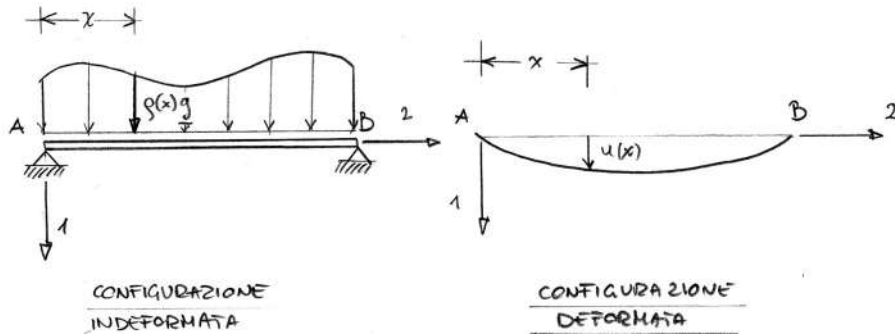


Figure 8.4:

Il problema è lo stesso trattato nell'esempio 6.2 del Cap 6 con la differenza che adesso supponiamo che l'asta (trave) sia *deformabile, elastica* e con *piccole deformazioni*. Precisamente definiamo la configurazione generica come il grafico della funzione $u(x)$ di fig 8.4, $x \in [0, L]$ ($L = \overline{AB}$). L'ipotesi di *piccole deformazioni* implica che

$$\left| \frac{du}{dx} \right| = |u'| \ll 1$$

in modo che

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + u'^2} \cong 1, \quad s \cong x$$

e si fa vedere (vedi [V], [FM]) che le equazioni di bilancio possono essere approssimate nel modo seguente:

$$\begin{aligned} N &= \text{costante} \\ \frac{dT}{dx} &= -\rho g \\ \frac{dM_f}{dx} &= T \end{aligned} \tag{8.11}$$

L'equazione costitutiva (vedi [V], [FM]) è in questo caso un legame lineare tra il momento flettente e la curvatura della curva di equilibrio, precisamente si ha, usando nuovamente l'ipotesi di *piccole deformazioni*

$$M_f = -\tilde{E} u'' , \quad (8.12)$$

$$\tilde{E} = E I ,$$

con E modulo di elasticità ed I momento d'inerzia della trave rispetto al suo asse.

Riassumendo tutto abbiamo:

Modello 3

(Trave Elastica Inflessa)

Determinare una funzione regolare $u(x)$ per $x \in [0, L]$ tale che:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\tilde{E} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \rho g \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} u(0) = 0 & \quad u(L) = 0 & \quad (\text{ appoggio in } A \text{ e } B) \\ u''(0) = 0 & \quad u''(L) = 0 & \quad (M_f \text{ nullo in } A \text{ e } B) \end{aligned}$$

Una volta trovato $u(x)$ si ottengono M_f e T dalle equazioni

$$M_f = -\tilde{E} u'' \text{ e } T = \frac{dM_f}{dx} = -\tilde{E} u''' \quad (8.14)$$

Nota:

Anche in questo caso si può usare invece del Modello 3 (metodo degli spostamenti) un metodo delle forze. Si può cioè ricavare M_f dall'equazione:

$$\frac{d^2 M_f}{dx^2} = -\rho g , \quad M_f(0) = 0 , \quad M_f(L) = 0$$

Si ottengono poi T e $u(x)$ dalle equazioni:

$$T = \frac{dM_f}{dx}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\tilde{E}^{-1}M_f, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0$$

Come nel caso precedente, rileviamo che M_f e T sono identiche a quelle calcolate per la trave *pensata* rigida, e ovviamente con lo stesso carico e gli stessi vincoli, (vedi Esempio 6.2 del Cap 6). Si ha quindi che, a parità di carico, u'' (e quindi u) è inversamente proporzionale alla costante elastica E (e l'asta rigida è il limite ideale per E tendente all'infinito)

Esercizio 8.2

Detrminare la curva di equilibrio supponendo \tilde{E} costante e densità :

1.

$$\rho = \text{costante} = M/L$$

2.

$$\rho = 6 \frac{M}{L} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

(utilizzare i risultati di Cap 6, Esempio 6.2 (i) ed Esercizio 6.3 (i).

8.3 Metodi Variazionali

L'idea di base è quella di minimizzare l'energia potenziale delle forze attive, come per i sistemi ad un numero finito di gradi di libertà.

Per farlo dobbiamo prima di tutto determinare l'energia potenziale e poi capire come si fa a *minimizzarla*. Vedremo che già imponendo la condizione che l'energia potenziale sia *stazionaria*, ritroveremo le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per le curve di equilibrio ricavate nel paragrafo 2.

Esempio 8.4 (Catena)

La forza attiva è il peso di ogni porzione di corda, bisogna però anche tenere conto del vincolo di *inestendibilità*, espresso geometricamente dall'usare come parametro la lunghezza d'arco (cioè la (8.3)).

Abbiamo quindi un problema di *minimi vincolati*, possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Seguendo la via indicata da [L] (chi è interessato può consultare anche [FM], [B]), avremo nel riferimento di fig 8.1

$$V = \int_0^L \left\{ \rho g y + \lambda \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] \right\} ds \quad (8.15)$$

Esempio 8.5 (*Trave con Sforzo Assiale*)

In questo caso le forze attive sono il peso e le forze interne elastiche. Per questo ultime il modello classico di energia potenziale è il seguente (vedi [V])

$$\text{energia potenziale elastica} = \int_0^l \frac{E}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$$

Quindi, con riferimento alla figura 8.2, l'energia potenziale da minimizzare è (a meno di costanti)

$$V = - \int_0^l \rho g u(x) dx + \int_0^l \frac{E}{2} (u')^2 dx \quad (8.16)$$

Nota:

Un modo euristico per convincersi delle due espressioni precedenti è quello di pensare ad un modello *discretizzato* della catena o del filo o trave elastica.

Per la *catena* basta pensare a come è fatta una catena reale, essa si può modellare come n *piccole* aste rigide incernierate agli estremi tra di loro. possiamo cioè pensare al seguente *modello discreto*:

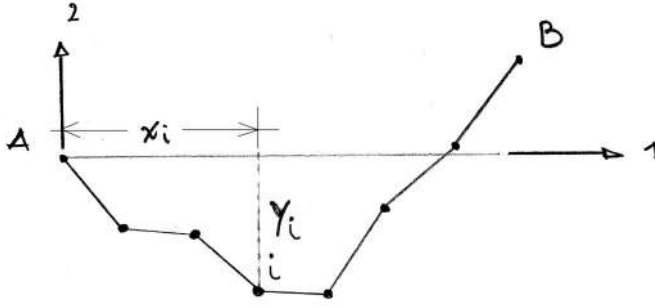


Figure 8.5:

Possiamo prendere come coordinate atte a descrivere il sistema le coordinate dei secondi estremi delle aste x_i , y_i tenendo però conto che esse non sono *libere* bensì soggette ai vincoli *lunghezza di ogni asta costante*, ad esempio tutte uguali ad h . Avremo quindi:

$$(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 = h^2, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Avremo inoltre i vincoli esterni:

A fissato $x_0 = x_A, y_0 = y_A$

B fissato $x_n = x_B, y_n = y_B$

L'energia potenziale totale delle forze peso, nel sistema di riferimento di fig 8.5, è dato da:

$$V = \sum_i m_i g \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$$

dove m_i è la massa dell' i -esima asta.

Tenedo conto dei vincoli interni ed usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dobbiamo minimizzare l'energia potenziale

$$\begin{aligned} V &= \sum_i m_i g \frac{y_{i-1} + y_i}{2} + \sum_i \lambda_i [(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2] \\ &= \sum_i \frac{m_i}{h} g \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h + \sum_i \lambda_i h \left[\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{h^2} + \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{h^2} \right] h \end{aligned}$$

Euristicamente, mandando h a zero, otteniamo l'espressione di V per la catena (8.15)

Per l'asta *elastica* con sollecitazione assiale possiamo pensare al modello indicato nella figura seguente:

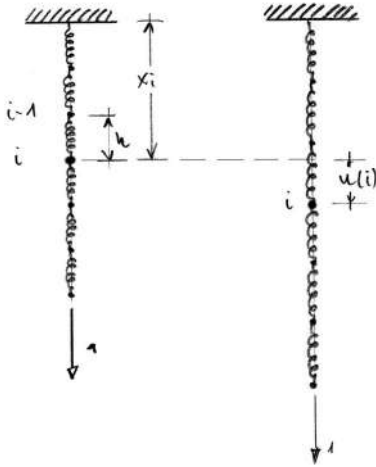


Figure 8.6:

indichiamo con u_i la differenza tra le coordinate, sull'asse 1, del punto i -esimo nelle configurazioni deformata ed indeformata e *simuliamo* con delle molle tra i punti le forze elastiche interne al materiale. Qui dobbiamo considerare le energie potenziali delle forze peso e delle forze elastiche:

$$V_{peso} = - \sum_i m_i g u_i$$

$$V_{elastica} = \sum_i \frac{c_i}{2} (u_i - u_{i-1})^2$$

definite a meno di una costante.

$$V = - \sum_i m_i g u_i + \sum_i \frac{c_i}{2} (u_i - u_{i-1})^2$$

$$= - \sum_i \frac{m_i}{h} g u_i h + \sum_i \frac{c_i h}{2} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right)^2 h$$

Euristicamente per $h \rightarrow 0$ otteniamo l'energia potenziale (8.16), dove abbiamo supposto che $c_i h \rightarrow E$ per $h \rightarrow 0$.

Esempio 8.6 (Trave Inflessa)

Abbiamo anche qui da esprimere l'energia potenziale del peso e delle forze intere elastiche. Il modello comunemente accettato è il seguente, vedi [V] Par 1.7:

$$V = - \int_0^L \rho g u(x) dx + \int_0^L \frac{\tilde{E}}{2} (u'')^2 dx \quad (8.17)$$

Esercizio 8.3

Data per V l'espressione (8.16) con $\rho = 0$ ed E costante, calcolare $V[u]$ per le 3 funzioni $u(x)$ seguenti:

1.

$$u(x) \equiv 0$$

2.

$$u(x) = l \left(1 - \left(\frac{x}{l} - 1 \right)^2 \right)$$

3.

$$u(x) = l \cos \frac{\pi}{2l} (x - l)$$

Come si vede dagli esempi fatti l'energia potenziale dei mezzi continui è una legge che associa ad ogni funzione di un dato insieme un numero reale. In linguaggio matematico viene detta *funzionale*, per distinguerla dalle funzioni reali di una o più variabili reali.

L'analisi funzionale è un grosso settore della matematica che ha applicazione in molti campi della meccanica e di molte altre scienze. Per quello che riguarda gli argomenti di questo corso, rimandiamo per approfondimenti a [PS], [FM], [L], [V], [Bu]. In generale, ricordando come si procede per

studiare i minimi o in generale i punti stazionari per le funzioni solite, si possono usare anche per i funzionali sia metodi *diretti* sia metodi che studiano la variazione del funzionale in esame. Ad esempio se V è data dalla (8.16) e $\rho \equiv 0$ ci si convince che la funzione u che rende minima l'energia potenziale è quella identicamente nulla (cioè in termini di meccanica dei continui la configurazione di equilibrio è quella indeformata, come è ovvio intuitivamente non essendoci carichi applicati)

È importante notare che i metodi diretti danno origine come metodo numerico al *metodo degli elementi finiti*.

Per dare un'idea di cosa vuol dire studiare la *variazione* di un funzionale, consideriamo il seguente:

$$J[q] = \int_a^b F(x, q, q') dx \quad (8.18)$$

dove: F è una funzione regolare dei suoi argomenti

$$q \in \Omega = \{ \text{funzioni regolari da } [a, b] \text{ in } \mathbf{R}, \text{ tali che } q(a) = q_0, q(b) = q_1, q_0 \text{ e } q_1 \text{ dati} \} \quad (8.19)$$

(e al solito $q' = \frac{dq}{dx}$).

Fissiamo ora una funzione \hat{q} appartenente ad Ω e cerchiamo di capire cosa vuol dire *variazione di $J[q]$ intorno a \hat{q}* . Come spesso si fa in matematica cerchiamo di ricondurci ad un problema che sappiamo risolvere cioè alla variazione di una funzione di una variabile reale. Per far questo riscriviamo la generica funzione q di Ω nel modo seguente:

$$q(x) = \hat{q}(x) + \eta g(x) \quad (8.20)$$

dove: η è un numero reale e

$$g(x) \in \Omega_0 = \{ \text{funzioni regolari da } [a, b] \text{ in } \mathbf{R} \text{ tali che } g(a) = 0, g(b) = 0 \}$$

(Verificare che $q(x)$ definita sopra appartiene ad Ω)

Con questo *trucco* abbiamo che:

$$J[q] = J[\hat{q} + \eta g] = \int_a^b F(x, \hat{q} + \eta g, \hat{q}' + \eta g') dx$$

può essere *vista come una funzione di η* , cioè possiamo pensare che \hat{q} e g siano funzioni date e che l'unica quantità variabile sia η , in formule:

$$J[\hat{q} + \eta g] = \tilde{J}(\eta)$$

In particolare:

$$\tilde{J}(0) = J[\hat{q}]$$

Usando allora le nostre conoscenze di Analisi 1, in particolare gli sviluppi in serie delle funzioni avremo:

$$\begin{aligned} J[q] - J[\hat{q}] &= J[\hat{q} + \eta g] - J[\hat{q}] & (8.21) \\ &= \tilde{J}(\eta) - \tilde{J}(0) = \\ &= \left. \frac{d\tilde{J}}{d\eta} \right|_{\eta=0} \eta + o(\eta) \end{aligned}$$

Adesso calcoliamo, usando le regole di Analisi 1,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{J}}{d\eta} &= \frac{d}{d\eta} \left[\int_a^b F(x, \hat{q} + \eta g, \hat{q}' + \eta g') dx \right] & (8.22) \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial q} g + \frac{\partial F}{\partial q'} g' \right) dx = \\ &\quad (\text{integrando per parti il secondo termine}) \\ &= \int_a^b g \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial q'} \right) \right) dx \\ &+ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial q'} g \right) (b) - \left(\frac{\partial F}{\partial q'} g \right) (a) \right] = \\ &\quad (\text{tenendo conto che } g(b) = 0, g(a) = 0) \\ &= \int_a^b g \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial q'} \right) \right) dx \end{aligned}$$

Premettendo che noi consideriamo casi in cui il minimo è anche punto stazionario, vediamo ora che dire

\hat{q} è punto di stazionarietà per $J[q]$

equivale a dire

$\eta = 0$ è punto di stazionarietà di $\tilde{J}[\eta]$

Quindi *deve* essere

$$\left. \frac{d\tilde{J}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \forall g \in \Omega_0$$

Viste le (8.22) abbiamo quindi

$$\int_a^b g \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial q'} \right) \right) dx = 0, \quad \forall g \in \Omega_0 \quad (8.23)$$

La relazione sopra scritta è ancora in forma integrale, mentre vorremmo avere una relazione valida per ogni x in $[a, b]$ e che non coinvolga g . Usiamo ora il seguente risultato, (che in qualche testo e.g. [Bu] viene detto Lemma fondamentale del calcolo variazionale)

Lemma 8.1

Siano f e g due funzioni regolari da $[a, b]$ in \mathbf{R} tali che

$$\int_a^b fg dx = 0, \quad \forall g$$

Segue che $f(x) = 0$ in $[a, b]$

Idea della Dimostrazione del lemma 8.1

Supponiamo per assurdo che, ad esempio, $f(x_0) > 0$ per un qualche x_0 in $[a, b]$. Per la regolarità di f essa è positiva in un intorno I di x_0 . Scegliamo ora g in modo che sia $g(x_0) > 0$, g non negativa in I , g nulla fuori da I e ovviamente regolare. Ne segue che

$$\int_a^b fg dx > 0$$

cioè un assurdo.

Usiamo ora il Lemma in (8.23), con ovviamente

$$f = \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial q'} \right)$$

e otteniamo

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial q'} \right) - \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \quad (8.24)$$

Equazioni di Eulero - Lagrange

Il metodo tratteggiato sopra si può estendere a molte situazioni, di cui elenchiamo alcune:

1. F dipende da n funzioni di una variabile q_1, \dots, q_n (esempio 8.4 (catena) funzioni incognite $x(s)$, $y(s)$; nel Cap 9 vedremo esempi in Dinamica dei sistemi olonomi)
2. Le condizioni in a e b (dette condizioni al bordo) non sono le (8.19) (vedi esempio 8.5 in cui il vincolo è solo $u(0) = 0$)
3. F dipende da derivate di ordine superiore al primo (vedi esempio 8.6 (trave inflessa) in cui F dipende da u'')
4. F dipende da una funzione di più variabili (vedi membrane o solido elastico oppure vibrazioni di una corda elastica tesa).

Applichiamo ora il metodo ai nostri tre esempi guida.

Esempio 1 (Catena)

Qui abbiamo

$$F = F(s, x, y, x', y') = \rho g y + \lambda(x'^2 + y'^2)$$

Avendo due funzioni incognite $x(s)$, $y(s)$ otteniamo due equazioni una relativa ad x ed una relativa ad y

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{ds} (2\lambda x') = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{ds} (2\lambda y') - \rho g = 0 \end{aligned} \quad (8.25)$$

(Confrontare con le equazioni (8.7))

Nota di Approfondimento:

Quando F dipende da n funzioni incognite q_1, \dots, q_n e dalle loro derivate prime si ottengono n equazioni di Eulero - Lagrange:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Per vederlo basta porre $q_i = \hat{q}_i + \eta_i g_i$, $i = 1, \dots, n$ e usare i risultati di Analisi per i punti di stazionarietà di funzioni di n variabili.

Esempio 2

Qui abbiamo

$$F = F(x, u, u') = -\rho g u + \frac{E}{2} u'^2$$

e cerchiamo una funzione $u(x)$ regolare e tale che $u(0) = 0$. Quindi quando imponiamo la (8.20) dobbiamo solo chiedere che $g(a) = 0$ mentre $g(b)$ è qualsiasi. Procedendo come indicato precedentemente otteniamo invece dalle (8.22) (8.23) la seguente

$$\frac{d\tilde{J}}{d\eta} = \int_a^b g \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial q'} \right) \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial q'} g \right) (b) = 0, \quad \forall g$$

Dalla arbitrarietà di g segue ora che:

$$\text{equazione di Eulero } \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) - \frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (E u') + \rho g = 0$$

$$\text{e } \left. \frac{\partial F}{\partial q'} \right|_{x=b} = 0 \Rightarrow E u'(l) = 0$$

Quindi col metodo variazionale si ottiene oltre all'equazione di equilibrio anche la condizione al bordo sull'estremo libero $x = l$. (Confrontare con Modello 2, (8.9)).

Esempio 3 (Trave Inflessa)

In questo caso (vedi (8.17))

$$F = F(x, u, u'') = -\rho g u + \frac{\tilde{E}}{2} (u'')^2$$

ed i vincoli sono i 2 appoggi in $x = 0$ e $x = L$ cioè due condizioni

$$u(0) = 0, \quad u(L) = 0$$

Procedendo come già indicato avremo

$$\begin{aligned} J[u] &= \int_0^L F(x, \hat{u} + \eta g, \hat{u}'' + \eta g'') dx = \tilde{J}(\eta) \\ \frac{d\tilde{J}(\eta)}{d\eta} &= \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial u} g + \frac{\partial F}{\partial u''} g'' \right) dx \\ &= \int_0^L \left[\frac{\partial F}{\partial u} g - g' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] dx + \\ &+ \left(g' \frac{\partial F}{\partial u''} \right) (L) - \left(g' \frac{\partial F}{\partial u''} \right) (0) \\ &= \left(\text{integrando di nuovo per parti il secondo termine dentro l'integrale} \right. \\ &\left. \text{e ricordando che } g(0) = 0 \text{ e } g(L) = 0 \right) \end{aligned}$$

$$\int_0^L g \left[\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] dx +$$

$$+ \left(g' \frac{\partial F}{\partial u''} \right) (L) - \left(g' \frac{\partial F}{\partial u''} \right) (0)$$

Imponendo che l'espressione sopra scritta sia nulla *per ogni* g otteniamo usando nuovamente il Lemma e notando che $g'(L)$ e $g'(0)$ sono arbitrari:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) + \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left(\tilde{E} u'' \right) - \rho g = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u''}(L) = 0 \Rightarrow \tilde{E} u''(L) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u''}(0) = 0 \Rightarrow \tilde{E} u''(0) = 0$$

(Confrontare con Modello 3 (8.13))

Nota di Approfondimento:

Come abbiamo anticipato si può usare un metodo variazionale anche per determinare le configurazioni di equilibrio di un continuo bidimensionale o tridimensionale. Ad esempio una membrana elastica soggetta a carico trasversale (tipo peso), e fissata al bordo (tipo la pelle di un tamburo), ha nell'ipotesi di piccole defomazioni una energia potenziale (asse di riferimento verticale verso l'alto)

$$V = \int_{\Omega} \rho g u + \int_{\Omega} \frac{E}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]$$

dove $u(x, y)$ è lo spostamento trasversale dalla configurazione indeformata del punto di coordinate x e y ed Ω è la configurazione indeformata.

Con un procedimento analogo a quello indicato, tenendo conto che adesso

$$F = F(x, y, u, u_x, u_y) = \rho g u + \frac{E}{2} (u_x^2 + u_y^2)$$

si ottiene l'equazione di Eulero seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial F}{\partial u} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (E u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (E u_y) - \rho g &= 0 \end{aligned}$$

Nel caso di E costante l'equazione diventa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = \frac{\rho g}{E}$$

Equazione di Poisson

se $\rho \equiv 0$, Equazione di Laplace

L'analogo vale in 3 dimensioni.

Quindi per i continui unidimensionali la condizione di equilibrio è *un'equazione differenziale ordinaria* (o un sistema) per i continui bi e tridimensionali abbiamo *equazioni a derivate parziali*.

Abbiamo accennato alle equazioni di Poisson e Laplace perchè esse saltano fuori in un impressionante numero di situazioni fisiche anche molto lontane dal problema dell'equilibrio dei corpi elastici.

Nota di Approfondimento:

Abbiamo parlato finora di condizioni di stazionarietà per il funzionale $J[q]$, la nostra richiesta originaria era però di trovare i minimi del funzionale. Per far questo procediamo col metodo indicato, portando lo sviluppo in serie di $\tilde{J}(\eta)$ fino al secondo ordine.

Invece delle (8.22) avremo allora:

$$\tilde{J}(\eta) = \tilde{J}(0) + \left. \frac{d\tilde{J}}{d\eta} \right|_{\eta=0} \eta + \frac{\eta^2}{2} \left. \frac{d^2\tilde{J}}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} + o(\eta^2)$$

In un punto di stazionarietà abbiamo imposto

$$\left. \frac{d\tilde{J}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0$$

quindi il segno di $\tilde{J}(\eta) - \tilde{J}(0)$ dipende da quello di

$$\left. \frac{d^2\tilde{J}}{d\eta^2} \right|_{\eta=0}$$

calcoliamolo:

$$\frac{d^2\tilde{J}}{d\eta^2} = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} g^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial q'} g g' + \frac{\partial^2 F}{\partial q'^2} g'^2 \right) dx$$

Vediamo l'Esempio 2, con

$$F = -\rho g u + \frac{E}{2} u'^2$$

abbiamo:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} = E > 0$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d^2\tilde{J}}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} > 0, \quad \Rightarrow$$

u soluzione della Equazione di Eulero è un minimo per V .

In modo analogo, a parte la complicazione dei calcolo, si dimostra che le soluzioni per gli Esempi 1 e 3 sono minimi per l'energia potenziale.

8.4 Catenaria

Approfondiamo un po' l'Esempio (Catena).

La curva di equilibrio per una *catena omogenea* soggetta al *proprio peso* e fissata alle due estremità è chiamato *Catenaria*. Si dimostra (vedi esempio [LCA] vol I Cap XIV) che, nel sistema di riferimento di fig 8.1, la Catenaria

è il grafico della seguente funzione $y(x)$

$$y(x) = b + a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \quad (8.26)$$

equazione della catenaria

dove a , b ed x_0 sono 3 costanti che si determinano univocamente (purchè $x_B^2 + y_B^2 < L^2$) dalle 3 condizioni seguenti:

•

$$y(0) = 0$$

(vincolo in A)

•

$$y(x_B) = y_B$$

(vincolo in B)

•

$$\int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = L$$

(lunghezza della catena pari ad L)

Esercizio 8.4

Verificare che la catenaria 8.26 è soluzione delle equazioni differenziali di equilibrio (8.25) con densità costante. Dalle (8.7) ricavare lo sforzo di tensione in funzione di x , a meno di una costante moltiplicativa. Supposta nota la massa totale M , calcolare la tensione in funzione di x .

La catenaria è una *bella* curva dotata di molte belle proprietà geometriche e meccaniche. Ricordiamo qui solo la seguente:

un **arco rigido** a forma di catenaria soggetto ad un carico trasversale uniforme e appoggiato alle estremità ha *solo* sforzo interno normale (di trazione se la concavità è rivolta verso l'alto, come una catena, di compressione se la concavità è rivolta verso il basso come l'arcata di un ponte). Si dice anche che è un arco *autoreggiante* o *selfsupporting*, proprio perchè lo sforzo di taglio ed il momento flettente sono nulli; sono evidenti le applicazioni a parti di strutture civili varie. Per convincersi di queste proprietà basta considerare le equazioni differenziali che servono a calcolare gli sforzi interni ad un arco rigido, vedi Cap 6, e cercare la forma geometrica dell'arco tale che T ed M_f sia nulli, si vede subito che si ottengono le equazioni per la catena.

(Nota che il ragionamento vale anche se la densità non è uniforme, ovviamente però in questo caso la forma dell'arco non è la catenaria (8.26)).

Rimandiamo comunque a vari testi già consigliati [LCA], [FDRM], [FM], si può anche, per le proprietà geometriche della catenaria consultare i siti:

- <http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/-history/>
- <http://beltrami.sc.unica.it/minimal/doc004.html>

8.5 Risoluzione degli Esercizi

8.5.1 Risoluzione Esercizio 8.1

Dalle (8.9) con ρ ed E costanti otteniamo

$$u'' = -\frac{\rho}{E}g$$

$$\Rightarrow u'(x) = a - \frac{\rho}{E}gx$$

$$\text{da } u'(l) = 0 \Rightarrow a - \frac{\rho g}{E}l = 0 \Rightarrow a = \rho \frac{\rho}{E}l$$

$$\Rightarrow u'(x) = \frac{\rho g}{E}(l - x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x) &= u(0) + \frac{\rho g}{E} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) = \\ & \text{(essendo } u(0) = 0 \text{)} = \frac{\rho g}{E}x \left(l - \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

Dalle (8.10) otteniamo: $N(x) = Eu' = \rho g(l - x)$.

Notare che l'allungamento totale è

$$u(l) = \frac{\rho g l^2}{E 2} \Rightarrow \frac{u(l)}{l} = \frac{\rho g}{2E}l \xrightarrow{E \rightarrow \infty} 0$$

Nota: Se E è costante e invece $\rho(x)$ varia si ha

$$u'(x) = a - \frac{g}{E} \int_0^x \rho(s) ds = a - \frac{g}{E}m(x)$$

$$u'(l) = 0 = a - \frac{g}{E}M \Rightarrow a = \frac{g}{E}M$$

$$\text{dove } M \text{ è la massa totale} = \int_0^l \rho(s) ds$$

$$\Rightarrow u'(x) = \frac{g}{E}(M - m(x)) \quad (\Rightarrow N(x) = g(M - m(x)))$$

$$\Rightarrow \text{(ricordando che } u(0) = 0 \text{)}$$

$$u(x) = \frac{g}{E} \int_0^x (M - m(s)) ds$$

Notare che essendo ρ ed E positive u è sempre una funzione concava e crescente di x .

8.5.2 Risoluzione Esercizio 8.2

Utilizzando i risultati ottenuti dal Cap 6 conosciamo in entrambi i casi $M_f(x)$ per $x \in [0, L]$, abbiamo allora che (da 8.14)

$$\begin{aligned} u''(x) &= -\frac{M_f(x)}{\tilde{E}}, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \\ \Rightarrow u'(x) &= a - \frac{1}{\tilde{E}} \int_0^x M_f(s) ds = a - \frac{1}{\tilde{E}} \mathcal{G}(x) \\ &\Rightarrow \quad (\text{ricordando che } u(0) = 0) \\ u(x) &= a - \frac{1}{\tilde{E}} \int_0^x \mathcal{G}(s) ds = ax - \frac{1}{\tilde{E}} \mathcal{F}(x) \end{aligned}$$

dove a è tale che

$$\begin{aligned} u(L) &= 0 = aL - \frac{\mathcal{F}(L)}{\tilde{E}} \\ \Rightarrow a &= \frac{\mathcal{F}(L)}{L\tilde{E}} \\ \Rightarrow u(x) &= \frac{1}{\tilde{E}} \left(\frac{x}{L} \mathcal{F}(L) - \mathcal{F}(x) \right) \end{aligned}$$

Notare che $F(x)$ è indipendente da \tilde{E} , quindi $u \rightarrow 0$ per $\tilde{E} \rightarrow \infty$. Per il calcolo effettivo dobbiamo quindi:

data $\rho(x) \rightarrow M_f(x)$ (vedi Cap 6),

$$\begin{aligned} M_f(x) &\rightarrow \mathcal{G}(x) = \int_0^x M_f(s) ds \\ G(x) &\rightarrow \mathcal{F}(x) = \int_0^x \mathcal{G}(s) ds \end{aligned}$$

$$F(x) \rightarrow a = \frac{1}{\tilde{E}} \frac{\mathcal{F}(L)}{L} e$$

$$u(x) = \frac{1}{\tilde{E}} \left(\frac{x}{L} \mathcal{F}(L) - \mathcal{F}(x) \right)$$

(Provare a fare un procedimento automatico)

Caso 1 $\rho = \text{costante} = M/L$

$$\rightarrow M_f(x) = \frac{Mg}{2} x \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

$$\rightarrow \mathcal{G}(x) = \frac{Mg}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3L} \right)$$

$$\rightarrow \mathcal{F}(x) = \frac{Mg}{2} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12L} \right)$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{\tilde{E}} \frac{\mathcal{F}(L)}{L} = \frac{1}{\tilde{E}} \frac{Mg}{2} L^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{24} \frac{MgL^2}{\tilde{E}}$$

$$e u(x) = \frac{1}{\tilde{E}} \left(\frac{MgL^2}{24} x - \frac{Mg}{2} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12L} \right) \right)$$

Notare che la massima deformazione si ha per $x = L/2$ ed è

$$u \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{MgL^3}{\tilde{E}} \cong 0.013 \frac{MgL^3}{\tilde{E}}$$

Caso 2

$$\rho(x) = 6 \frac{M}{L} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

$$\rightarrow M_f(x) = MgL \left(\frac{1}{2} \frac{x}{L} - \frac{x^3}{L^3} + \frac{1}{2} \frac{x^4}{L^4} \right)$$

$$\rightarrow \mathcal{G}(x) = MgL \left(\frac{x^2}{4L} - \frac{x^4}{4L^3} + \frac{x^5}{10L^4} \right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathcal{F}(x) &= MgL \left(\frac{x^3}{12L} - \frac{x^5}{20L^3} + \frac{x^6}{60L^4} \right) \\ \rightarrow a &= \frac{1}{\tilde{E}} MgL^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{60} \right) = \frac{1}{20} \frac{MgL^2}{\tilde{E}} \\ u(x) &= \frac{1}{\tilde{E}} \left(x \frac{MgL^2}{20} - MgL \left(\frac{x^3}{12L} - \frac{x^5}{20L^3} + \frac{x^6}{60L^4} \right) \right) \end{aligned}$$

Anche in questo caso la massima deformazione si ha per $x = L/2$ ed è

$$u\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{61}{3840} \frac{MgL^3}{\tilde{E}} \cong 0.016 \frac{MgL^3}{\tilde{E}}$$

Notare che la deformazione massima è maggiore che nel caso precedente di densità costante, era prevedibile ?

8.5.3 Risoluzione Esercizio 8.3

Abbiamo

$$V[u] = \frac{E}{2} \int_0^l (u')^2 dx$$

Quindi:

1.

$$u \equiv 0 \Rightarrow u' \equiv 0 \Rightarrow V[u] = 0$$

2.

$$u = l \left(1 - \left(\frac{x}{L} - 1 \right)^2 \right) \Rightarrow u' = -2 \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \Rightarrow V[u] = \frac{2}{3} El$$

3.

$$\begin{aligned} u = l \cos \frac{\pi}{2l} (x - l) &\Rightarrow u' = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2l} (x - l) \\ &\Rightarrow V[u] = El \frac{\pi^2}{16} \end{aligned}$$

8.5.4 Risoluzione Esercizio 8.4 (Catenaria)

1. *Verifica*

Noi abbiamo ricavato le equazioni differenziali di equilibrio in funzione della lunghezza d'arco s . Notiamo però che la prima equazione è

$$\frac{d}{ds}(2\lambda x') = 0 \Rightarrow 2\lambda x' = \text{costante} = c$$

Supponiamo $c \neq 0$, sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$\frac{d}{ds} \left(c \left(\frac{y'}{x'} \right) \right) = \rho g \quad (8.27)$$

Avendo espresso la curva di equilibrio come il grafico di $y(x)$ abbiamo che, indicando

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx, \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

Riscriviamo allora le (8.27) nel modo seguente:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \frac{d}{dx} \left(c \frac{dy}{dx} \right) = c \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \frac{d^2 y}{dx^2} = \rho g \quad (8.28)$$

Questa equazione dà ρ come funzione di x , una volta che sia nota la forma esplicita di $y(x)$ e a meno della costante moltiplicativa c .

Per la catenaria (8.26) si ha:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \sinh \left(\frac{x - x_0}{a} \right)$$

$$\sqrt{1 + \dot{y}^2} = \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x - x_0}{a}\right)} = \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x - x_0}{a}\right)} = \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right)$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right)$$

Sostituendo in (8.28) otteniamo

$$\rho = \frac{c}{ag} = \text{costante}$$

cioè in altre parole la catenaria (8.26) è soluzione di (8.28) con ρ costante, che è quanto volevamo verificare

2. *Calcolo di $N(x)$ a meno di una costante moltiplicativa:* dalla prima delle (8.9) otteniamo

$$\frac{d}{ds} \left(N \frac{dx}{ds} \right) = 0 \Rightarrow N \frac{dx}{ds} = \text{costante} = c'$$

Al solito invertendo la funzione $s = s(x)$ abbiamo

$$N \frac{dx}{ds} = N(x) \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{N(x)}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c'$$

$$\Rightarrow N(x) = c' \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad (8.29)$$

Per la catenaria (8.26) abbiamo quindi

$$N(x) = c' \cosh\left(\frac{(x - x_0)}{a}\right)$$

3. *Calcolo effettivo di $N(x)$:*

cioè determinare la costante c' nella formula sopra scritta. Si può procedere in vari modi. un procedimento analitico è il seguente: sostituendo

$$N \frac{dx}{ds} = c'$$

nella seconda delle (8.7), scritta in funzione della variabile indipendente x , si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \frac{d}{dx} \left(c' \frac{dy}{dx} \right) = c' \frac{\ddot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = \rho g \quad (8.30)$$

Per la catenaria (8.26) noi sappiamo a priori che la densità è costante e quindi $\rho = M/L$, con M massa totale, otteniamo subito allora che

$$\begin{aligned} c' \frac{\ddot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = \frac{c'}{a} = \frac{M}{L} g &\Rightarrow c' = \frac{Mg}{L} a \\ \Rightarrow N(x) = \frac{Mg}{L} a \operatorname{cosh} \left(\frac{x - x_0}{a} \right) \end{aligned}$$

Nota: Supponiamo che una data catena di cui conosciamo la massa totale M e la lunghezza L ma non sappiamo se è omogenea o meno, sia sospesa agli estremi a due punti dati, ed esaminiamo la sua configurazione di equilibrio. Da quanto detto nei punti precedenti abbiamo che se la curva di equilibrio è un arco di catenaria allora la catena è omogenea altrimenti no. Nel secondo caso, procedendo come sopra, possiamo ricavare ρ ed N in funzione di x a meno di una costante moltiplicativa (vedi (8.29) e (8.30)). Possiamo anche notare che essendo necessariamente N e $\rho \geq 0$ ($e \neq 0$) la funzione $y(x)$ deve essere convessa. Per calcolare la costante c' possiamo allora procedere nel modo seguente:

$$\text{Dalla (8.30) } \Rightarrow c' \ddot{y} = \rho g \sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

integrando in x tra 0 ed x_B si ha

$$c' (\dot{y}(x_B) - \dot{y}(0)) = g \int_0^{x_B} \rho \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx = gM$$

\Rightarrow (essendo $y(x)$ convessa, $\dot{y}(x_B) - \dot{y}(0) > 0$)

$$c' = \frac{Mg}{[\dot{y}(x_B) - \dot{y}(0)]}$$

Tornando alla nostra catenaria, possiamo ricavare, dalle formule esplicite trovate, alcune proprietà (ottenibili anche per altre vie probabilmente più eleganti).

Con una opportuna traslazione degli assi di riferimento, possiamo riscrivere la catenaria (8.26) nella forma seguente:

$$Y(X) = a \cosh\left(\frac{X}{a}\right)$$

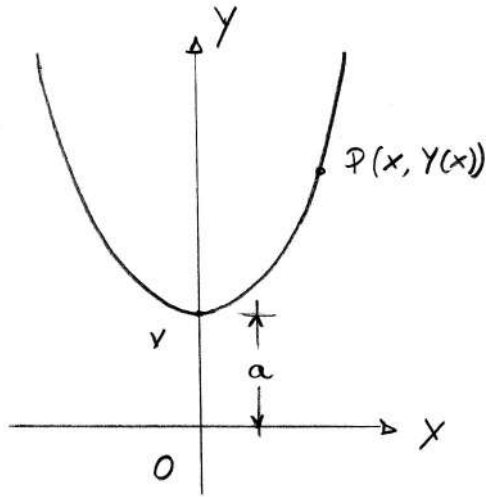


Figure 8.7:

asse X = base della catenaria

Si ha allora che:

$$N(X) = \frac{M}{L} g a \cosh\left(\frac{X}{a}\right) = \rho g Y(X) =$$

peso totale del tratto di catena di lunghezza pari alla distanza di P dalla base

Abbiamo quindi che $N(X)$ è minima nel vertice V (e pari a $\rho g a$) e massima nel punto più alto dell'arco di catenaria di interesse.

Guardando allo sforzo di tensione come vettore ricordiamo che la componente orizzontale di tale sforzo è costante in tutti i punti della curva, in formule

$$N \frac{dx}{ds} \cdot e_1 = \frac{N(X)}{\sqrt{1+y^2}} = \rho g a, \forall X$$

Allora il significato fisico della costante a è

$a =$ rapporto tra la componente orizzontale costante della tensione e il peso specifico della catena

Consideriamo ora una situazione simmetrica, ad esempio:

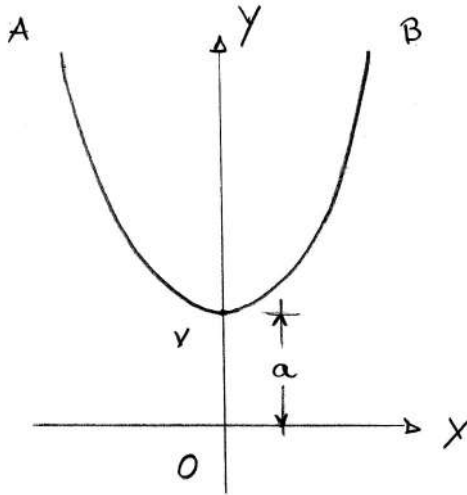


Figure 8.8:

$$x_A = -\frac{l}{2}, \quad x_B = \frac{l}{2}.$$

Imponendo che la lunghezza dell'arco di catenaria AB sia L otteniamo

$$\int_0^{l/2} \sqrt{1 + \dot{Y}^2} dX = \int_0^{l/2} \cosh\left(\frac{X}{a}\right) dX = a \sinh\left(\frac{l}{2a}\right) = \frac{L}{2} \quad (8.31)$$

Notiamo allora che:

se $l < L \Rightarrow$ esiste un *unico* valore *positivo* di a che soddisfa la (8.31)

se $l \rightarrow L^- \Rightarrow a \rightarrow \infty \Rightarrow N \rightarrow \infty$

cioè se la distanza fra i punti di sospensione A e B si avvicina alla lunghezza L della catena la tensione cresce (questo è vero anche in situazioni non simmetriche, solo i calcoli sono più laboriosi e meno evidenti)

In molte applicazioni tecniche si sfrutta proprio il fatto che la tensione è *grande*, rispetto al peso specifico, e si approssima la catenaria con una opportuna parabola, prendendo appunto il *limite per* $a \rightarrow \infty$.

Per chi è interessato ai dettagli matematici, oltre a rimandare al solito [LCA], possiamo notare che

- riguardo alla (8.31): ponendo al esempio

$$z = \frac{l}{2a}$$

si può riscrivere la (8.31) come:

$$\sinh z = \frac{L}{l} z$$

Da uno studio di funzione si vede subito che se $L/l > 1$ c'è una unica soluzione positiva, se $L/l = 1$ l'unica soluzione è $z = 0$.

- per l'approssimazione della catenaria per $a \rightarrow \infty$ ricordiamo che X/a è dell'ordine di $1/a$ per $|X| < l < L$, che lo sviluppo al 4 ordine del $\cosh z$ per $z \cong 0$ è:

$$\cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{2} + o(z^4)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(X) = a \cosh\left(\frac{X}{a}\right) &\cong a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{X^2}{a^2} + o\left(\frac{1}{a^4}\right)\right) \\ &= a + \frac{X^2}{2a} + o\left(\frac{1}{a^3}\right) \\ &\cong a + \frac{X^2}{2a} \end{aligned}$$

- usando la precedente espressione approssimata si ottiene un valore approssimato per a , precisamente, essendo:

$$\sinh(z) = z + \frac{z^3}{6} + o(z^5)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a \sinh\left(\frac{l}{2a}\right) &= a\left(\frac{l}{2a} + \frac{l^3}{48a^3} + o(a^{-5})\right) \\ &= \frac{l}{2} + \frac{l^3}{48a^2} + o(a^{-4}) \\ &\cong \frac{l}{2} + \frac{l^3}{48a^3} = \frac{L}{2} \\ \Rightarrow l + \frac{l^3}{24a^2} = L &\Rightarrow \frac{1}{a^2} \cong 24\frac{(L-l)}{l}\end{aligned}$$

Dispense di Fisica Matematica

Prof. Maura Ughi

13 febbraio 2005

Capitolo 1

Equazioni della Dinamica

1.1 Introduzione, Principio di D'Alembert

Una grossa scorciatoia mentale valida in *Meccanica Classica* è il *Principio di D'Alembert*:

Ogni problema di dinamica si può considerare come un problema di statica aggiungendo alle forze agenti su ogni punto B , del sistema in esame, le forze $-\frac{dp_B}{dt}$, p_B quantità di moto di B

Il principio è una interpretazione intelligente e utile delle leggi di Newton

$$\underline{F}_B = \frac{d}{dt} \underline{p}_B \Rightarrow \underline{F}_B - \frac{d\underline{p}_B}{dt} = \underline{0}$$

Per un singolo punto materiale o per un rigido il Principio si può interpretare come il punto di vista di un osservatore *solidale*.

Per tale osservatore il sistema è in equilibrio purchè si tenga conto delle forze d'inerzia, appunto $-\left(\frac{dp_B}{dt}\right)$.

Le questioni di statica si affrontano, essenzialmente, in 3 modi:

1. stazionarietà dell'energia potenziale per i sistemi conservativi,
2. Principio dei Lavori Virtuali,

3. Equazioni Cardinali della Statica, usate con intelligenza.

Il Principio di D'Alembert ci permette di usare gli stessi 3 metodi in dinamica. Precisamente

1. → equazioni di Lagrange conservative,
2. → equazioni di Lagrange non conservative,
3. → Equazioni Cardinali della Dinamica,

Nelle applicazioni considereremo i sistemi costituiti da rigidi ed è quindi necessario calcolare l'energia cinetica K ed il momento angolare totale $\underline{L}(O)$ per i rigidi

Un altro strumento importante è il teorema delle forze vive ($\frac{d}{dt}K = \text{potenza delle forze}$) che supponiamo noto dalla Fisica e useremo nelle applicazioni al caso particolare ed importante dei sistemi ad un grado di libertà.

1.2 Sistemi olonomi conservativi

Dato un sistema olonomo conservativo ad l gradi di libertà, il moto naturale da una data configurazione di *partenza* $\underline{q}(t_0) = (q_1(t_0), \dots, q_l(t_0))$ ad una data configurazione di *arrivo* $\underline{q}(t_1) = (q_1(t_1), \dots, q_l(t_1))$ è dato dal *principio di minima azione* o *di Hamilton* cioè minimizza

$$\text{l'azione } \mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt, \quad \mathcal{L} = K - V$$

tra tutti i possibili moti che hanno le stesse configurazioni di partenza e di arrivo.

Useremo le seguenti notazioni

- K = energia cinetica del sistema
- V = energia potenziale del sistema
- \mathcal{L} = lagrangiana del sistema

Poichè \mathcal{L} dipende da $\underline{q}, \underline{\dot{q}}$ e t , procedendo come nel capitolo sulla statica dei continui delle dispense di Meccanica Razionale si ottengono le equazioni

di Eulero per il funzionale \mathcal{A} , dette più frequentemente equazioni di Eulero - Lagrange, cioè

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (1.1)$$

Si ottengono direttamente in modo *automatico* tante equazioni di moto quanti sono i gradi di libertà del sistema.

1.3 Sistemi olonomi generali

Dal Principio dei Lavori Virtuali e dal Principio di D'Alembert otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{S}} \left(\underline{F}_B - \frac{d}{dt} \underline{p}_B \right) \cdot \delta \underline{x}_B &= 0, \quad \forall \delta \underline{x}_B \text{ virtuale} \\ \left(\text{essendo } \delta \underline{x}_B &= \sum_{i=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \delta q_i \right) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^l \left(\sum_{B \in \mathcal{S}} \frac{d \underline{p}_B}{dt} \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) \delta q_i &= \sum_{i=1}^l \left(\sum_{B \in \mathcal{S}} \underline{F}_B \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) \delta q_i \end{aligned}$$

Notiamo ora che:

$$\sum_{B \in \mathcal{S}} \underline{F}_B \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} = Q_i = \text{forza generalizzata } i - \text{esima}$$

Definiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{S}} \frac{d \underline{p}_B}{dt} \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} &= \left(\dot{\mathcal{P}} \right)_i \\ \Rightarrow \left(\dot{\mathcal{P}} \right)_i &= Q_i, \quad i = 1, \dots, l \end{aligned}$$

Le quantità $\left(\dot{\mathcal{P}} \right)_i = \sum_{B \in \mathcal{S}} \left(\frac{d \underline{p}_B}{dt} \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right)$, che potremmo chiamare *derivate delle quantità di moto generalizzate*, sono legate all'energia cinetica nel seguente modo:

Lemma

$$\left(\dot{\mathcal{P}}\right)_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i}$$

Otteniamo quindi per i sistemi olonomi le equazioni

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i \quad (1.2)$$

Equazioni di Lagrange non conservative.

Notiamo subito che, se invece il sistema è conservativo, si ritrovano le equazioni di Lagrange ottenute dal principio di minima azione nel caso conservativo. Infatti:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(K - V)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(K - V)}{\partial q_i}$$

(poichè V non dipende dalle \dot{q}_i , $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$) =

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

(poichè per i sistemi conservativi $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$) =

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} - Q_i = 0$$

Nota di Approfondimento Per chi è interessato diamo la dimostrazione del Lemma, che si basa su un uso intelligente delle derivate parziali e delle regole di derivazione di una funzione composta.

Dimostrazione del Lemma

1.

$$\begin{aligned} (\dot{\mathcal{P}})_i &= \sum_{B \in \mathcal{S}} \frac{d\underline{p}_B}{dt} \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} = \\ &= \sum_{B \in \mathcal{S}} \left[\frac{d}{dt} \left(\underline{p}_B \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) - \underline{p}_B \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{B \in \mathcal{S}} \underline{p}_B \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) - \sum_{B \in \mathcal{S}} \underline{p}_B \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

2.

$$\sum_{B \in \mathcal{S}} \underline{p}_B \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \underline{v}_B &= \frac{d}{dt} \underline{x}_B(q(t), t) = \sum_{j=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial \underline{v}_B}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \Rightarrow \sum_{B \in \mathcal{S}} \underline{p}_B \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} = \\ &= \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \underline{v}_B \cdot \frac{\partial \underline{v}_B}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \|\underline{v}_B\|^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} K \quad (\text{essendo } K = \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \|\underline{v}_B\|^2) \end{aligned}$$

3.

$$\sum_{B \in \mathcal{S}} \underline{p}_B \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial K}{\partial q_i}$$

Infatti si ha che:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \underline{v}_B}{\partial q_i}$$

(posto $f(\underline{q}(t), t) = \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i}$ si ha infatti che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\underline{q}(t), t) &= \sum_{j=1}^l \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^l \frac{\partial^2 \underline{x}_B}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \underline{x}_B}{\partial q_i \partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t} \right) = \end{aligned}$$

(vedi sopra la forma di \underline{v}_B) $\frac{\partial \underline{v}_B}{\partial q_i}$.

Segue che

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{S}} \underline{p}_B \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) &= \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \underline{v}_B \cdot \frac{\partial \underline{v}_B}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \|\underline{v}_B\|^2 \right) = \frac{\partial K}{\partial q_i} \end{aligned}$$

1.4 Equazioni Cardinali della Dinamica

Dalle Equazioni Cardinali della Statica e dal Principio di D'Alembert si ha:

$$\underline{R}^e - \sum_{B \in \mathcal{S}} \dot{\underline{p}}_B = \underline{0} \Rightarrow \text{detto } \underline{P} = \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \underline{v}_B =$$

= (per definizione del centro di massa G) $M \underline{v}_G$

$$\Rightarrow \underline{R}^e = \frac{d}{dt} \underline{P} = \frac{d}{dt} (M \underline{v}_G).$$

Passiamo all'equazione per i momenti:

$$\underline{M}^e(O) - \sum_{B \in \mathcal{S}} (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge \dot{\underline{p}}_B = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \underline{M}^e(O) &= \sum_{B \in \mathcal{S}} (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge \dot{\underline{p}}_B \\ &= \sum_{B \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{d}{dt} [(\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge \underline{p}_B] - \left(\frac{d}{dt} (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \right) \wedge \underline{p}_B \right\} \\ &\quad \left(\text{detto } \underline{L}(O) = \sum_{B \in \mathcal{S}} (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge \underline{p}_B \right) = \\ &\quad \frac{d}{dt} \underline{L}(O) - \sum_{B \in \mathcal{S}} (\underline{v}_B - \underline{v}_O) \wedge m_B \underline{v}_B = \\ &\quad (\text{essendo } \underline{v}_B \wedge \underline{v}_B = \underline{0}) = \\ &\quad \frac{d}{dt} \underline{L}(O) + \underline{v}_O \wedge \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \underline{v}_B \\ &= \frac{d}{dt} \underline{L}(O) + \underline{v}_O \wedge \underline{P}. \end{aligned}$$

Riassumendo, detti:

$$\underline{P} = \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \underline{v}_B = M \underline{v}_G \quad \text{quantità di moto del sistema}$$

$$\underline{L}(O) = \sum_{B \in \mathcal{S}} (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge m_B \underline{v}_B \quad \text{momento angolare del sistema}$$

E.C.D.

$$\underline{R}^e = \frac{d}{dt} \underline{P}$$

$$\underline{M}^e(O) = \frac{d}{dt} \underline{L}(O) + \underline{v}_O \wedge \underline{P}$$

Notiamo subito un'ennesima proprietà del centro di massa:

$$\underline{M}^e(G) = \frac{d}{dt}\underline{L}(G) + \underline{v}_G \wedge M \underline{v}_G = \frac{d}{dt}\underline{L}(G)$$

cioè se il polo O coincide con il centro di massa G la derivata del momento angolare del sistema è pari al momento delle forze esterne (rispetto a G ovviamente) *anche se il centro di massa si muove*. Ovviamente se il polo O è fisso il termine con \underline{v}_O è nullo.

1.5 Energia cinetica e momento angolare per i rigidi

Per calcolare entrambe le quantità useremo la formula di Poisson (vedi Cap. 3 delle Dispense di Meccanica Razionale) per le velocità dei punti di un rigido, quindi ricordare bene che quanto segue è applicabile *solo ad un sistema rigido*.

Energia Cinetica K

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B \|\underline{v}_B\|^2 \\ &\quad (\text{formula di Poisson} : \underline{v}_B = \underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O)) \cdot (\underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B \|\underline{v}_O\|^2 \quad (= I_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{\omega} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O)) \cdot (\underline{\omega} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O)) \quad (= I_2) \\ &\quad + \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B \underline{v}_O \cdot \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \quad (= I_3) \end{aligned}$$

$I_1 = 1/2 M v_O^2$ M massa totale (termine dovuto alla traslazione)

I_2 : (usando la solita proprietà $\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \wedge \underline{c}$ e raccogliendo a fattor comune il primo $\underline{\omega}$ della formula)

$$I_2 = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge [\underline{\omega} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O)]$$

(ricordando la definizione delle trasformazioni d'inerzia \mathbf{I}_O (vedi Cap. 7 delle Dispense di Meccanica Razionale)) =

$$\frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \underline{\omega}$$

(termine dovuto a precessione)

I_3 : (raccogliendo a fattor comune \underline{v}_O ed $\underline{\omega}$)

$$\underline{v}_O \cdot \underline{\omega} \wedge \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_O)$$

(solita definizione del centro di massa G) =

$$\underline{v}_O \cdot \underline{\omega} \wedge M (\underline{x}_G - \underline{x}_O)$$

(termine misto traslazione - precessione)

Ulteriore proprietà di G è quindi che il termine misto I_3 è nullo se si prende $O \equiv G$ (questa è un'applicazione ai rigidi del Teorema di Kónig più generale)

Notiamo inoltre che, se durante il moto il rigido ha un *punto fisso* O , I_1 ed I_3 sono nulli essendo $\underline{v}_O = \underline{0}$ in tal caso.

Se il rigido *ruota intorno ad un asse fisso*, preso O un punto di tale asse ed \underline{u} il versore di tale asse, ritroviamo la formula elementare (essendo $\underline{\omega} = \omega \underline{u}$)

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \omega \underline{u} \cdot \mathbf{I}_O (\omega \underline{u}) = \frac{1}{2} \omega^2 \underline{u} \cdot \mathbf{I}_O \underline{u} \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 I_r, \quad (r = \text{asse di rotazione fisso}) \end{aligned}$$

Se il rigido *trasla*, tutti i suoi punti hanno la stessa velocità ed $\underline{\omega}$ è nullo, quindi I_2 ed I_3 sono nulli, O è un punto qualsiasi del rigido, ad esempio G .

Riassumendo:

- moto rigido generico

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \mathbf{I}_G (\underline{\omega})$$

- moto rigido con un punto O fisso (precessione)

$$K = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \mathbf{I}_O (\underline{\omega})$$

- moto rigido con un asse fisso, (r = asse fisso)

$$K = \frac{1}{2} I_r \omega^2$$

- moto rigido di traslazione

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2$$

Per i sistemi *rigidi piani* in moto sul loro piano, il calcolo è semplificato notevolmente perchè $\underline{\omega}$ ha sempre direzione normale al piano del moto, detto al solito \underline{e}_3 l'asse ortogonale al piano del moto avremo che

$$\underline{\omega} \cdot \mathbf{I}_O (\underline{\omega}) = \omega^2 \underline{e}_3 \cdot \mathbf{I}_O (\underline{e}_3) = \omega^2 I_{3O}$$

dove I_{3O} è il momento d'inerzia rispetto alla retta per O ortogonale al piano del moto

Riassumendo per i rigidi piani:

- moto rigido piano generico

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{3G} \omega^2$$

- moto rigido piano con un punto O fisso

$$K = \frac{1}{2} I_{3O} \omega^2$$

- moto rigido piano di traslazione

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2$$

Esempio 1.1 (*Biella Manovella, calcolo di K*)

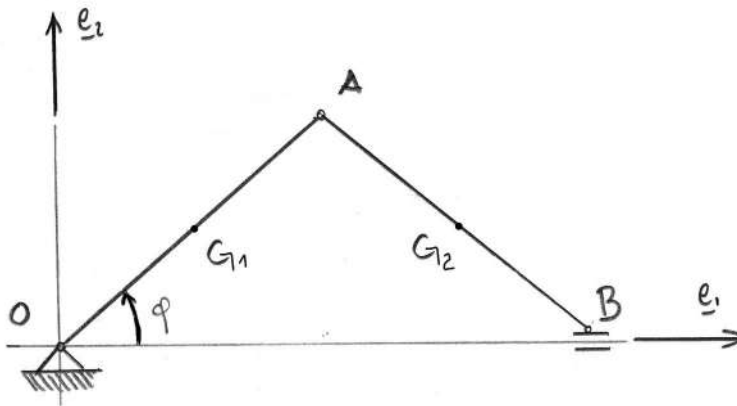


Figura 1.1:

aste omogenee, uguali, lunghezza l e massa m

$$K = K_{OA} + K_{AB}$$

- K_{OA} : OA ruota intorno ad O con velocità angolare $\dot{\varphi} \underline{e}_3 \Rightarrow$

$$K_{OA} = \frac{1}{2} I_{3O} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\varphi}^2$$

- K_{AB} : AB ha moto rototraslatorio con velocità angolare $-\dot{\varphi} \underline{e}_3 \Rightarrow$

$$K_{AB} = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\varphi}^2$$

Per calcolare $v_{G_2}^2$ si possono seguire varie strade, ad esempio scrivere le coordinate del centro di massa di AB e derivarle rispetto al tempo per ottenere \underline{v}_G :

$$\begin{aligned} \underline{x}_{G_2}(t) &= \frac{3}{2} l \cos \varphi(t) \underline{e}_1 + \frac{l}{2} \sin \varphi(t) \underline{e}_2 \\ \underline{v}_{G_2} &= \frac{d\underline{x}_{G_2}}{dt} = \frac{l}{2} (-3 \sin \varphi \underline{e}_1 + \cos \varphi \underline{e}_2) \frac{d\varphi}{dt} \\ \|\underline{v}_{G_2}\|^2 &= \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 (9 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \\ &= \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 (8 \sin^2 \varphi + 1) \end{aligned}$$

Sommando i vari contributi si ottiene:

$$K = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{2}{3} + 2 \sin^2 \varphi \right)$$

Momento Angolare $\underline{L}(O)$

Distinguiamo due casi:

1. Se il polo O , rispetto a cui si calcola il momento, è un punto del rigido allora per ogni altro punto B del rigido $\underline{v}_B = \underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O)$, quindi:

$$O \in \mathfrak{R}, \quad \underline{L}(O) = \sum_{B \in \mathfrak{R}} (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge m_B \underline{v}_B$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge [\underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O)] \\
&= \left[\sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \right] \wedge \underline{v}_O + \\
&+ \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge [\underline{\omega} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O)] =
\end{aligned}$$

(per la definizione di G e della trasformazione d'inerzia \mathbf{I}_O)

$$= M(\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge \underline{v}_O \text{ (termine di traslazione)} + \mathbf{I}_O(\underline{\omega}) \text{ (termine di precessione)}$$

Notiamo che:

$$\begin{aligned}
O \text{ fisso} &\Rightarrow \underline{L}(O) = \mathbf{I}_O(\underline{\omega}) \\
O \equiv G &\Rightarrow \underline{L}(G) = \mathbf{I}_G(\underline{\omega})
\end{aligned}$$

2. Se il polo O non appartiene al rigido non si può usare la formula di Poisson, si può però usare la formula di trasporto dei momenti per trasportare in un conveniente punto A del rigido, quindi

$$\begin{aligned}
O \notin \mathfrak{R}, A \in \mathfrak{R}, \underline{L}(O) &= \sum_{B \in \mathfrak{R}} (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge m_B \underline{v}_B \\
&= \sum_{B \in \mathfrak{R}} [(\underline{x}_B - \underline{x}_A) + (\underline{x}_A - \underline{x}_O)] \wedge m_B \underline{v}_B \\
&\quad \text{(con } A \in \mathfrak{R} \text{ fissato a piacere)} \\
&= \underline{L}(A) + (\underline{x}_A - \underline{x}_O) \wedge \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B \underline{v}_B \\
&= \text{(essendo } \underline{P} = \sum_{B \in \mathfrak{R}} m_B \underline{v}_B = M \underline{v}_G \text{)} \\
&= \underline{L}(A) + (\underline{x}_A - \underline{x}_O) \wedge M \underline{v}_G
\end{aligned}$$

(Consiglio: non provare a mandare a memoria le formule precedenti, cercare di capire il procedimento)

Notiamo che nella dinamica di un rigido le informazioni essenziali sulla sua inerzia sono quelle relative sia al centro di massa che alla trasformazione d'inerzia.

Esempio 1.2

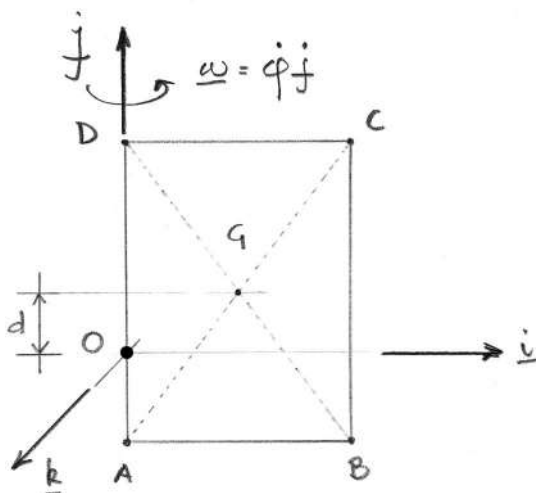


Figura 1.2:

$\mathcal{S}(O; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ terna solidale, rettangolo omogeneo in rotazione intorno ad AD , φ angolo di rotazione, cerniera cilindrica in O

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{j}$$

$$\underline{L}(O) = \mathbf{I}_O (\underline{\omega}) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{12}\dot{\varphi} \\ I_{22}\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = I_{12}\dot{\varphi} \underline{i} + I_{22}\dot{\varphi} \underline{j}$$

Notare che $\underline{L}(O)$ non è parallelo ad $\underline{\omega}$ se $d \neq 0$, a causa del momento deviatore I_{12} , (vedi Cap. 7 delle Dispense di Meccanica Razionale, (7.24)) che fa sì che \underline{j} non sia asse principale d'inerzia relativo ad O .

Nel caso dei rigidi piani (in moto nel loro piano, quindi non nell'esempio precedente) c'è al solito una grossa semplificazione. Infatti in tal caso $\underline{\omega}$ è sempre diretto ortogonalmente al piano e l'asse ortogonale è sempre un asse principale. Quindi *per i rigidi piani*

$$\underline{L}(O) = \mathbf{I}_O (\underline{\omega}) = I_{3O} \underline{\omega}$$

avendo al solito chiamato $\underline{e}_3 = \underline{k}$ l'asse ortogonale al piano.

Esempio 1.3 (*Biella - manovella, calcolo di $\underline{L}(O)$*)

$$\underline{L}(O) = \underline{L}_{OA}(O) + \underline{L}_{AB}(O)$$

(vedi esempio 1.1)

$$\underline{L}_{OA}(O) : O \in OA \Rightarrow \underline{L}_{OA}(O) = \frac{ml^2}{3} \dot{\varphi} \underline{e}_3$$

$$\underline{L}_{AB}(O) : O \notin AB, \underline{L}_{AB}(O) = \underline{L}_{AB}(G_2) + (\underline{x}_{G_2} - \underline{x}_O) \wedge m \underline{v}_{G_2}$$

$$\underline{L}_{AB}(G_2) = -\frac{ml^2}{12} \dot{\varphi} \underline{e}_3$$

(ricordare che la velocità angolare di AB è $-\dot{\varphi} \underline{e}_3$)

$$\begin{aligned} (\underline{x}_{G_2} - \underline{x}_O) \wedge m \underline{v}_{G_2} &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{3}{2}l\cos\varphi & \frac{l}{2}\sin\varphi & 0 \\ -m\frac{3}{2}l\sin\varphi\dot{\varphi} & m\frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}ml^2\dot{\varphi} \underline{e}_3 \\ &\Rightarrow \underline{L}(O) = ml^2\dot{\varphi} \underline{e}_3 \end{aligned}$$

1.6 Applicazioni

1. Rigido in rotazione intorno ad un asse fisso

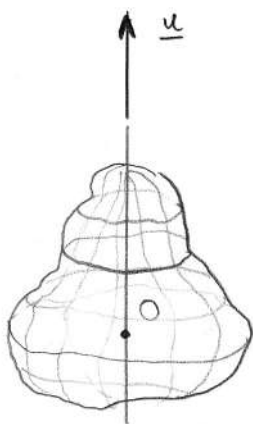


Figura 1.3:

Supponiamo che l'asse di rotazione sia fissato da una cerniera cilindrica liscia in O , e sia \underline{u} il versore dell'asse di rotazione. Detto φ l'angolo tra un piano solidale al rigido ed un piano fisso, entrambi contenenti l'asse di rotazione, avremo, applicando le equazioni Cardinali della Dinamica:

$$\underline{R}^e = \underline{R}^{e,a} + \underline{F}_O^r = \dot{\underline{P}}$$

$$\underline{M}^e(O) = \underline{M}^{e,a}(O) + \underline{\mu}_O^r = \frac{d}{dt} \underline{L}(O)$$

dove:

- $\underline{R}^{e,a}$ = risultante delle forze attive
- \underline{F}_O^r = forza di reazione in O , 3 componenti incognite
- $\underline{M}^{e,a}(O)$ = momento delle forze attive esterne rispetto alla cerniera in O
- $\underline{\mu}_O^r$ = momento delle forze esterne di reazione della cerniera, nell'ipotesi che la cerniera sia liscia avremo $\underline{\mu}_O^r \cdot \underline{u} = 0$ cioè $\underline{\mu}_O^r$ non ha componente lungo l'asse di rotazione, le altre due componenti di $\underline{\mu}_O^r$ sono incognite.

Avremo quindi 5 incognite di reazione ed una di configurazione (cioè φ).

Scelta una terna S solidale con origine in O ed uno degli assi coincidenti con \underline{u} , per esempio $\underline{u} = \underline{j}$, (assi \underline{i} e \underline{k} ortogonali) e scritta la matrice d'inerzia \mathbf{I}_O nella terna *solidale* avremo

$$\underline{L}(O) = \mathbf{I}_O (\underline{\omega}) = \dot{\varphi} \mathbf{I}_O (\underline{u}) = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\underline{L}(O) = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} I_{12} \\ I_{22} \\ I_{23} \end{pmatrix} = \dot{\varphi} (I_{12} \underline{i} + I_{22} \underline{j} + I_{23} \underline{k})$$

Dobbiamo ora derivare $\underline{L}(O)$ rispetto al tempo, tenendo conto che dipendono dal tempo sia $\dot{\varphi}$ sia il vettore $\mathbf{I}_O (\underline{u}) = I_{12} \underline{i} + I_{22} \underline{j} + I_{23} \underline{k}$ solidale al rigido e quindi variabile col tempo nel sistema fisso. Per calcolare tale derivata usiamo ancora le formule di Poisson, poichè per un qualsiasi vettore solidale al rigido \underline{w} avremo:

$\underline{w} = \underline{x}_A - \underline{x}_B$, A, B punti del rigido

$$\Rightarrow \frac{d\underline{w}}{dt} = \frac{d}{dt} (\underline{x}_A - \underline{x}_B) \text{ (scelto B come polo}$$

$$\text{ nelle formule di Poisson)} = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_A - \underline{x}_B) =$$

$$= \underline{\omega} \wedge \underline{w} \text{ (formula di derivazione cinematica).}$$

Nota:

Si può dimostrare che per ogni vettore \underline{v} dipendente dal tempo si ha:

$$\left(\frac{d\underline{v}}{dt} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{d\underline{v}}{dt} \right)_S + \underline{\omega} \wedge \underline{v},$$

dove Σ è il sistema fisso ed S il sistema solidale.

Tornando la nostro momento angolare avremo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\underline{L}(O) &= \mathbf{I}_O (\dot{\underline{\omega}}) + \underline{\omega} \wedge \mathbf{I}_O (\underline{\omega}) \\ &= \ddot{\varphi} \mathbf{I}_O (\underline{u}) + \dot{\varphi}^2 \underline{u} \wedge \mathbf{I}_O (\underline{u})\end{aligned}$$

e con la scelta di assi precedentemente fatta avremo in componenti

$$\frac{d\underline{L}(O)}{dt} = (I_{12} \ddot{\varphi} + I_{23} \dot{\varphi}^2) \underline{i} + I_{22} \ddot{\varphi} \underline{j} + (I_{23} \ddot{\varphi} - I_{12} \dot{\varphi}^2) \underline{k}$$

L'equazione Cardinale dei momenti scritta nelle 3 direzioni solidali $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ (ricordando che $\underline{\mu}_O^r \cdot \underline{j} = 0$) diventa

$$\begin{aligned}\underline{i} &\rightarrow \underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{i} + \underline{\mu}_O^r \cdot \underline{i} = I_{12} \ddot{\varphi} + I_{23} \dot{\varphi}^2 \\ \underline{j} &\rightarrow \underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{j} = I_{22} \ddot{\varphi} \\ \underline{k} &\rightarrow \underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{k} + \underline{\mu}_O^r \cdot \underline{k} = I_{23} \ddot{\varphi} - I_{12} \dot{\varphi}^2\end{aligned} \quad (1.3)$$

La seconda equazione, cioè quella in direzione dell'asse di rotazione, dà l'equazione di moto, le altre due permettono di calcolare il momento di reazione $\underline{\mu}_O^r$. Notiamo che se I_{12} e I_{23} sono diversi da zero, cioè se l'asse di rotazione *non* è asse principale d'inerzia rispetto ad O , il momento di reazione dipende fortemente oltre che dalla parte *statica* $\underline{M}^{e,a}(O)$ anche dalla parte d'inerzia dovuta a $\ddot{\varphi}$, $\dot{\varphi}^2$, I_{12} , I_{23} . Il nome di momenti deviatori dato ai termini non diagonali della matrice d'inerzia viene appunto dal fatto che *tendono a far deviare* l'asse di rotazione ed influenzano quindi le reazioni della cerniera O .

Per guardare tutto da un altro punto di vista, notiamo che se \underline{u} è un Asse Principale d'Inerzia rispetto ad O , allora

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_O (\underline{\omega}) &= \dot{\varphi} \mathbf{I}_O (\underline{u}) = \dot{\varphi} I_r \underline{u}, \quad r = \text{asse di rotazione} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\underline{L}(O) &= \ddot{\varphi} I_r \underline{u} \quad (\text{essendo } \underline{u} \wedge \mathbf{I}_O (\underline{u}) = \underline{u} \wedge I_r \underline{u} = \underline{0}) \\ &\quad (\text{da E.C.D. dei momenti}) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{u} &= I_r \ddot{\varphi}, \text{ equazione di moto} \\ \underline{\mu}_O^r &= -(\underline{M}^{e,a}(O) - \underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{u})\end{aligned}$$

cioè il momento di reazione ha solo la parte *statica*.

Ovviamente la prima equazione Cardinale da \underline{F}_O^r .

Nota : L'equazione di moto per un rigido con asse fisso si può ottenere direttamente dalle equazione di Lagrange, infatti

$$K = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \mathbf{I}_O (\underline{\omega}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \underline{u} \cdot \mathbf{I}_O (\underline{u}) = \frac{1}{2} I_r \dot{\varphi}^2$$

r = asse di rotazione

Q_φ = unica forza generalizzata, per formula lavoro virtuale dei rigidi = $\underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{u}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_r \dot{\varphi}^2 \right) = I_r \ddot{\varphi} = \\ &= Q = \underline{M}^{e,a}(O) \cdot \underline{u}\end{aligned}$$

Nel caso dell'Esempio 1.2, supponendo che \underline{j} sia un asse verticale e che l'unica forza sia il peso, avremo che l'energia potenziale è costante, perchè il centro di massa G si muove su un piano orizzontale quindi ha quota costante. Avremo allora

$$Q_\varphi = -\frac{dV}{d\varphi} = 0 \Rightarrow I_r \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \text{costante} \\ &= \dot{\varphi}|_{t=0} \end{aligned}$$

Le Equazioni Cardinali permettono di calcolare le reazioni vincolari.

2. *Sistemi ad un grado di libertà con forze dipendenti solo dalla configurazione.*

Detta q l'unica coordinata libera, stiamo facendo l'ipotesi che l'unica forza generalizzata dipenda solo da q , quindi, vedi Cap 4 delle Dispense di Meccanica Razionale, possiamo definire una *energia potenziale*

$$V = - \int Q(q) dq \Rightarrow Q = -\frac{dV}{dq}$$

Oltre a scrivere l'equazione di moto nella forma conservativa

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad \mathcal{L} = K - V$$

possiamo scrivere l'integrale dell'energia cioè

$$K + V = E = K + V|_{t=0}$$

Usando le due equazioni, possiamo allora esprimere \dot{q}^2 e \ddot{q} come *funzioni esplicite* di q .

Oltre a permettere di studiare qualitativamente il moto del sistema, senza integrare prima le equazioni di moto, questo permette (insieme alle E.C.D.) di calcolare *esplicitamente in funzione di q* le reazioni dei vincoli presenti.

Esempio 1.4 (*biella - manovella, dinamica*)

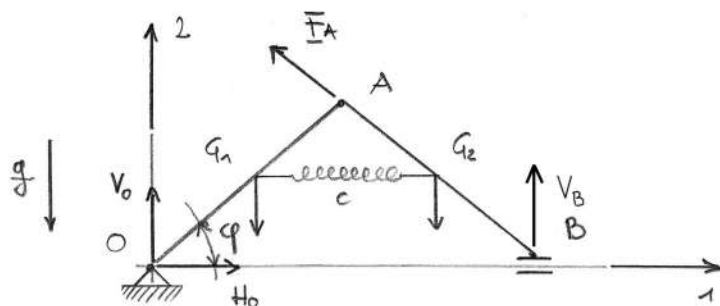


Figura 1.4:

aste omogenee, uguali, lunghezza l , massa m , piano verticale e \underline{F}_A carico follower.

- Equazione di moto

Abbiamo già calcolato l'energia cinetica K nell'esempio 1.1

$$K = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi \right)$$

Per calcolare l'energia potenziale procediamo come in Statica (ancora Principio di D'Alembert)

$$\begin{aligned} V_{peso} &= 2mg\frac{l}{2} \sin\varphi = mgl \sin\varphi \\ V_{molla} &= \frac{c}{2}l^2\cos^2\varphi \\ V_{forza\ follower} &= \int -F_A l d\varphi = -F_A l \varphi \\ \Rightarrow \mathcal{L} = K - V &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi \right) + \\ &\quad - \left(mgl \sin\varphi + \frac{c}{2}l^2\cos^2\varphi - F_A l \varphi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} \left(ml^2 \dot{\varphi} \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2 \varphi \right) \right) + \\
&- [2ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + \\
&- (mgl \cos \varphi - cl^2 \sin \varphi \cos \varphi - F_{Al})] \\
&= ml^2 \ddot{\varphi} \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2 \varphi \right) + ml^2 \dot{\varphi}^2 4\sin \varphi \cos \varphi + \\
&- 2ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + mgl \cos \varphi + \\
&- cl^2 \sin \varphi \cos \varphi - F_{Al} \\
&= ml^2 \ddot{\varphi} \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2 \varphi \right) + 2ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + \\
&+ mgl \cos \varphi - cl^2 \sin \varphi \cos \varphi - F_{Al} = 0
\end{aligned}$$

- Conservazione dell'Energia

$$\begin{aligned}
K + V &= \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2 \varphi \right) + \\
&+ mgl \sin \varphi + \frac{c}{2} l^2 \cos^2 \varphi - F_{Al} \varphi \\
&= E = K + V|_{t=0}
\end{aligned}$$

Notare che *assegnando* per $t = 0$ $\varphi(0) = \varphi_0$ e $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$, E ha un valore ben definito, precisamente

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} ml^2 \omega_0^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2 \varphi_0 \right) + \\
&+ mgl \sin \varphi_0 + \frac{c}{2} l^2 \cos^2 \varphi_0 - F_{Al} \varphi_0
\end{aligned}$$

Dalla precedente relazione possiamo ricavare $\dot{\varphi}^2$ come funzione di φ , $\dot{\varphi}^2 = f(\varphi)$

$$\begin{aligned}
(\dot{\varphi})^2 &= \frac{2}{ml^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi\right)} (E - V(\varphi)) \\
&= \frac{2}{ml^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi\right)} \left(E - mgl\sin\varphi - \frac{c}{2}l^2\cos^2\varphi + F_{Al}\varphi\right) \\
&= f(\varphi)
\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione di moto, possiamo ricavare $\ddot{\varphi}$ in funzione di φ , $\ddot{\varphi} = g(\varphi)$

$$\begin{aligned}
(\ddot{\varphi}) &= \frac{1}{ml^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi\right)} \left[-2ml^2 f(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + \right. \\
&\quad \left. - mgl\cos\varphi + cl^2\sin\varphi\cos\varphi + F_{Al}\right] = g(\varphi)
\end{aligned}$$

- Calcolo della reazione in B in funzione di φ .

Procedendo come in Statica e usando il Principio di D'Alembert ed i calcoli dell'Esempio 1.3

$$\begin{aligned}
\underline{M}^e(O) = \frac{d}{dt}\underline{L}(O) &\Rightarrow V_B 2l\cos\varphi + F_{Al} + \\
&\quad - mg\frac{l}{2}\cos\varphi - mg\frac{3}{2}l\cos\varphi \\
&= \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = ml^2\ddot{\varphi} \\
\Rightarrow V_B &= \frac{ml}{2\cos\varphi}\ddot{\varphi} \text{ (parte dinamica o d'inerzia)} \\
&\quad + \frac{1}{2l\cos\varphi}(-F_{Al} + 2mgl\cos\varphi) \text{ (parte statica)}
\end{aligned}$$

Avendo ricavato $\ddot{\varphi} = g(\varphi)$ avremo quindi V_B esplicitamente, come funzione di φ , senza avere integrato l'equazione di moto.

$$\left(V_B = \frac{ml}{2\cos\varphi}g(\varphi) + \frac{1}{2l\cos\varphi}(-F_{Al} + 2mgl\cos\varphi) \right)$$

Esercizio 1.1

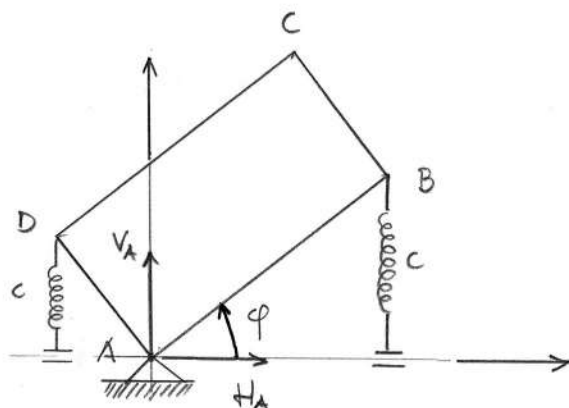


Figura 1.5:

piano orizzontale, rettangolo omogeneo

$$\overline{AB} = 2l, \overline{BC} = l$$

1. scrivere le equazioni di moto
2. date le condizioni iniziali $\varphi(0) = \pi/4$, $\dot{\varphi}_0(0) = \omega_0$ scrivere la conservazione dell'energia
3. calcolare le reazioni in A, con le condizioni iniziali assegnate sopra, in funzione di φ

Esercizio 1.2

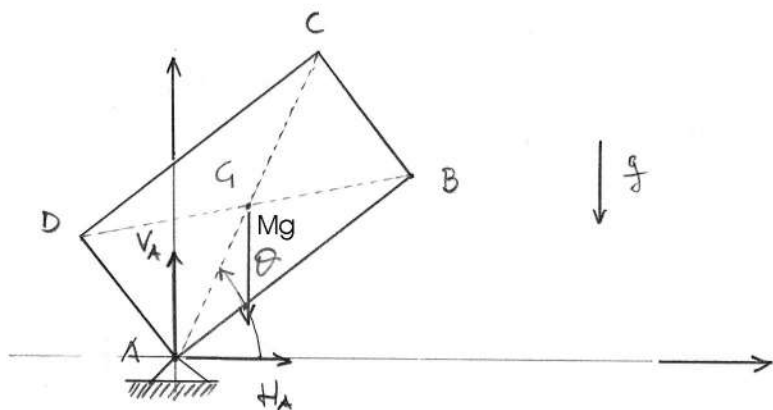


Figura 1.6:

piano verticale, stesso rettangolo omogeneo dell'esercizio precedente 1.1

1. equazioni di moto
2. date le condizioni iniziali $\vartheta(0) = 0$, $\dot{\vartheta}_0(0) = 0$ determinare le reazioni in A per $\vartheta = -\pi/2$.

Esercizio 1.3

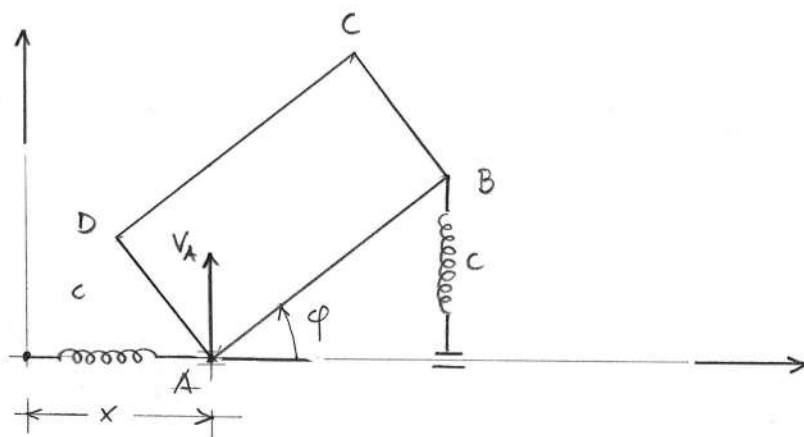


Figura 1.7:

piano orizzontale, stesso rettangolo omogeneo dell'esercizio 1.1, coordinate libere x e φ di fig 1.7

1. equazioni di moto
2. reazioni in A durante il moto

Per approfondimenti sulla dinamica vedi [LCA], [FDRM], [FM], [GO].

1.7 Risoluzione degli Esercizi

1.7.1 Risoluzione Esercizio 1.1

- 1.

$$K = \frac{1}{2} I_{A3} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{3} (l^2 + 4l^2) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 \right)$$
$$V = \frac{c}{2} y_B^2 + \frac{c}{2} y_D^2 = \frac{c}{2} 4l^2 \sin^2 \varphi + \frac{c}{2} l^2 \cos^2 \varphi$$
$$= \frac{c}{2} l^2 (3 \sin^2 \varphi + 1)$$

$$\mathcal{L} = K - V$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{5}{3} ml^2 \dot{\varphi} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (-V) \right) \\ &\Rightarrow \frac{5}{3} ml^2 \ddot{\varphi} + 3cl^2 \sin\varphi \cos\varphi = 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} K + V &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{cl^2}{2} (3\sin^2\varphi + 1) = E = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} ml^2 \omega_0^2 \right) + \frac{cl^2}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

3. Per calcolare le reazioni H_A e V_A usiamo la prima Equazione Cardinale della Dinamica

$$\begin{aligned} \underline{R}^e &= H_A \underline{e}_1 + V_A \underline{e}_2 - cy_B \underline{e}_2 - cy_D \underline{e}_2 = \underline{\dot{P}} \\ \Rightarrow H_A &= m\ddot{x}_G \\ V_A &= c2l\sin\varphi + cl\cos\varphi + m \ddot{y}_G \\ x_G &= \overline{AG} \cos(\gamma + \varphi) \\ y_G &= \overline{AG} \sin(\gamma + \varphi) \end{aligned}$$

dove:

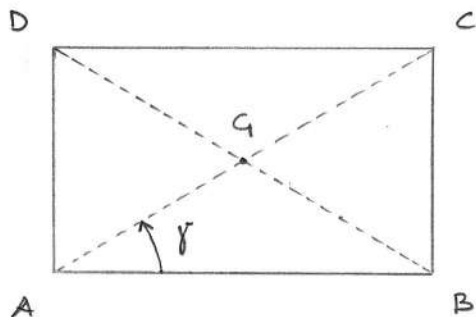


Figura 1.8:

$$AG = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + 4l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{5}$$

$$\sin\gamma = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\gamma = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Per ottenere \ddot{x}_G e \ddot{y}_G deriviamo due volte rispetto al tempo, tenendo conto che φ e $\dot{\varphi}$ sono funzioni di t , e usando le regole di derivazione di funzioni composte

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= -\overline{AG} \sin(\gamma + \varphi(t))\dot{\varphi}(t) \\ \ddot{x}_G &= -\overline{AG} \sin(\gamma + \varphi)\ddot{\varphi} - \overline{AG} \cos(\gamma + \varphi)\dot{\varphi}^2 \\ \dot{y}_G &= \overline{AG} \cos(\gamma + \varphi(t))\dot{\varphi} \\ \ddot{y}_G &= \overline{AG} \cos(\gamma + \varphi)\ddot{\varphi} - \overline{AG} \sin(\gamma + \varphi)\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto \ddot{x}_G e \ddot{y}_G in funzione di $\dot{\varphi}^2$, $\ddot{\varphi}$ e φ . Usiamo ora la conservazione dell'energia e l'equazione di moto per ricavare $\dot{\varphi}^2$ e $\ddot{\varphi}$ in funzione di φ :

$$\ddot{\varphi} = \frac{9}{5} \frac{c}{m} \sin\varphi \cos\varphi = g(\varphi)$$

$$\dot{\varphi}^2 = \left[E - \frac{cl^2}{2} (3\sin^2\varphi + 1) \right] \frac{6}{5ml^2} = f(\varphi)$$

Otteniamo

$$H_A = -m\overline{AG} [\sin(\gamma + \varphi)g(\varphi) + \cos(\gamma + \varphi)f(\varphi)]$$

$$V_A = 2cls\sin\varphi + cl\cos\varphi + m\overline{AG} [\cos(\gamma + \varphi)g(\varphi) - \sin(\gamma + \varphi)f(\varphi)]$$

Se ad esempio vogliamo dare una stima del massimo sforzo sulla cerniera A durante il moto del sistema a partire dalle condizioni iniziali assegnate, avremo che:

$$|\ddot{\varphi}| \leq \frac{9}{5} \frac{c}{m}$$

$$\dot{\varphi}^2 \leq \frac{6}{5ml^2} \left(\frac{5}{6} ml^2 \omega_0^2 + \frac{3}{2} cl^2 - \frac{3}{2} cl^2 \sin^2\varphi \right)$$

$$\leq \omega_0^2 + \frac{9}{10} \frac{c}{m}$$

$$\Rightarrow$$

$$|H_A| \leq m\overline{AG} (|g| + |f|) \leq m\overline{AG} \left(\frac{9}{5} \frac{c}{m} + \frac{9}{10} \frac{c}{m} + \omega_0^2 \right)$$

$$= m \frac{l}{2} \sqrt{5} \left(\frac{54}{10} \frac{c}{m} + 5\omega_0^2 \right) = a$$

$$|V_A| \leq 3cl + m\overline{AG} (|g| + |f|)$$

$$= 3cl + a$$

Notare che lo sforzo sulla cerniera può divenire molto maggiore che in Statica se la velocità angolare iniziale ω_0 (cioè la spinta impressa inizialmente) cresce, notare anche la dipendenza dal quadrato di ω_0 (fare conti numerici !)

1.7.2 Risoluzione Esercizio 1.2

1.

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} I_{A3} \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} m l^2 \dot{\vartheta}^2 \right) \\
 V &= mg \overline{AG} \sin \vartheta, \quad \overline{AG} = \frac{l}{2} \sqrt{5} \\
 \mathcal{L} &= K - V \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{5}{3} m l^2 \dot{\vartheta} \right) - \frac{d}{d\vartheta} (-V) \\
 &= \frac{5}{3} m l^2 \ddot{\vartheta} + mg \frac{l \sqrt{5}}{2} \cos \vartheta = 0
 \end{aligned}$$

2. Procedendo in modo simile al precedente Esercizio (1.1), avremo

$$\begin{aligned}
 H_A &= m \ddot{x}_G \\
 V_A - mg &= m \ddot{y}_G
 \end{aligned}$$

Scriviamo x_G ed y_G in funzione di ϑ

$$\begin{aligned}
 x_G &= \overline{AG} \cos \vartheta(t) \\
 y_G &= \overline{AG} \sin \vartheta(t) \\
 \ddot{x}_G &= -\overline{AG} \sin \vartheta \ddot{\vartheta} - \overline{AG} \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 \\
 \ddot{y}_G &= \overline{AG} \cos \vartheta \ddot{\vartheta} - \overline{AG} \sin \vartheta \dot{\vartheta}^2
 \end{aligned}$$

Dalla conservazione dell'energia con condizioni iniziali $\vartheta(0) = 0, \dot{\vartheta}(0) = 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}
K + V &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} ml^2 \dot{\vartheta}^2 \right) + mg \frac{l\sqrt{5}}{2} \sin\vartheta = \\
&= E = K + V|_{t=0} = 0 \\
\Rightarrow \dot{\vartheta}^2 &= -3 \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{g}{l} \sin\vartheta \Rightarrow \\
\text{per } \vartheta = -\pi/2, \dot{\vartheta}^2 \Big|_{\vartheta=-\pi/2} &= 3 \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{g}{l}.
\end{aligned}$$

Dall'equazione di moto:

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{3\sqrt{5}}{10} \frac{g}{l} \cos\vartheta \Rightarrow \text{per } \vartheta = -\pi/2, \ddot{\vartheta} \Big|_{\vartheta=-\pi/2} = 0$$

Quindi per $\vartheta = -\pi/2$ avremo:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_G &= 0 \\
\ddot{y}_G &= \frac{l\sqrt{5}}{2} 3 \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{g}{l} = \frac{3}{2}g \\
\Rightarrow \text{per } \vartheta &= -\pi/2 \\
H_A &= 0 \\
V_A &= mg + \frac{3}{2}mg = \frac{5}{2}mg
\end{aligned}$$

Notare che lo sforzo sulla cerniera in A è considerevolmente più grande in dinamica che in statica (in statica all'equilibrio avremmo $H_A = 0$, $V_A = mg$), anche se in questo esempio abbiamo preso $\dot{\vartheta}(0)$ nullo, cioè non abbiamo inizialmente spinto il sistema.

Ovviamente nel caso reale ci sono attriti di vario tipo, attrito delle cerniere, resistenza dell'aria etc. etc., ma essi sono forze dissipative cioè diminuiscono l'energia iniziale $K + V|_{t=0}$. Le stime che si danno per vincoli senza attrito sono quindi valide a maggior ragione in presenza di forze dissipative, nel senso che danno una stima superiore dei possibili sforzi a cui i vincoli sono sottoposti durante il moto.

1.7.3 Risoluzione Esercizio 1.3

1. Per calcolare l'energia cinetica bisogna tenere conto che il rigido in esame fa un generico moto rototraslatorio piano, quindi

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{G3}\omega^2 \\
 \underline{\omega} &= \dot{\varphi} \underline{e}_3 \\
 I_{G3} &= \frac{m}{12}(l^2 + 4l^2) = \frac{5}{12}ml^2 \\
 \underline{v}_G &= \frac{d\underline{x}_G(t)}{dt} \\
 \underline{x}_G &= [x + \overline{AG}\cos(\gamma + \varphi) \underline{e}_1] + \overline{AG}\sin(\gamma + \varphi) \underline{e}_2
 \end{aligned}$$

dove \overline{AG} e γ sono identici a quelli dell'Esercizio (1.1) cioè

$$\overline{AG} = \frac{l\sqrt{5}}{2}, \quad \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \underline{v}_G &= \frac{d\underline{x}_G(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t) + \overline{AG}\cos(\gamma + \varphi(t))) \underline{e}_1 + \\
 &\quad + \frac{d}{dt}(\overline{AG}\sin(\gamma + \varphi(t))) \underline{e}_2 \\
 &= (\dot{x} + \overline{AG}\sin(\gamma + \varphi)\dot{\varphi}) \underline{e}_1 + \\
 &\quad + \overline{AG}\cos(\gamma + \varphi)\dot{\varphi} \underline{e}_2 \\
 \Rightarrow \|\underline{v}_G\|^2 &= (\dot{x} - \overline{AG}\sin(\gamma + \varphi)\dot{\varphi})^2 + (\overline{AG}\cos(\gamma + \varphi)\dot{\varphi})^2 \\
 &= \dot{x}^2 + \overline{AG}^2\dot{\varphi}^2 - 2\overline{AG}\dot{\varphi}\dot{x}\sin(\gamma + \varphi) \\
 \Rightarrow K &= \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 \frac{5}{3}l^2 - \sqrt{5}l\dot{\varphi}\dot{x}\sin(\gamma + \varphi) \right)
 \end{aligned}$$

Passiamo all'energia potenziale

$$V = \frac{c}{2}x^2 + \frac{c}{2}(2l\sin\varphi)^2 = \frac{c}{2}x^2 + 2cl^2\sin^2\varphi$$

$$\mathcal{L} = K - V$$

Il sistema ha due gradi di libertà, avremo quindi due equazioni di Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{d}{dt} \left(m\dot{x}(t) - \frac{m}{2}\sqrt{5}l\dot{\varphi}(t)\sin(\gamma + \varphi(t)) \right) - \frac{\partial}{\partial x}(-V) \\ &= -m\ddot{x} - \frac{m}{2}\sqrt{5}l\ddot{\varphi}\sin(\gamma + \varphi) - \frac{m}{2}\sqrt{5}l\dot{\varphi}^2\cos(\gamma + \varphi) + cx = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{m}{2}\sqrt{5}l\dot{x}(t)\sin(\gamma + \varphi(t)) + \frac{5}{3}ml^2\dot{\varphi} \right) + \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-m\frac{\sqrt{5}}{2}l\dot{\varphi}\dot{x}\sin(\gamma + \varphi) - \frac{c}{2}x^2 - 2cl^2\sin^2\varphi \right) \\ &= -m\frac{\sqrt{5}}{2}l\ddot{x}\sin(\gamma + \varphi) - \frac{m\sqrt{5}}{2}l\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\gamma + \varphi) + \\ &\quad + \frac{5}{3}ml^2\ddot{\varphi} + m\frac{\sqrt{5}}{2}l\dot{\varphi}\dot{x}\cos(\gamma + \varphi) + 4cl^2\sin\varphi\cos\varphi \\ &= -m\frac{\sqrt{5}}{2}\ddot{x}l\sin(\gamma + \varphi) + \frac{5}{3}ml^2\ddot{\varphi} + 4cl^2\sin\varphi\cos\varphi = 0 \end{aligned}$$

Notiamo che anche in questo caso vale la conservazione dell'energia ma essendo ora due i gradi di libertà non è possibile ricavare ad esempio $\dot{\varphi}^2$ solo in funzione delle coordinate φ ed x ($\dot{\varphi}^2$ viene anche funzione di \dot{x}^2). Dalle due equazioni di moto si possono ricavare \ddot{x} e $\ddot{\varphi}$ in funzione di φ , x e $\dot{\varphi}^2$, ma non solo dalle 2 coordinate libere. Quindi in generale per sistemi a più gradi di libertà non si possono ricavare le \ddot{q}_i e \dot{q}_i^2 in funzione delle coordinate senza aver risolto le equazioni di moto. Anche le reazioni vincolari vanno quindi calcolate come funzioni di \ddot{q}_i e \dot{q}_i^2 , usando le equazioni Cardinali e solo una volta noto il moto si possono conoscere in funzione del tempo.

2. Per determinare la reazione V_A usiamo la prima equazione cardinale in direzione \underline{e}_2 :

$$\begin{aligned}V_A - cy_B &= V_A - c \, 2l \sin\varphi = m\ddot{y}_G \\y_G &= \overline{AG} \sin(\gamma + \varphi)\end{aligned}$$

con \overline{AG} e γ come negli esercizi precedenti quindi

$$V_A = 2cl \sin\varphi + m\overline{AG} (\cos(\gamma + \varphi)\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \sin(\gamma + \varphi))$$

Questo permette di calcolare V_A quando sia noto φ *in funzione di t*.

Capitolo 2

Rigido con Asse Fisso, esempi

Considereremo alcuni esempi di problemi con rigidi in rotazione, nello spazio a 3 dimensioni.

2.1 Esempi

Esempio 2.1 *Lamina rettangolare*

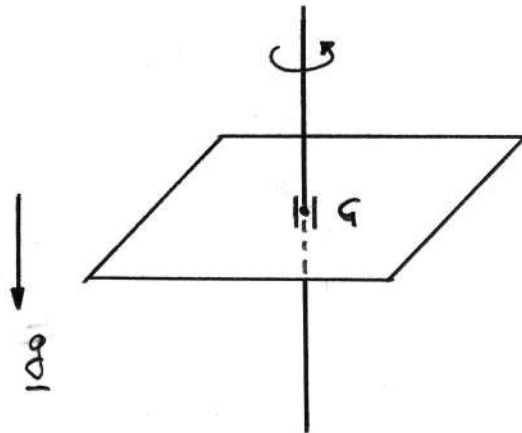


Figura 2.1:

Consideriamo una lamina rettangolare omogenea dotata di cerniera cilindrica in G con asse di rotazione verticale = asse per G ortogonale al piano

della lamina e vincoli lisci.

E.C.D. :

$$\underline{R}^e = M \underline{g} + \underline{F}_0^r = \underline{\dot{P}} = \underline{0}, \quad (G \text{ è fisso })$$

$$\underline{M}^e(G) = \underline{\mu}_0^r = \frac{d}{dt}(\underline{L}(G)), \quad (\text{il momento del peso rispetto a } G \text{ è nullo })$$

$$\underline{\omega} = \omega \underline{k}$$

nella terna solidale disegnata sotto (che è terna principale d'inerzia per G)

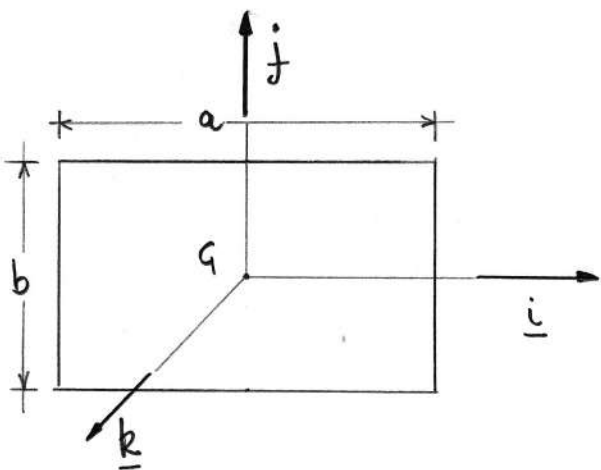


Figura 2.2:

\underline{k} è asse principale d'inerzia per G quindi:

$$\underline{L}(G) = \mathbf{I}_G(\omega \underline{k}) = \omega J_3 \underline{k}, \quad J_3 = \frac{M}{16} (a^2 + b^2) \Rightarrow \frac{d\underline{L}}{dt}(G) = \dot{\omega} J_3 \underline{k}$$

\Rightarrow equazione di moto (equazione cardinale dei momenti in direzione dell'asse di rotazione \underline{k}):

$$\Rightarrow \omega(t) \quad \begin{array}{l} J_3 \dot{\omega} \\ = \end{array} \quad \begin{array}{l} = \\ \text{costante} \end{array} \quad \begin{array}{l} = \\ = \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \\ \omega(t_0) \end{array} = \omega_0, \text{ (rotazione uniforme)}$$

$$\text{Reazioni : } \begin{array}{l} \underline{F}_0^r \\ \underline{\mu}_0^r \end{array} \quad \begin{array}{l} = \\ = \end{array} \quad \begin{array}{l} -M \underline{g} \\ \underline{0} \end{array}$$

Se è presente una coppia di attrito, bisogna esprimere il momento di attrito fisicamente.

Supponiamo ad esempio che ci sia una coppia di attrito di momento $-\nu \underline{\omega}$ con $\nu > 0$. L'unica cosa che cambia rispetto al caso precedente è l'equazione di moto che diventa:

$$J_3 \dot{\omega} = -\nu \omega \text{ (equazione dei momenti in direzione } \underline{k} \text{)}$$

$$\Rightarrow \omega(t) = \omega_0 \exp\left(-\frac{\nu}{J_3}t\right), \text{ con } \omega_0 = \omega(t_0)$$

Nota 2.1 *i rigidi piani in moto sul loro piano sono sempre in questa situazione.*

Esempio 2.2

Tutto come nel caso dell'esempio 2.1, con la differenza che l'asse di rotazione corrisponde alla diagonale del rettangolo.

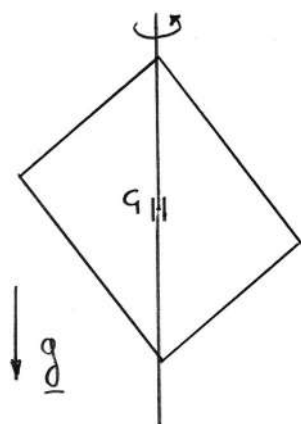


Figura 2.3:

Le E.C.D. rimangono le stesse dell'Esempio 2.1, salvo la direzione di $\underline{\omega}$, che adesso non è più asse principale per G , a meno che $a = b$ cioè che la lamina sia quadrata.

Fissiamo la terna solidale di figura 2.4, con \underline{u}_1 diretto come la diagonale del rettangolo:

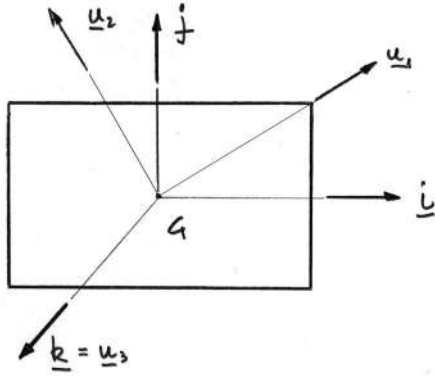


Figura 2.4:

$$S^1(G, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3 = \underline{k})$$

In questa terna la matrice d'inerzia ha la forma seguente:

$$\mathbf{I}_G = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}, \quad \underline{\omega} = \omega \underline{u}_1, \quad \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{L}(G) &= \mathbf{I}_G(\omega \underline{u}_1) = \omega \mathbf{I}_G(\underline{u}_1) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{L}(G) &= \dot{\omega} \mathbf{I}_G(\underline{u}_1) + \omega^2 \underline{u}_1 \wedge \mathbf{I}_G(\underline{u}_1) \\ &= \dot{\omega} I_{11} \underline{u}_1 + \dot{\omega} I_{12} \underline{u}_2 + \omega^2 I_{12} \underline{u}_3 \end{aligned}$$

\Rightarrow

equazione di moto

$$I_{11} \dot{\omega} = 0$$

momenti di reazione

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_0^r \cdot \underline{u}_2 &= I_{12} \dot{\omega} \\ \underline{\mu}_0^r \cdot \underline{u}_3 &= I_{12} \omega^2 \end{aligned}$$

Esercizio 2.1

Calcolare i nuovi elementi di inerzia:

$$I_{11} , I_{12} , I_{22}$$

Esempio 2.3

Rigido soggetto al proprio peso e vincolato a ruotare intorno ad un asse obliquo rispetto alla verticale.

Le E.C.D. sono, in generale:

$$\begin{aligned} M \underline{g} + \underline{F}_0^r &= \underline{\dot{P}} \\ (\underline{x}_G - \underline{x}_0) \wedge M \underline{g} + \underline{\mu}_0^r &= \frac{d}{dt} \underline{L}(O) \end{aligned}$$

con al solito O coincidente con la cerniera fissa (e in generale diverso da G). In questo caso fissiamo le due terne fissa e solidale nel modo seguente:

terna fissa $\Sigma(0; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ con \underline{e}_3 coincidente con l'asse di rotazione, \underline{e}_2 nel piano verticale che contiene l'asse di rotazione, \underline{e}_1 di conseguenza, vedi figura seguente, 2.5.

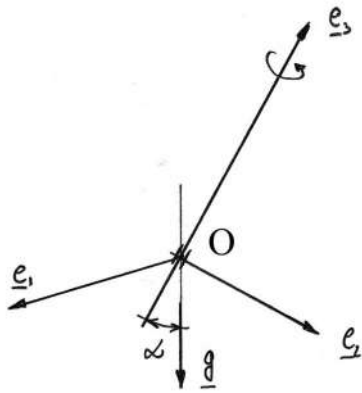


Figura 2.5:

$$\Rightarrow \underline{g} = \sin\alpha \underline{e}_2 - \cos\alpha \underline{e}_3$$

terna solidale $S(O; \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ con \underline{u}_3 coincidente con l'asse di rotazione, \underline{u}_2 tale che G appartenga al piano $\underline{u}_2, \underline{u}_3$ (se G non appartiene all'asse di rotazione, altrimenti qualsiasi) ed \underline{u}_1 di conseguenza, vedi figura seguente 2.6

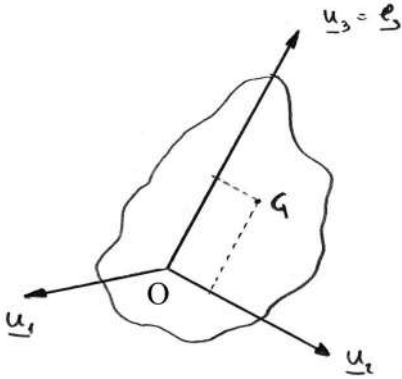


Figura 2.6:

$$\Rightarrow (\underline{x}_G - \underline{x}_O) = y_G \underline{u}_2 + z_G \underline{u}_3$$

Per calcolare il momento del peso rispetto ad O possiamo, ad esempio, calcolare le componenti di \underline{g} in S , ricordando che

$$(\underline{g})_S = R^T(\varphi) (\underline{g})_\Sigma, \quad R^T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\underline{g})_S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\varphi \sin\alpha \\ \cos\varphi \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} = \sin\alpha \sin\varphi \underline{u}_1 + \sin\alpha \cos\varphi \underline{u}_2 - \cos\alpha \underline{u}_3$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{momento del peso} &= (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge M \underline{g} = \\
&= Mg [(-y_G \cos\alpha - z_G \cos\varphi \sin\alpha) \underline{u}_1 + \\
&+ (z_G \sin\varphi \sin\alpha) \underline{u}_2 + \\
&+ (-y_G \sin\varphi \sin\alpha) \underline{u}_3]
\end{aligned}$$

Data la matrice \mathbf{I}_O nella terna solidale scelta avremo

$$\underline{L}(O) = \mathbf{I}_O (\omega \underline{u}_3) \quad e$$

$$\frac{d}{dt} \underline{L}(O) = \dot{\omega} \mathbf{I}_O (\underline{u}_3) + \omega^2 \underline{u}_3 \wedge \mathbf{I}_O (\underline{u}_3)$$

$$\Rightarrow \mathbf{I}_O (\underline{u}_3) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_3 \wedge \mathbf{I}_O (\underline{u}_3) = \left\| \begin{array}{ccc} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \underline{u}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} -I_{23} \\ I_{13} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \underline{L}(O) &= \underline{u}_1 (I_{13} \dot{\omega} - I_{23} \omega^2) + \\
&+ \underline{u}_2 (I_{23} \dot{\omega} + I_{13} \omega^2) + \\
&+ \underline{u}_3 I_{33} \dot{\omega}
\end{aligned}$$

Ricordando che $\omega = \dot{\varphi}$, dall'equazione cardinale dei momenti avremo:

- direzione $\underline{u}_3 =$ asse di rotazione $I_{33} \ddot{\varphi} = -(Mg y_G \sin\alpha) \sin\varphi$ (equazione di moto)
- momenti di reazione:

- direzione \underline{u}_1 : $\underline{\mu}_0^r \cdot \underline{u}_1 = Mg (y_G \cos\alpha + z_G \sin\alpha \cos\varphi) + I_{13} \ddot{\varphi} - I_{23} \dot{\varphi}^2$
- direzione \underline{u}_2 : $\underline{\mu}_0^r \cdot \underline{u}_2 = -Mg z_G \sin\alpha \sin\varphi + I_{23} \ddot{\varphi} + I_{13} \dot{\varphi}^2$

Notare che essendo i vincoli lisci e la forza peso conservativa si ha conservazione dell'energia meccanica, cioè:

$$K + V = E = K + V|_{t=t_0}$$

$$K = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \underline{\omega} = \frac{1}{2} \omega^2 \underline{u}_3 \cdot \mathbf{I}_O \underline{u}_3 = \frac{1}{2} I_{33} \omega^2$$

$$V = -M \underline{g} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_O) =$$

(usando le equazioni già trovate per \underline{g} e $(\underline{x}_G - \underline{x}_O)$ nella terna solidale)

$$- (Mg y_G \sin\alpha) \cos\varphi + (Mg z_G \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_{33} \dot{\varphi}^2 - (Mg y_G \sin\alpha) \cos\varphi = E$$

$$= \frac{1}{2} I_{33} \omega_0^2 - (Mg y_G \sin\alpha) \cos\varphi_0$$

dove:

$$\omega_0 = \dot{\varphi}(t_0) , \varphi_0 = \varphi(t_0)$$

Possiamo allora ricavare $\dot{\varphi}^2$ in funzione di φ ed E dalla conservazione dell'energia e $\ddot{\varphi}$ in funzione di φ dall'equazione di moto. Sostituendo nelle espressioni per i momenti di reazione, si possono ottenere questi ultimi in funzione di φ *senza* aver prima integrato l'equazione di moto.

Esercizio 2.2

Nell'esempio 2.3 considerare la solita lamina piana rettangolare e calcolare I_{33} , I_{13} , I_{23} supponendo che essa venga messa in rotazione intorno ad una retta generica passante per O , il cui versore è:

$$\underline{u} = \underline{u}_3 = \gamma_1 \underline{i} + \gamma_2 \underline{j} + \gamma_3 \underline{k}$$

con

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

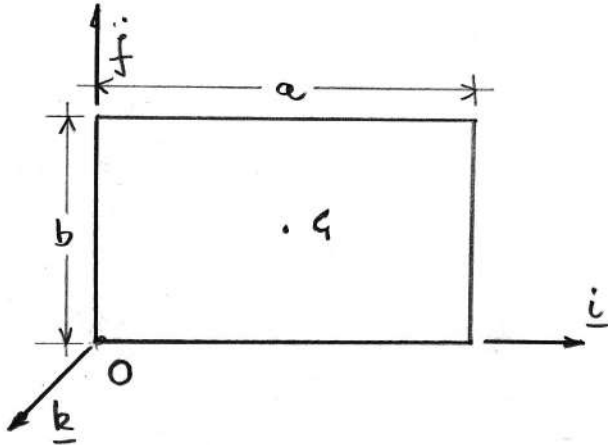


Figura 2.7:

Inoltre calcolare y_G e z_G .

Fare i conti nel caso particolare:

$$\underline{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{i} + \underline{k}), \quad a = 3l, \quad b = l$$

Esercizio 2.3

Nell'esempio 2.3 supponendo che per $t = 0$ sia $\varphi(0) = \pi/2$ e $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$, stimare per eccesso i momenti di reazione.

2.2 Risoluzione Esercizi

2.2.1 Risoluzione Esercizio 2.1

È nota la matrice d'inerzia \mathbf{I}_G nel sistema di riferimento principale di figura 2.2. Scriviamo allora nella terna principale l'equazione dei versori \underline{u}_1 ed \underline{u}_2 , vedi figura 2.4

$$\underline{u}_1 = \frac{a \underline{i} + b \underline{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \underline{u}_2 = \frac{-b \underline{i} + a \underline{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Essendo nella terna principale

$$\mathbf{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_{11} &= \underline{u}_1 \cdot \mathbf{I}_G(\underline{u}_1) = \\ &= J_1 \frac{a^2}{a^2 + b^2} + J_2 \frac{b^2}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{M}{6} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{22} &= \underline{u}_2 \cdot \mathbf{I}_G(\underline{u}_2) = \\ &= J_1 \frac{b^2}{a^2 + b^2} + J_2 \frac{a^2}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{M}{12} \frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= \underline{u}_1 \cdot \mathbf{I}_G(\underline{u}_2) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} (-ab J_1 + ab J_2) \\ &= \frac{M}{12} ab \frac{(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Notare che, come ovvio, se la lamina è quadrata I_{12} è nullo.

2.2.2 Risoluzione Esercizio 2.2

Per calcolare I_{33} , cioè il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, basta ricordare che:

$$I_{33} = \underline{u}_3 \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}_3)$$

e nella terna $S(O; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ si ha

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} \frac{Mb^2}{3} & -\frac{Mab}{4} & 0 \\ -\frac{Mab}{4} & \frac{Ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{3}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I_{33} = \frac{Mb^2}{3}\gamma_1^2 + \frac{Ma^2}{3}\gamma_2^2 + \frac{M}{3}(a^2 + b^2)\gamma_3^2 - 2M\frac{ab}{4}\gamma_1\gamma_2$$

Per calcolare i due momenti deviatori richiesti bisogna esprimere in $S(O; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ i versori \underline{u}_1 e \underline{u}_2 di cui all'Esempio 2.3 e poi ricordare che:

$$I_{13} = \underline{u}_1 \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}_3), \quad I_{23} = \underline{u}_2 \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}_3)$$

Determinazione di \underline{u}_1 e \underline{u}_2 :

\underline{u}_1 è ortogonale al piano passante per O che contiene \underline{u}_3 e $G \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \lambda(\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge \underline{u}_3 \\ &= \lambda\left(\frac{a}{2}\underline{i} + \frac{b}{2}\underline{j}\right) \wedge (\gamma_1\underline{i} + \gamma_2\underline{j} + \gamma_3\underline{k}) \\ &= \frac{\lambda}{2}(b\gamma_3\underline{i} - a\gamma_3\underline{j} + (a\gamma_2 - b\gamma_1)\underline{k}) \end{aligned}$$

con $\lambda : \|\underline{u}_1\| = 1$

(cioè $\frac{\lambda}{2} [b^2\gamma_3^2 + a^2\gamma_3^2 + (a\gamma_2 - b\gamma_1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1$)

\underline{u}_2 di conseguenza $\underline{u}_2 = \underline{u}_3 \wedge \underline{u}_1$.

Per calcolare la coordinata di G nel piano \underline{u}_2 , \underline{u}_3 , cioè y_G e z_G , basta ricordare che

$$\begin{aligned} y_G &= (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \cdot \underline{u}_2 \\ z_G &= (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \cdot \underline{u}_3 \end{aligned}$$

Nel caso particolare

$$\underline{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{i} + \underline{k}), \quad a = 3l, \quad b = l$$

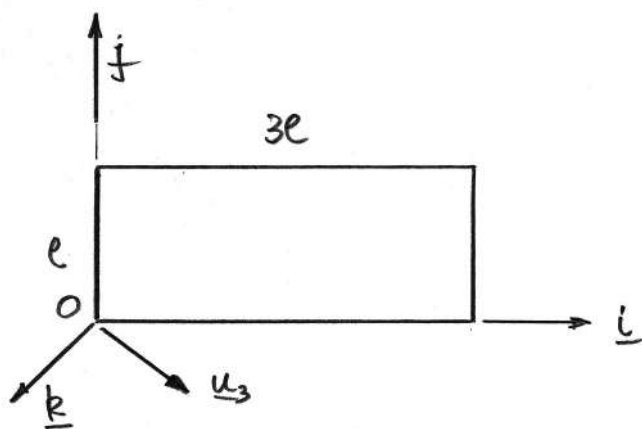


Figura 2.8:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O &= Ml^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \\ I_{33} &= \frac{11}{6} Ml^2 \\ \underline{u}_1 &= \lambda (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge \underline{u}_3 = \\ &= \lambda \left(\frac{3}{2}l \underline{i} + \frac{l}{2} \underline{j} \right) \wedge \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{i} + \underline{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \frac{l}{2\sqrt{2}} (\underline{i} - 3 \underline{j} - \underline{k}) \\
\text{con} \quad &\lambda \frac{l}{2\sqrt{2}} \sqrt{1+9+1} = \lambda \frac{l}{2\sqrt{2}} \sqrt{11} = 1 \\
\Rightarrow \underline{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{11}} (\underline{i} - 3 \underline{j} - \underline{k}) \\
\Rightarrow \underline{u}_2 &= \underline{u}_3 \wedge \underline{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{22}} (3 \underline{i} + 2 \underline{j} - 3 \underline{k})
\end{aligned}$$

(Verificare che \underline{u}_1 , \underline{u}_2 , \underline{u}_3 sono una base ortogonale con il giusto ordine)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_{13} &= \underline{u}_1 \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}_3) = -\frac{3}{4\sqrt{22}} Ml^2 \\
I_{23} &= \underline{u}_2 \cdot \mathbf{I}_O(\underline{u}_3) = -\frac{21}{4\sqrt{11}} Ml^2 \\
y_G &= (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \cdot \underline{u}_2 = \frac{l}{2} (3 \underline{i} + \underline{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{22}} (3 \underline{i} + 2 \underline{j} - 3 \underline{k}) \\
&= \frac{l}{2\sqrt{22}} (9 + 2) = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{11}{2}} \\
z_G &= (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \cdot \underline{u}_3 = \frac{l}{2\sqrt{2}} (3 \underline{i} + \underline{j}) \cdot (\underline{i} + \underline{k}) = \frac{3}{2\sqrt{2}} l
\end{aligned}$$

(verificare che $y_G^2 + z_G^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$)

2.2.3 Risoluzione Esercizio 2.3

Per la conservazione dell'energia si ha

$$\frac{1}{2} I_{33} \dot{\varphi}^2 = E + (Mg y_g \sin\alpha) \cos\varphi$$

con

$$E = \frac{1}{2} I_{33} \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \omega^2 \leq \omega_0^2 + 2 \frac{|Mg y_G \sin\alpha|}{I_{33}} = \omega_{max}^2$$

Dall'equazione di moto

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \dot{\omega} = -\frac{Mg y_G \sin\alpha}{I_{33}} \sin\varphi \\ \Rightarrow |\ddot{\varphi}| &\leq \frac{|Mg y_G \sin\alpha|}{I_{33}} = |\dot{\omega}|_{max} \\ \Rightarrow \left| \underline{\mu}_0^r \cdot \underline{u}_1 \right| &\leq Mg (|y_G \cos\alpha| + |z_G \sin\alpha|) + |I_{13}| |\dot{\omega}|_{max} + \\ &\quad + |I_{23}| \omega_{max}^2 \\ \Rightarrow \left| \underline{\mu}_0^r \cdot \underline{u}_2 \right| &\leq Mg |z_G \sin\alpha| + |I_{23}| |\dot{\omega}|_{max} + \\ &\quad + |I_{13}| \omega_{max}^2 \end{aligned}$$

Notare la proporzionalità inversa con I_{33} .

Capitolo 3

Precessioni e moto libero di un rigido

3.1 Introduzione

Consideriamo un *rigido con punto fisso* O (ad esempio una cerniera sferica liscia in O), esso ha 3 gradi di libertà. Le E.C.D. sono:

$$\begin{aligned} \underline{M}^a(O) &= \frac{d\underline{L}(O)}{dt} && (\text{essendo } O \text{ fermo e non essendoci} \\ &&& \text{momenti di reazione rispetto ad } O) \\ \underline{R}^a + \underline{F}_O^r &= \underline{\dot{P}} && (\underline{F}_O^r \text{ è la reazione incognita }) \end{aligned}$$

La prima equazione vettoriale dà le tre equazioni di moto, la seconda dà le tre incognite di reazione.

Per un *rigido libero*, conviene prendere come polo per i momenti il centro di massa G , le E.C.D. danno allora direttamente sei equazioni di moto, tante quanti sono i gradi di libertà del rigido:

$$\begin{aligned} \underline{R}^a &= \underline{\dot{P}} &= M \underline{a}_G \\ \underline{M}^a(G) &= \frac{d\underline{L}(G)}{dt} \end{aligned}$$

Se la risultante \underline{R}^a delle forze attive dipende solo dalla posizione e/o velocità di G ed il momento delle forze attive $\underline{M}^a(G)$ dipende solo dagli angoli di Eulero e/o dalla velocità angolare $\underline{\omega}$ il sistema delle E.C.D. si può riguardare come:

$$\begin{aligned} \underline{R}^a &= M \underline{a}_G && \text{equazione del moto del centro di massa a cui} \\ &&& \text{si pensa applicata la forza } \underline{R}^a \\ \underline{M}^a(G) &= \frac{d\underline{L}(G)}{dt} && \text{equazione di precessione intorno al centro di} \\ &&& \text{massa } G, \text{ pensato fisso, sotto l'azione del} \\ &&& \text{momento } \underline{M}^a(G) \end{aligned}$$

Citiamo tre esempi significativi in cui si verificano le condizioni esposte sopra:

1. moto di un grave nel vuoto:

$$\begin{cases} M \underline{a}_G &= M \underline{g} \\ \frac{d}{dt} \underline{L}(G) &= \underline{0} \end{cases}$$

(essendo nullo il momento risultante del peso rispetto a G).

Quindi il moto di G è quello di un punto materiale soggetto al peso, il moto intorno a G è una *precessione per inerzia*, così detta appunto perchè il momento delle forze attive rispetto a G è nullo.

2. moto della Terra (pensata sferica e omogenea) intorno al Sole (pensato come punto fisso e centro di attrazione gravitazionale):

$$M \underline{a}_G = -k \frac{M M_S}{\|\underline{x}_G - \underline{x}_S\|^2} \text{ vers } (\underline{x}_G - \underline{x}_S)$$

equazione di moto di un punto materiale soggetto alla forza di gravitazione (moto Kepleriano di G);

$$\frac{d\underline{L}(G)}{dt} = \underline{0}$$

(per una Terra sferica e omogenea il momento rispetto a G delle forze gravitazionali è nullo), precessione per inerzia intorno a G .

3. moto intorno al Sole della Terra, tenendo conto del rigonfiamento equatoriale terrestre; esiste un momento gravitazionale rispetto a G dovuto alle forze di attrazione del Sole e della Luna sul rigonfiamento equatoriale. L'equazione dei momenti diviene

$$\frac{d\underline{L}(G)}{dt} = \underline{M}^a(G)$$

dove $\underline{M}^a(G)$ è diretto come l'asse di simmetria della Terra ed ha modulo proporzionale al $\sin 2\vartheta$, ϑ essendo l'angolo tra l'asse di simmetria della Terra ed il piano dell'eclittica.

Nota 3.1 *La costante di proporzionalità è*

$$= \frac{3}{4}k (J_3 - J_1) \left(\frac{m_S}{r_S^2} + \frac{m_L}{r_L^2} \right)$$

dove r_S ed r_L sono le distanze medie di Sole e Luna dalla Terra e J_3 e J_1 sono i momenti d'inerzia della Terra rispetto all'asse di simmetria e ad un asse ad esso ortogonale passante per G , vedi [GO], esercizio 13 pag. 182.

L'equazione della risultante dà il moto di un punto soggetto all'attrazione di Sole e Luna (il così detto problema dei tre corpi) Notare che l'equazione dei momenti è molto simile all'equazione per le precessioni di una trottola, intorno alla sua punta, pensata fissa (di qui l'attenzione prestata dai libri di Meccanica Razionale alle trottole)

Notare che la scomposizione delle E.C.D. in equazione del centro di massa e precessione intorno al centro di massa, va vista con cautela se ad esempio la risultante dipende anche dall'*orientamento* del rigido, cioè dagli angoli di Eulero. Caso vistoso è il moto di un aereo, o più in generale di un rigido in un fluido.

Nel caso di *moto rigido piano* i problemi sono molto semplificati perchè la velocità angolare $\underline{\omega}$ ha direzione costante ed essendo ortogonale al piano del rigido è diretta come un asse principale, inoltre le E.C.D. si riducono a tre equazioni scalari.

Esercizio 3.1

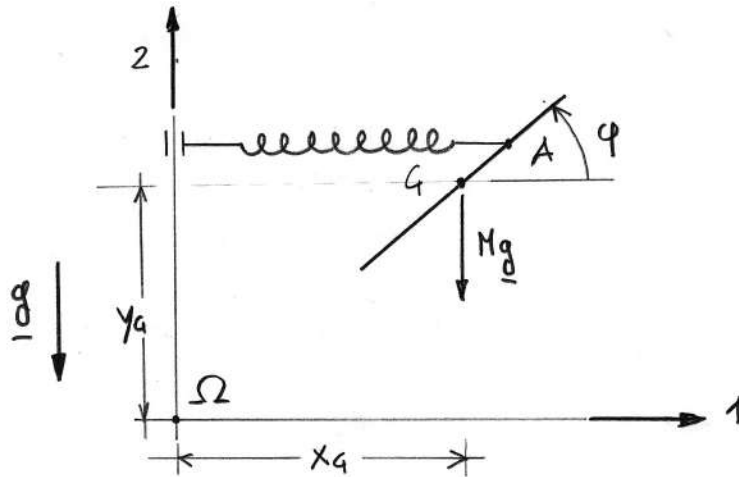


Figura 3.1:

asta omogenea, lunghezza l , soggetta alla forza elastica in A ed al suo peso, libera sul piano verticale ($\overline{AG} = d$).

Scrivere le equazioni di moto, vedere se un moto possibile è

$$y_G = -\frac{g}{2} t^2, \quad x_G = \sin \sqrt{\frac{c}{M}} t, \quad \varphi = \varphi_0$$

con φ_0 una costante opportuna, vedere se sono possibili moti con $\varphi = 0$.

3.2 Equazioni di Eulero per i rigidi

Approfondiamo il metodo per affrontare l'equazione dei momenti. L'idea base (di Eulero) è quella di scrivere il momento angolare nella terna principale d'inerzia rispetto al polo dato. Ricordiamo che se O è fisso (come nelle precessioni vere e proprie) o coincide con G (come nel moto libero)

$$\underline{L}(O) = \mathbf{I}_O(\underline{\omega})$$

dove adesso $\underline{\omega}$ può avere direzione arbitraria (diversamente dalle rotazioni intorno ad un asse fisso già viste)

Detta $S(O; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ la terna principale rispetto ad O , e definendo

$$\underline{\omega} = \omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j} + \omega_3 \underline{k}$$

e

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

avremo:

$$\begin{aligned} \underline{L}(O) &= \mathbf{I}_O(\underline{\omega}) = J_1 \omega_1 \underline{i} + J_2 \omega_2 \underline{j} + J_3 \omega_3 \underline{k} \\ \frac{d\underline{L}(O)}{dt} &= \mathbf{I}_O(\dot{\underline{\omega}}) + \underline{\omega} \wedge \mathbf{I}_O(\underline{\omega}) \\ &= J_1 \dot{\omega}_1 \underline{i} + J_2 \dot{\omega}_2 \underline{j} + J_3 \dot{\omega}_3 \underline{k} + \\ &+ (\omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j} + \omega_3 \underline{k}) \wedge \\ &\wedge (J_1 \omega_1 \underline{i} + J_2 \omega_2 \underline{j} + J_3 \omega_3 \underline{k}) \\ &= (\text{svolgendo il prodotto vettoriale}) \\ &= \underline{i} (J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3) + \\ &+ \underline{j} (J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3) + \\ &+ \underline{k} (J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2) \end{aligned}$$

Le equazioni dei momenti con $\underline{L}(O)$ definito come sopra si dicono appunto *equazioni di Eulero*, scriviamole per completezza:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= \underline{M}^a(O) \cdot \underline{i} \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 &= \underline{M}^a(O) \cdot \underline{j} \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= \underline{M}^a(O) \cdot \underline{k} \end{aligned}$$

Supponendo che $\underline{M}^a(O)$ dipenda dagli angoli di Eulero e da $\underline{\omega}$, le tre equazioni scritte sopra, insieme all'espressione di $\underline{\omega}$ in funzione degli angoli di Eulero (ovviamente nella terna solidale) cioè:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\varphi} \sin\psi \sin\vartheta + \dot{\vartheta} \cos\psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \cos\psi \sin\vartheta - \dot{\vartheta} \sin\psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi}\end{aligned}$$

danno un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine negli angoli di Eulero o equivalentemente un sistema di sei equazioni differenziali del primo ordine in $(\varphi, \vartheta, \psi, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ (evidentemente complesso). Diremo qualcosa solo dei casi più semplici (!).

3.3 Precessioni per Inerzia

Supponiamo che $\underline{M}^e(O) = \underline{0}$, le equazioni di Eulero diventano:

$$\begin{aligned}J_1 \dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1) \omega_1 \omega_3 \\ J_3 \dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2\end{aligned}$$

cioè un sistema di 3 equazioni differenziali del prim'ordine non lineari nelle incognite $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Si dimostra che per ogni dato iniziale $\underline{\omega}(t=0) = \underline{\omega}_0$ esiste un'unica soluzione e che essa è data da integrali ellittici (vedi [FM]).

Consideriamo alcuni casi particolari:

1. $\boxed{J_1 = J_2 = J_3}$ cioè l'ellissoide d'inerzia relativo ad O è una superficie sferica: $\Rightarrow \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \underline{\omega}(t)$ è costante cioè tutti i moti possibili sono rotazioni uniformi.
2. $\boxed{J_1 = J_2 = J \neq J_3}$, corpo a struttura giroscopica rispetto ad O ed in particolare un giroscopio, cioè un rigido con ellissoide d'inerzia rispetto a G di rotazione.

$$\Rightarrow \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3(t) = \omega_{3O} = \text{costante}$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \left(\frac{J-J_3}{J} \omega_{3O} \right) \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \left(\frac{J_3-J}{J} \omega_{3O} \right) \omega_1 \end{cases}$$

Adesso le due equazioni differenziali per ω_1 ed ω_2 sono lineari e si possono integrare facilmente. Infatti posto:

$$\gamma = \frac{J_3 - J}{J} \omega_{3O}$$

si ha:

$$\gamma = 0 \Rightarrow \omega_1 = \text{costante}, \omega_2 = \text{costante}$$

$$\gamma \neq 0 \Rightarrow \omega_1 = A \cos(|\gamma| t + \alpha),$$

$$\omega_2 = A \frac{|\gamma|}{\gamma} \sin(|\gamma| t + \alpha), \text{ con } A \text{ ed } \alpha \text{ costanti arbitrarie}$$

Notare che $\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) = A^2 = \text{costante}$.

(Per arrivare velocemente alla soluzione, notare che $\ddot{\omega}_1 = -\gamma \dot{\omega}_2 = -\gamma^2 \omega_1$, equazione del moto armonico, e $\omega_2 = -\frac{1}{\gamma} \dot{\omega}_1$).

Quindi, per l'osservatore solidale S (ad esempio noi sulla terra):

$$\underline{\omega}(t) = \omega_{3O} \underline{k} + \underline{\omega}_e$$

dove:

$\omega_{3O} \underline{k}$ è un vettore costante e

$\omega_e = \omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j}$ = velocità equatoriale, è un vettore di modulo costante che ruota attorno all'asse giroscopico \underline{k} con velocità angolare costante $|\gamma|$.

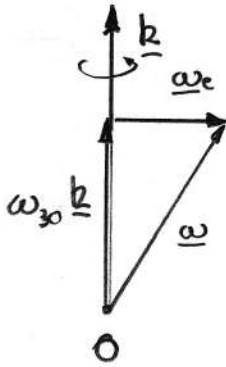


Figura 3.2:

Quindi per S $\underline{\omega}$ ha modulo costante, ma direzione che ruota uniformemente intorno a \underline{k} , con velocità angolare $|\gamma|$.

Per l'osservatore fisso Σ , notiamo che

•

$$\frac{d}{dt} \underline{L}(O) = \underline{0} \Rightarrow \underline{L}(O) = \text{vettore costante}$$

•

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O(\underline{\omega}) &= J \omega_1 \underline{i} + J \omega_2 \underline{j} + J_3 \omega_3 \underline{k} \\ &= J (\omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j} + \omega_3 \underline{k}) + (J_3 - J) \omega_3 \underline{k} \\ &= J \underline{\omega} + (J_3 - J) \omega_3 \underline{k} \end{aligned}$$

• $\omega_3 = \text{costante}$ (dalla 3^a equazione di Eulero)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{L}(O) &= J \underline{\omega} + (J_3 - J) \omega_{3O} \underline{k} \\ \Rightarrow \underline{\omega} &= \frac{\underline{L}(O)}{J} + \frac{J_3 - J}{J} \omega_{3O} \underline{k} \end{aligned}$$

Questo vuol dire che per l'osservatore fisso Σ il rigido ruota intorno al suo asse giroscopico uniformemente (con velocità angolare $\frac{J_3 - J}{J} \omega_{3O}$) e l'asse giroscopico ruota uniformemente intorno all'asse fisso definito dal vettore $\underline{L}(O)$ (velocità angolare $\frac{\underline{L}(O)}{J}$). Tale moto viene detto *precessione regolare*.

3. $J_1 \neq J_2 \neq J_3$

Si può dare una bella descrizione qualitativa del moto generale, moto alla Poinsot (vedi [GO] , [FDRM]), basata sulla presenza di due integrali primi del moto (precisamente momento angolare costante ed energia cinetica costante). Qui ci limiteremo ad evidenziare le proprietà degli assi principali di inerzia. Si ha che:

- se la velocità angolare iniziale $\underline{\omega}_0$ è diretta come un A.P.I(O) allora il moto è una rotazione uniforme, cioè $\underline{\omega}(t) = \underline{\omega}_0$. Infatti supponendo ad esempio che $\underline{\omega}_0$ sia parallela all'asse \underline{i} si ha

$$\omega_{O1} \neq 0, \omega_{2O} = \omega_{O3} = 0,$$

ma allora si verifica subito dalle tre equazioni di Eulero che $\underline{\omega}(t) = \omega_{O1} \underline{i}$ (cioè $\omega_1(t) = \omega_{1O}$, $\omega_2(t) = \omega_3(t) = 0$) è soluzione, essendo unica l'asserto è dimostrato.

- il moto è una rotazione solo se la rotazione avviene attorno ad un asse principale d'inerzia, ed è uniforme.

Stiamo infatti cercando soluzioni della forma speciale

$$\underline{\omega}(t) = \omega(t) \underline{u} \text{ con } \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{0}, |\underline{u}| = 1$$

Scriviamo le equazioni di Eulero in forma vettoriale

$$\underline{0} = \mathbf{I}_O(\dot{\underline{\omega}}) + \underline{\omega} \wedge \mathbf{I}_O(\underline{\omega}) = \dot{\omega} \mathbf{I}_O(\underline{u}) + \omega^2 \underline{u} \wedge \mathbf{I}_O(\underline{u}),$$

moltiplicando scalarmente per \underline{u} si ha:

$$0 = \dot{\omega} \underline{u} \cdot \mathbf{I}_O \underline{u} = \dot{\omega} I_{rO,\underline{u}} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 \underline{u} \wedge \mathbf{I}_O(\underline{u}) = 0$$

\Rightarrow (se $\omega \neq 0$) $\underline{u} \wedge \mathbf{I}_O(\underline{u}) = 0$ cioè \underline{u} è un autovettore di \mathbf{I}_O e quindi un A.P.I(O).

Riassumendo:

2^a Proprietà dinamica degli A.P.I(O)

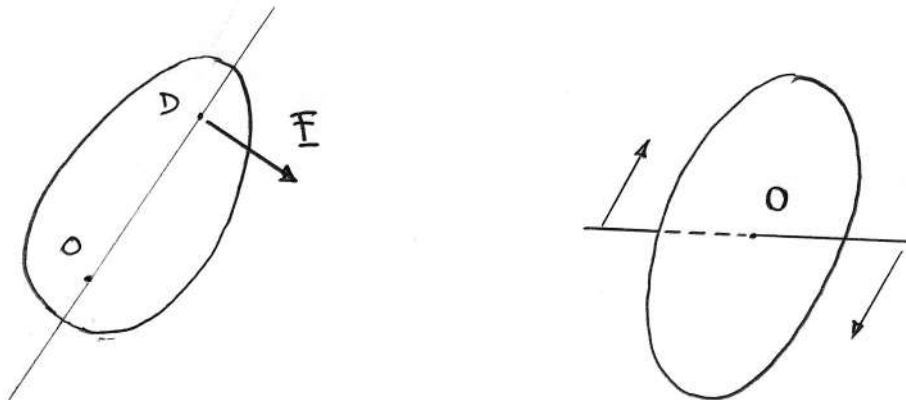
In una precessione per inerzia rispetto ad O gli A.P.I(O) sono le *uniche* direzioni per cui il moto del rigido è una rotazione.

Vengono anche detti assi di rotazione permanente (vedi l'esempio della Terra).

Si può far vedere che le rotazioni intorno all'asse di simmetria intermedio sono instabili mentre le altre due sono stabili (dallo studio qualitativo generale del moto, vedi bibliografia).

3.4 Fenomeni giroscopici elementari

Consideriamo un giroscopio in precessione intorno ad un punto O dell'asse giroscopico e soggetto ad una forza ortogonale all'asse giroscopico applicata in un punto D dell'asse giroscopico, $D \neq O$, o ad una coppia di momento ortogonale all'asse stesso.



esempio

Figura 3.3:

Sia \underline{k} l'asse giroscopico e \underline{i} tale che $\underline{F} = F \underline{i}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{M}(O) &= (\underline{x}_D - \underline{x}_O) \wedge F \underline{i} = d \underline{k} \wedge F \underline{i} = dF \underline{j} \\ &= M_O \underline{j} \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero sono allora:

$$\begin{cases} J \dot{\omega}_1 = (J - J_3) \omega_2 \omega_3 \\ J \dot{\omega}_2 = (J_3 - J) \omega_1 \omega_3 + M_O \\ J_3 \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_3(t) = \omega_3(0) = \omega_{30}$$

Distinguiamo due casi

1. $\omega_{30} = 0$ (cioè il rigido non è inizialmente in rotazione intorno a \underline{k})

$$\begin{aligned} \Rightarrow J \dot{\omega}_1 &= 0 \Rightarrow \omega_1(t) = \omega_{10} \\ J \dot{\omega}_2 &= M_O \Rightarrow \omega_2(t) = \omega_{20} + \frac{M_O}{J} t \end{aligned}$$

Se ad esempio il corpo è inizialmente fermo cioè $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$, l'asse giroscopico ha velocità:

$$\frac{d\underline{k}}{dt} = \underline{\omega} \wedge \underline{k} = \frac{M_O}{J} t \underline{j} \wedge \underline{k} = \frac{M_O}{J} t \underline{i}$$

cioè \underline{k} si muove nella direzione della forza \underline{F} (ricordare $\underline{F} = F \underline{i}$), e la sua velocità cresce linearmente col tempo.

2. se $\omega_{30} \neq 0$:

posto

$$\gamma = \frac{J_3 - J}{J} \omega_{30}, \quad \gamma \neq 0, \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\gamma \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \gamma \omega_1 + \frac{M_O}{J} \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare non omogeneo, il sistema omogeneo associato è quello trovato nelle precessioni per inerzia, una soluzione particolare è

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_1 = -\frac{M_O}{J\gamma}$$

⇒ la soluzione generale è

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= A \cos(|\gamma| t + \alpha) - \frac{M_O}{J\gamma} \\ \omega_2(t) &= A \frac{|\gamma|}{\gamma} \sin(|\gamma| t + \alpha) \end{aligned}$$

Notare che le soluzioni sono periodiche con periodo $2\pi/|\gamma|$ e limitate nel tempo, diversamente dal caso precedente $\omega_{30} = 0$.

Interpretiamo il risultato, dapprima in modo euristico:

Facendo la media in un periodo si ha:

$$\bar{\omega}_1 = -\frac{M_O}{J\gamma}, \quad \bar{\omega}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{\mathbf{k}}}{dt} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \wedge \bar{\mathbf{k}} = -\frac{M_O}{J\gamma} \underline{i} \wedge \bar{\mathbf{k}} = \frac{M_O}{J\gamma} \underline{j}$$

⇒

(a)

$$\left\| \frac{d\bar{\mathbf{k}}}{dt} \right\| = \left| \frac{M_O}{J\gamma} \right|$$

cioè lo spostamento dall'asse giroscopico è tanto minore quanto è maggiore la velocità di rotazione intorno all'asse stesso, ω_{30} . Questo comportamento è detto *tenacia dell'asse giroscopico* ed è alla base dell'uso dei giroscopi come stabilizzatori.

(b)

$$\overline{\frac{d\mathbf{k}}{dt}}$$

è parallelo a \underline{j} , cioè alla direzione del *momento* della forza e non della forza. Questo comportamento è detto *tendenza al parallelismo* (per applicazioni vedi bussola giroscopica [LCA], esercizio di [GO]).

I due risultati sopra elencati vengono detti effetti giroscopici elementari, in prima approssimazione si verificano anche nel moto di una trottola.

Per vedere il problema più chiaramente confrontiamo la soluzione del problema per $\omega_{30} \neq 0$ con il caso $\omega_{30} = 0$ nelle stesse condizioni iniziali, cioè $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$; supponiamo cioè che inizialmente il rigido sia in rotazione intorno all'asse giroscopico. Avremo allora:

$$t = 0 \begin{cases} 0 = A \cos \alpha - \frac{M_O}{J\gamma} \\ 0 = A \frac{|\gamma|}{\gamma} \sin \alpha \end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha = 0, A = \frac{M_O}{J\gamma}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega_1(t) &= \frac{M_O}{J\gamma} (\cos |\gamma| t - 1) \\ \omega_2(t) &= \frac{M_O}{J\gamma} \frac{|\gamma|}{\gamma} \sin |\gamma| t \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \underline{\omega} \wedge \underline{k} &= (\omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j} + \omega_3 \underline{k}) \wedge \underline{k} \\ &= \omega_2 \underline{i} - \omega_1 \underline{j} \\ \Rightarrow \left\| \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right\|^2 &= \omega_2^2 + \omega_1^2 = \\ &= \frac{M_O^2}{J^2 \gamma^2} (\sin^2 |\gamma| t + \cos^2 |\gamma| t + 1 - 2 \cos |\gamma| t) \\ &= 2 \frac{M_O^2}{J^2 \gamma^2} (1 - \cos |\gamma| t) \\ \Rightarrow \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right\| &= 2 \left| \frac{M_O}{J\gamma} \right| \end{aligned}$$

e

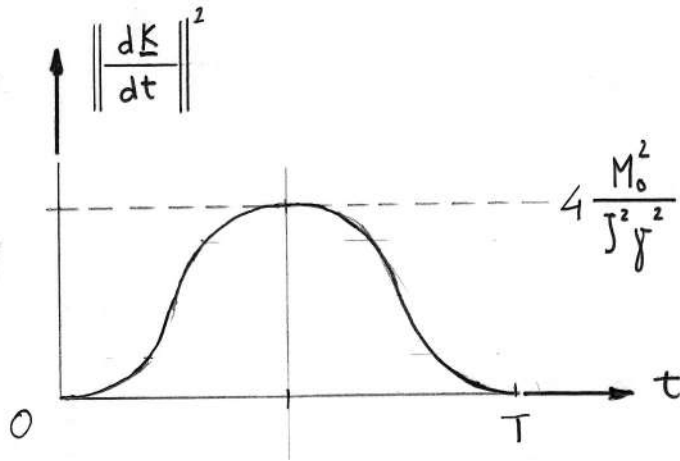


Figura 3.4:

Abbiamo cioè che non solo la media di $\left\| \frac{dk}{dt} \right\|$ ma anche il suo massimo è inversamente proporzionale ad ω_{30} ed è limitata nel tempo, diversamente dal caso $\omega_{30} = 0$.

3.5 Risoluzione Esercizi

3.5.1 Risoluzione Esercizio 3.1

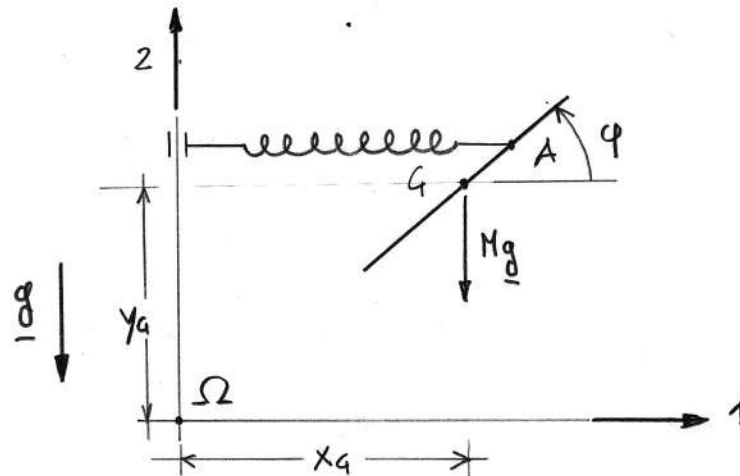


Figura 3.5:

coordinate libere x_G , y_G , φ

E.C.D.

$$\begin{aligned}
 M \underline{a}_G &= M (\ddot{x}_G \underline{e}_1 + \ddot{y}_G \underline{e}_2) = -Mg \underline{e}_2 - c x_A \underline{e}_1 \\
 &= (\text{essendo } x_A = x_G + d \cos\varphi) \\
 &= -Mg \underline{e}_2 - c(x_G + d \cos\varphi) \underline{e}_1 \\
 \frac{d}{dt} \underline{L}(G) &= J_3 \ddot{\varphi} \underline{e}_3 = (\underline{x}_A - \underline{x}_G) \wedge -c x_A \underline{e}_1 \\
 &= c x_A d \sin\varphi \underline{e}_3
 \end{aligned}$$

\Rightarrow equazioni di moto:

$$\begin{cases}
 M \ddot{x}_G = -c(x_G + d \cos\varphi) \\
 M \ddot{y}_G = -Mg \\
 J_{3G} \ddot{\varphi} = cd(x_G + d \cos\varphi) \sin\varphi
 \end{cases}$$

Se $d = 0$, cioè $A = G \Rightarrow$

$$\begin{aligned}M \ddot{x}_G &= -c x_G \\M \ddot{y}_G &= -Mg \\J_{3G} \ddot{\varphi} &= 0\end{aligned}$$

le equazioni sono disaccoppiate, e di facile soluzione.

Il primo moto dato è possibile solo se $d = 0$.

È possibile avere moti con $\varphi = 0$, sono quelli dati dalle due equazioni (lineari)

$$\begin{aligned}M \ddot{x}_G &= -c(x_G + d) \\M \ddot{y}_G &= -Mg\end{aligned}$$

Capitolo 4

Struttura delle Equazioni di Langrange

4.1 Struttura dell'energia cinetica per i sistemi olonomi

Consideriamo un sistema olonomo \mathcal{S} a l gradi libertà, coordinate libere

$(q_1, q_2, \dots, q_l) = \underline{q}$. Per ogni punto B del sistema, il vettore di posizione, in un riferimento dato, dipende dalle coordinate ed eventualmente dal tempo se i vincoli variano nel tempo con legge nota. Durante un moto le coordinate libere variano col tempo.

$$\forall B \in \mathcal{S}, \underline{x}_B(t) = \underline{x}_B(\underline{q}(t); t)$$
$$\Rightarrow \underline{v}_B = \frac{d\underline{x}_B}{dt} = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t}$$

Per comodità chiameremo

$$\sum_{i=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i = \underline{v}_B^* = \textit{velocità virtuale}$$

$$\frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t} = \underline{v}_B^T = \textit{velocità di trascinamento}$$

(= 0 per vincoli fissi rispetto al tempo)

Notiamo che la velocità virtuale dipende *linearmente* dalle $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l$ mentre la velocità di trascinamento *non* dipende dalle \dot{q} . Ne segue subito che l'energia cinetica per un sistema olonomo è *sempre* un polinomio di secondo grado nelle $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l$. Precisamente

$$\begin{aligned}
\underline{v}_B &= \underline{v}_B^* + \underline{v}_B^T \\
\Rightarrow K &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \|\underline{v}_B\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \|\underline{v}_B^*\|^2 + \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \underline{v}_B^* \cdot \underline{v}_B^T + \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \|\underline{v}_B^T\|^2 \\
&= K_2 + K_1 + K_0 \tag{4.1} \\
K_0 &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \left\| \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t} \right\|^2 = K_0(\underline{q}; t) \text{ indipendente da } \dot{q}_1 \dots \dot{q}_l \\
K_1 &= \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \left(\sum_{i=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1}^l \left(\sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t} \right) \dot{q}_i \\
&= \sum_{i=1}^l b_i(\underline{q}; t) \dot{q}_i = \\
&\quad (\text{definendo } \underline{b} = (b_1, \dots, b_l), \underline{\dot{q}} = (\dot{q}_1 \dots \dot{q}_l)) \\
&= \underline{b} \cdot \underline{\dot{q}} = \text{forma lineare in } \dot{q}_1 \dots \dot{q}_l \\
K_2 &= \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \left(\sum_{j=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \left(\sum_{B \in \mathcal{S}} m_B \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l A_{ij}(\underline{q}; t) \dot{q}_i \dot{q}_j = \\
&\quad (\text{denotando con } A \text{ la matrice simmetrica } l \times l \\
&\quad \text{avente come elementi gli } A_{ij})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot A \underline{\dot{q}} \\
&= \text{forma quadratica in } \dot{q}_i \dots \dot{q}_j
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Notiamo subito una proprietà importante della parte K_2 :

Proprietà 1 di K_2

K_2 è una forma quadratica definita positiva nelle $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_l$, in particolare $\det A > 0$.

Infatti è evidente che, essendo $K_2 = \frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \|\underline{v}_B^*\|^2$, essa è sempre non negativa ed è nulla se e solo se

$$\forall B \in S, \underline{v}_B^* = \underline{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0,$$

ma queste equazioni sono soddisfatte se e solo se $\dot{q}_1 = 0 \dots \dot{q}_l = 0$, cioè se anche una sola delle coordinate libere varia nel tempo, un qualche punto B del sistema si deve muovere. Guardando le cose in un altro modo, una condizione da imporre alle coordinate libere è proprio che le $\frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i}$, $i = 1, \dots, l$ siano *linearmente indipendenti*.

Esercizio 4.1

Dato un sistema olonomo a due gradi di libertà, coordinate libere q_1, q_2 , determinare se le funzioni seguenti possono essere l'energia cinetica del sistema, specificando le motivazioni:

- $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \exp q_1$
- $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^3 t$
- $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2$
- $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 + q_2^3$

Nota 4.1 Se i vincoli sono fissi, non c'è dipendenza esplicita di \underline{x}_B da t , quindi \underline{v}_B^T è nulla. Segue che:

$$\begin{aligned} \text{vincoli fissi} &\Rightarrow K_1 = K_0 = 0 \text{ e} \\ K &= K_2 = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot A(\underline{q}) \underline{\dot{q}} \end{aligned}$$

(nell'espressione per gli $A_{i,j}$ il tempo non compare esplicitamente).

4.2 Struttura delle equazioni di Lagrange

Riscriviamo per chiarezza le equazioni nel caso generale, ed esaminiamone i vari termini

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} \right) = Q_i, \quad i = 1, \dots, l$$

Q_i = forza generalizzata i-esima = $\sum_{B \in \mathcal{S}} \underline{F}_B^a \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial \dot{q}_i}$ dipende da \underline{q} , $\underline{\dot{q}}$, t ma non da $\underline{\ddot{q}}$, poichè le forze (note) dipendono da posizione, velocità, tempo e non da accelerazione.

$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}$ è funzione di \underline{q} , $\underline{\dot{q}}$, t

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_{j=1}^l A_{ij} \dot{q}_j + b_i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \sum_{j=1}^l A_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^l \left(\frac{d}{dt} A_{ij}(\underline{q}(t), t) \right) \dot{q}_j \\ &\quad + \frac{d}{dt} b_i(\underline{q}(t), t) \end{aligned}$$

\Rightarrow per ogni sistema olonomo le equazioni di Lagrange hanno la forma:

$$\sum_{j=1}^l A_{ij}(\underline{q}, t) \ddot{q}_j = \mathcal{F}_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t); \quad i = 1, \dots, l$$

\Rightarrow (detto $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_l)$)

$$A \underline{\ddot{q}} = \underline{\mathcal{F}} \quad (4.3)$$

\Rightarrow (essendo $\det A > 0$ e quindi A invertibile)

$$\underline{\ddot{q}} = A^{-1} \underline{\mathcal{F}}$$

Quindi le equazioni di Lagrange sono sempre un sistema di l equazioni differenziali del secondo ordine che, almeno teoricamente, si può scrivere in forma normale, cioè come

$$\underline{\ddot{q}} = \underline{\tilde{\mathcal{F}}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) .$$

Un altro modo per capire la struttura delle equazioni è il seguente:

$$\text{Definiamo } p_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, l \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow p_i = \sum_{j=1}^l A_{ij} \dot{q}_j + b_i$$

$$\Rightarrow \quad (\text{ponendo } \underline{p} = (p_1, \dots, p_l))$$

$$\underline{p} = A \underline{\dot{q}} + \underline{b}$$

$$\Rightarrow \quad (\text{poichè } \det A > 0 \text{ e quindi } A \text{ invertibile ,} \\ \text{e } A \text{ e } \underline{b} \text{ non dipendono da } \underline{\dot{q}})$$

$$\underline{\dot{q}} = A^{-1} (\underline{p} - \underline{b})$$

Si può cioè esprimere $\underline{\dot{q}}$ in funzione di \underline{p} e \underline{q} , oltre eventualmente a t , avremo:

$$\dot{q}_i = \gamma_i(\underline{q}, \underline{p}, t), \quad i = 1, \dots, l$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dp_i}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) = (\text{per le equazioni di Lagrange}) \\ &= \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} + Q_i \right) \Big|_{\dot{q}_i = \gamma_i} \\ &= f_i(\underline{q}, \underline{p}, t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si può quindi, sfruttando l'invertibilità della matrice A , scrivere le equazioni di Lagrange come un sistema normale di $2l$ equazioni differenziali del primo ordine nelle incognite $(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l)$, precisamente

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \gamma_i \\ \frac{dp_i}{dt} = f_i \end{cases}, \quad i = 1, \dots, l \quad (4.6)$$

Possiamo vederlo in una forma più compatta introducendo il vettore

$$\underline{y} = (q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l) \quad , \quad \underline{y} \in \mathfrak{R}^{2l}$$

\Rightarrow le equazioni di Lagrange hanno la forma

$$\frac{d\underline{y}}{dt} = \underline{F}(\underline{y}, t) \quad (4.7)$$

dove \underline{F} si ricava dalle precedenti definizioni (4.5), cioè

$$\underline{F} = (\gamma_1, \dots, \gamma_l, f_1, \dots, f_l)$$

Le equazioni di Lagrange rientrano quindi nei così detti *Sistemi Dinamici*, cioè del tipo (4.7), se si prendono come incognite le $\underline{y} = (q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l)$, lo spazio vettoriale di \underline{y} viene detto *spazio delle fasi* del sistema dinamico.

Nota 4.2 *La seconda strada seguita per capire la struttura delle equazioni di moto dei sistemi olonomi, è forse la più aderente all'intuito fisico. Infatti se consideriamo un punto materiale di massa m soggetto alla forza \underline{F} , in un riferimento dato, abbiamo:*

$$\begin{aligned} \text{legge di Newton} &\Rightarrow \frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F} \\ \text{definizione della quantità di moto} &\Rightarrow \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\underline{p}}{m} \end{aligned}$$

con \underline{x} vettore di posizione del punto e \underline{p} quantità di moto del punto. Una volta espressa la forza \underline{F} in funzione di $\underline{x}, \underline{p}, t$, otteniamo un sistema dinamico nelle incognite $(\underline{x}, \underline{p})$, vedi (4.7).

Alle p_i introdotte prima si dà il nome di momento coniugato i -esimo.

Esercizio 4.2 (vedi [TB] pag 144)

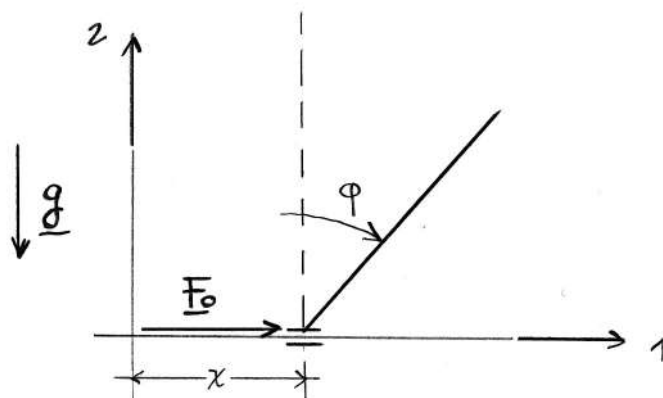


Figura 4.1:

$$\underline{F}_O = (P \varphi + D \dot{\varphi}) \underline{e}_1$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e la reazione vincolare in O , $V_O \underline{e}_2$ durante il moto.

4.3 Caso conservativo, sistema canonico

Consideriamo un sistema olonomo per cui si può introdurre una funzione Lagrangiana e le cui equazioni di moto siano le equazioni di Lagrange in forma conservativa, vale allora il seguente risultato:

Risultato 1

Ipotesi:

1.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 , \quad i = 1, \dots, l$$

2. le l equazioni

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, l$$

sono invertibili rispetto a $\underline{\dot{q}}$ (cioè l'Hessiano di \mathcal{L} ha determinante non nullo) diciamo

$$\dot{q}_i = \gamma_i(\underline{q}, \underline{p}, t), \quad i = 1, \dots, l$$

⇒ Tesi: Il sistema delle equazioni di Lagrange si può trasformare nel seguente:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$$

Sistema canonico (o *Hamiltoniano*) $i = 1, \dots, l$ con

$$\mathcal{H} = \left(\sum_{j=1}^l p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \right) \Big|_{\dot{q}_j = \gamma_j(\underline{q}, \underline{p}, t)}$$

(\mathcal{H} è la trasformata di Legendre di \mathcal{L}).

Dimostrazione

(un abile gioco di derivate)

Notiamo che \mathcal{H} è una funzione di \underline{q} e \underline{p} sia direttamente sia come funzione composta con le $\dot{q}_i = \gamma_i$. Segue che (attenzione !):

- $\forall k, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_k} = p_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0$, (per definizione di p_k)
- $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} =$
 $=$ (essendo $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_k} = 0$) $= \dot{q}_i$
- $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} =$

$$\begin{aligned}
&= \left(\text{sempre essendo } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \right) \\
&= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \\
&= \left(\text{usando le equazioni di Lagrange} \right) \\
&= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \\
&= \left(\text{usando la definizione di } p_i \right) \\
&= -\frac{d}{dt} p_i
\end{aligned}$$

La funzione \mathcal{H} è detta *Hamiltoniana* del sistema, il suo significato fisico è evidenziato dal seguente risultato.

Risultato 2

Per ogni sistema olonomo a vincoli fissi, lisci e forze attive conservative (e non dipendenti esplicitamente dal tempo) vale il risultato 1 e $\mathcal{H} = \text{energia meccanica} = K + V$.

Dimostrazione del Risultato 2

Dalle ipotesi fatte si ha che:

- vale Hp. 1) con

$$\mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot A \underline{\dot{q}} - V(\underline{q})$$

- vale Hp. 2) con

$$\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \\
&= \left(\text{essendo } K = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot A(\underline{q}) \underline{\dot{q}} \right) \\
&\quad \sum_j A_{ij} \dot{q}_j = (A \underline{\dot{q}})_i \\
&\quad \left(\text{invertibile essendo } \det A > 0 \right)
\end{aligned}$$

⇒ vale il sistema canonico con

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left(\underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} - \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot A \underline{\dot{q}} + V(\underline{q}) \right)_{\underline{\dot{q}}=A^{-1} \underline{p}} \\ &= \left(\text{essendo } \underline{p} = A \underline{\dot{q}} \text{ e } K = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot A \underline{\dot{q}} \right) \\ &= K + V \end{aligned}$$

Esercizio 4.3

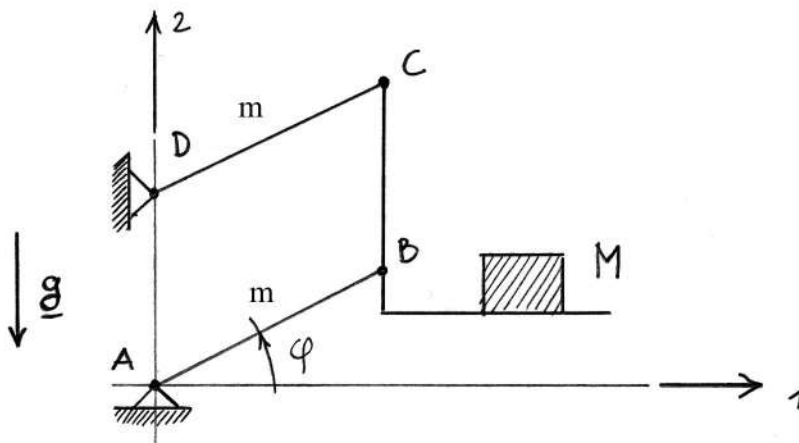


Figura 4.2:

$$AB = DC = BC = l$$

aste omogenee
asta ad L di massa m

Scrivere il sistema canonico.

Esempio 4.1

Il seguente disegno tratto da [TB] pag 185 può far pensare a tre diversi *modelli meccanici*, quello usato in [TB] è il terzo.

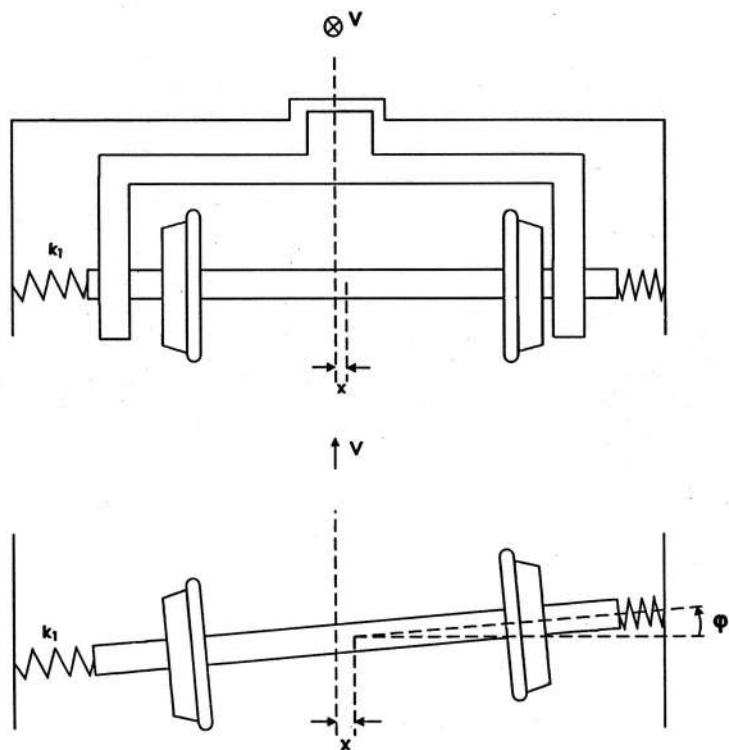
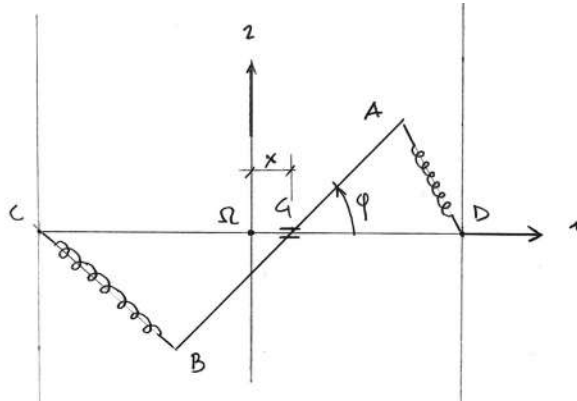
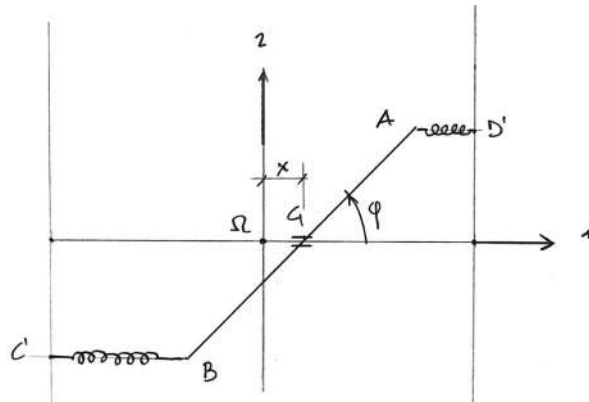


Figura 4.3:

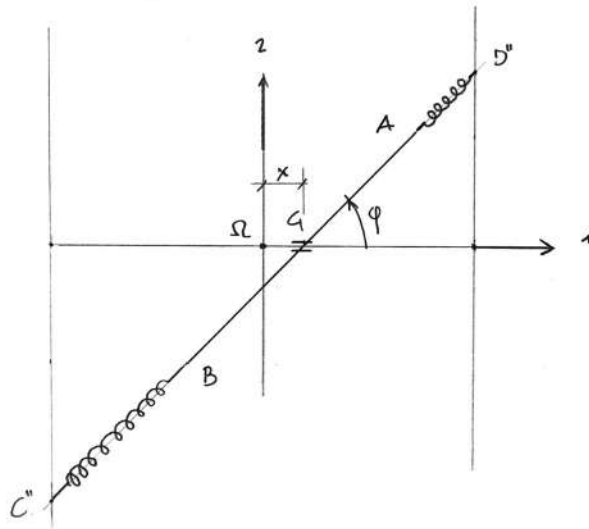


Modello 1

$$\overline{\Omega D} = \overline{\Omega C} = L, \overline{AG} = \overline{BG} = l < L$$



Modello 2



Modello 3

Per tutti e tre

$$K = \frac{1}{2}m \dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_G \dot{\varphi}^2$$

Modello 1

$$\begin{aligned} V &= \frac{c}{2}\overline{AD}^2 + \frac{c}{2}\overline{BC}^2 \\ \underline{x}_A &= (x + l \cos\varphi) \underline{e}_1 + (l \sin\varphi) \underline{e}_2 \\ \underline{x}_D &= L \underline{e}_1 \\ (\underline{x}_A - \underline{x}_D) &= (x + l \cos\varphi - L) \underline{e}_1 + l \sin\varphi \underline{e}_2 \\ \overline{AD}^2 = \|\underline{x}_A - \underline{x}_D\|^2 &= (x + l \cos\varphi - L)^2 + l^2 \sin^2\varphi \\ &= x^2 + l^2 + L^2 + 2lx \cos\varphi - 2xL - 2lL \cos\varphi \\ \\ \underline{x}_B &= (x - l \cos\varphi) \underline{e}_1 - l \sin\varphi \underline{e}_2 \\ \underline{x}_C &= -L \underline{e}_1 \\ \underline{x}_B - \underline{x}_C &= (x - l \cos\varphi + L) \underline{e}_1 - l \sin\varphi \underline{e}_2 \\ \overline{BC}^2 = \|\underline{x}_B - \underline{x}_C\|^2 &= (x - l \cos\varphi + L)^2 + l^2 \sin^2\varphi \\ &= x^2 + l^2 + L^2 - 2xl \cos\varphi + 2xL - 2lL \cos\varphi \\ \Rightarrow V &= \frac{c}{2} (2x^2 - 4lL \cos\varphi + 2l^2 + 2L^2) \end{aligned}$$

\Rightarrow le equazioni di moto del modello 1 sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -2cx \\ I_G\ddot{\varphi} &= -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -2clL \sin\varphi \end{aligned}$$

Notare che $x = 0, \varphi = 0$ è posizione di equilibrio, stabile poichè minimo per V .

Modello 2

$$V = \frac{c}{2}\overline{AD'}^2 + \frac{c}{2}\overline{BC'}^2$$

$$\begin{aligned}
\overline{AD'} &= |L - x_A| = |x + l \cos\varphi - L| \\
\overline{AD'}^2 &= x^2 + l^2 \cos^2\varphi + L^2 - 2xL + 2xl \cos\varphi - 2lL \cos\varphi \\
\overline{BC'} &= |x - l \cos\varphi + L| \\
\overline{BC'}^2 &= x^2 + l^2 \cos^2\varphi + L^2 - 2xL \cos\varphi + 2xl - 2lL \cos\varphi \\
\Rightarrow V &= \frac{c}{2} (2x^2 + 2l^2 \cos^2\varphi - 4lL \cos\varphi + 2L^2)
\end{aligned}$$

\Rightarrow le equazioni di moto del modello 2 sono:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -2cx \\
I_G\ddot{\varphi} &= -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -c(-2l^2 \sin\varphi \cos\varphi + 4lL \sin\varphi)
\end{aligned}$$

Notare che $x = 0, \varphi = 0$ è posizione di equilibrio, stabile poichè minimo per V (controllare !).

Modello 3 (molle *follower*)

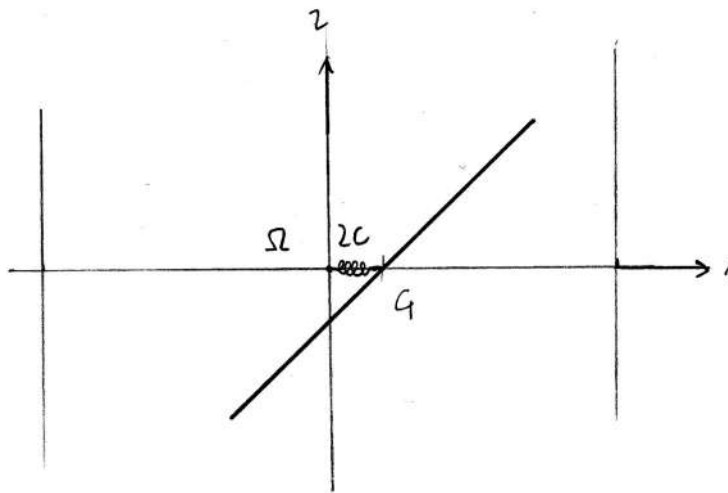
$$\begin{aligned}
L.V. &= \underline{F}_A \cdot \delta \underline{x}_A + \underline{F}_B \cdot \delta \underline{x}_B \\
&= (\text{lavoro virtuale per i rigidi}) \\
&\quad (\underline{F}_A + \underline{F}_B) \cdot \delta \underline{x}_G + \delta\varphi \underline{0} \\
&\quad (\text{essendo } \underline{F}_A = -c(\underline{x}_A - \underline{x}_D) \text{ e } \underline{F}_B = -c(\underline{x}_B - \underline{x}_C) \\
&\quad \text{hanno entrambe momento nullo rispetto a } G) \\
&= (\underline{F}_A + \underline{F}_B) \cdot \underline{e}_1 \delta x \\
&\quad (\text{poichè } \delta \underline{x}_G = \delta x \underline{e}_1)
\end{aligned}$$

Adesso :

$$\begin{aligned}
\underline{F}_A \cdot \underline{e}_1 &= -c(\underline{x}_A - \underline{x}_{D''}) \cdot \underline{e}_1 \\
&= -c(x + l \cos\varphi - L) \\
\underline{F}_B \cdot \underline{e}_1 &= -c(\underline{x}_B - \underline{x}_{C''}) \cdot \underline{e}_1 \\
&= -c(x + l \cos\varphi + L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L.V. \text{ totale} &= \delta x (-2cx) + \delta\varphi(0) \\ \Rightarrow V &= cx^2 \end{aligned}$$

cioè l'energia potenziale è la stessa del seguente modello:



(come se ci fosse una molla tra Ω e G di costante elastica $2c$).

\Rightarrow le equazioni di moto del modello 3 sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -2cx \\ I_G\ddot{\varphi} &= -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}$$

Nota 4.3 *la singola molla follower in A non è conservativa infatti*

$$\begin{aligned} \underline{F}_A \cdot \delta \underline{x}_A &= -c(x + l \cos\varphi - L) \delta x + 0 \delta\varphi \\ Q_x &= -c(x + l \cos\varphi - L) \end{aligned}$$

$$Q_\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial \varphi} \neq \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x}.$$

4.4 Risoluzione degli Esercizi

4.4.1 Risoluzione Esercizio 4.1

- (i) NO $exp\dot{q}_1$ non è quadratica in \dot{q}_1
- (ii) SI
- (iii) NO la forma è quadratica ma non è definita positiva, precisamente è uguale a $(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$, quindi si annulla per $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2$ anche se entrambi *non* sono nulli
- (iv) NO, la parte quadratica è \dot{q}_1^2 che non è definita positiva, precisamente è nulla se $\dot{q}_1 = 0$, ma \dot{q}_2 può avere valore qualsiasi.

4.4.2 Risoluzione Esercizio 4.2

$$K = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{3G}\dot{\varphi}^2$$

$$\underline{x}_G = \left(x + \frac{l}{2}\sin\varphi\right) \underline{e}_1 + \frac{l}{2}\cos\varphi \underline{e}_2$$

$$\underline{v}_G = \left(\dot{x} + \frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}\right) \underline{e}_1 - \frac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi} \underline{e}_2$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right).$$

Il peso ha energia potenziale

$$V = -mg \cdot \underline{x}_G = mg\frac{l}{2}\cos\varphi.$$

La forza in O fa lavoro virtuale

$$\underline{F}_O \cdot \delta \underline{x}_O = F_O \delta x$$

\Rightarrow le 2 forze generalizzate sono

$$\begin{aligned} Q_x &= F_O - \frac{\partial V}{\partial x} = F_O \\ Q_\varphi &= -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mg \frac{l}{2} \sin \varphi \end{aligned}$$

(Notare che il sistema non è conservativo)

Prima di proseguire notare che l'energia cinetica ha solo la parte quadratica (K_2) e la matrice dei coefficienti è

$$A = m \begin{pmatrix} 1 & l/2 \cos \varphi \\ l/2 \cos \varphi & l^2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\det A}{m^2} = \frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{4} \cos^2 \varphi \geq \frac{l^2}{12} > 0$$

$\Rightarrow A$ è definita positiva

Scriviamo le equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(m\dot{x} + m\frac{l}{2}\dot{\varphi} \cos \varphi \right) \\ &= m\ddot{x} + m\frac{l}{2}\ddot{\varphi} \cos \varphi - m\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ &= \frac{\partial K}{\partial x} + Q_x = F_O \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(m\frac{l}{2}\dot{x} \cos \varphi + m\frac{l^2}{3}\dot{\varphi} \right) \\ &= m\frac{l}{2}\ddot{x} \cos \varphi + m\frac{l^2}{3}\ddot{\varphi} - m\frac{l}{2}\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi \\ &= \frac{\partial K}{\partial \varphi} + Q_\varphi = -m\frac{l}{2}\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi + m\frac{g}{2}l \sin \varphi \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$m \begin{pmatrix} 1 & l/2 \cos\varphi \\ l/2 \cos\varphi & l^2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + F_O \\ m\frac{g}{2}l \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Se vogliamo le equazioni nella forma di un sistema dinamico del I ordine, determiniamo per primi i due momenti coniugati p_x e p_φ

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m\frac{l}{2}\dot{\varphi} \cos\varphi$$

$$p_\varphi = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m\frac{l}{2}\dot{x} \cos\varphi + m\frac{l^2}{3}\dot{\varphi}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_\varphi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} p_x \\ p_\varphi \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_x \\ p_\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} &= B_{11} p_x + B_{12} p_\varphi \\ \dot{\varphi} &= B_{12} p_x + B_{22} p_\varphi \\ \dot{p}_x &= F_O \\ \dot{p}_\varphi &= -m\frac{l}{2}\sin\varphi (B_{11} p_x + B_{12} p_\varphi) (B_{12} p_x + B_{22} p_\varphi) + mg\frac{l}{2} \sin\varphi \end{cases}$$

dove

$$B = \frac{1}{ml^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\cos^2\varphi}{4} \right)} \begin{pmatrix} l^2/3 & -l/2 \cos\varphi \\ -l/2 \cos\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

Notare che $p_x = m\dot{x}_G$, $p_\varphi = -\underline{L}(O) \cdot \underline{e}_3$. Reazione:

$$V_O - mg = m\ddot{y}_g, y_G = \frac{l}{2}\cos\varphi, \dot{y}_G = -\frac{l}{2}\sin\varphi \dot{\varphi}, \ddot{y}_G = -\frac{l}{2}\sin\varphi \ddot{\varphi} - \frac{l}{2}\cos\varphi \dot{\varphi}^2.$$

4.4.3 Risoluzione Esercizio 4.3

- Calcoliamo K :

$$AB \text{ ruota intorno ad } A \Rightarrow K_{AB} = \frac{1}{2}m\frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2$$

$$\begin{aligned}
DC \text{ ruota intorno a } D &\Rightarrow K_{DC} = \frac{1}{2}m\frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2 \\
\text{asta ad } L \text{ con carico } M \text{ trasla} &\Rightarrow K_L = \frac{1}{2}(m+M)\|\underline{v}_B\|^2 \\
&= \frac{1}{2}(m+M)l^2\dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}l^2\left(\frac{5}{3}m+M\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}a\dot{\varphi}^2$$

- Calcoliamo V :

$$\begin{aligned}
AB &\Rightarrow mg\frac{l}{2}\sin\varphi \\
DC &\Rightarrow mg\frac{l}{2}\sin\varphi + \text{costante}
\end{aligned}$$

asta ad L con carico (la quota del centro di massa è uguale a quella di B più una costante perchè l'asta trasla)

$$\Rightarrow (m+M)gl\sin\varphi + \text{costante}$$

$$V = (2m+M)gl\sin\varphi = b\sin\varphi$$

$$\bullet p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = a\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p}{a}$$

$$\bullet \mathcal{H} = (K+V)|_{\dot{\varphi}=\frac{p}{a}} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{a} + V(\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{a} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -b\cos\varphi \end{cases}$$

Notare che la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a\dot{\varphi}^2 - b\sin\varphi$$

è identica, valore delle costanti a parte, a quella del pendolo fisico, vedi figura 4.4

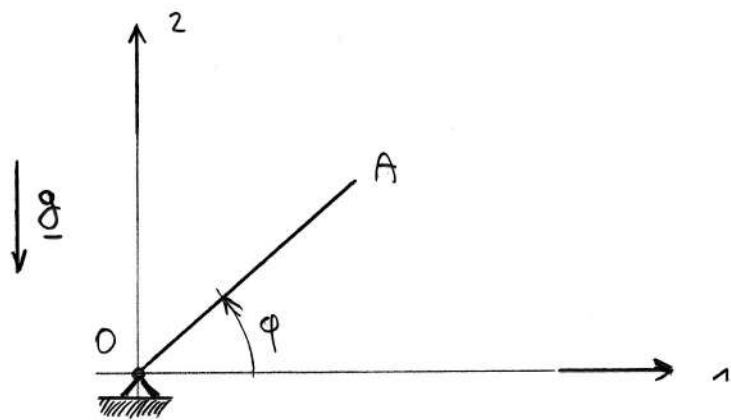


Figura 4.4:

I due sistemi avranno quindi analoghe leggi di moto.

Capitolo 5

Stabilità

5.1 Introduzione e Definizioni

Abbiamo visto che le equazioni di moto di un sistema olonomo ad l gradi di libertà si possono scrivere come un sistema dinamico nello spazio delle fasi $\underline{y} = (q, p)$. Il problema ai dati iniziali è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{\underline{y}} &= \underline{F}(\underline{y}, t) \\ \underline{y}(0) &= \underline{y}_0 \end{cases}$$

Assumendo che la funzione \underline{F} sia regolare il problema ha un'unica soluzione per ogni \underline{y}_0 , almeno per un certo intervallo di tempo $[0, t)$. Per evidenziare la dipendenza dei dati iniziali indichiamo tale soluzione con:

$$\underline{y}(t; \underline{y}_0)$$

Definizione 1 Si dice traiettoria uscente da \underline{y}_0 la curva dello spazio delle fasi definita in forma parametrica dall'equazione:

$$\Gamma_{\underline{y}_0} = \{ \underline{y} \in \mathfrak{R}^{2l} : \underline{y} = \underline{y}(t; \underline{y}_0) , t \in [0, \tau) \}$$

con il tempo come parametro.

(Il nome viene dal notare che se $\underline{y} = (y_1, y_2)$ sono le coordinate di un punto nello spazio fisico che si muove secondo la legge del sistema dinamico, la curva sopra definita è proprio la traiettoria del punto nel senso usuale)

L'equilibrio di un sistema olonomo corrisponde a soluzioni stazionarie (cioè costanti nel tempo) del sistema dinamico, cioè $\underline{q}(t) = \underline{q}_E$, $\underline{p}(t) = \underline{0}$ (sistema fermo) $\Rightarrow \underline{y}_E = (\underline{q}_E, \underline{0})$.

Ovviamente perchè \underline{y}_E sia di equilibrio deve valere la condizione

$$\underline{F}(\underline{y}_E, t) = \underline{0}, \quad \forall t$$

Importanti sono i casi in cui \underline{F} non dipende esplicitamente dal tempo, in tal caso si parla di *sistema dinamico autonomo*.

Esempio 5.1

Prendiamo un rigido in rotazione intorno ad un asse fisso verticale, soggetto al peso e ad una coppia di attrito di momento $-\nu\dot{\varphi}$, φ angolo di rotazione, I_O = momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione \underline{u}

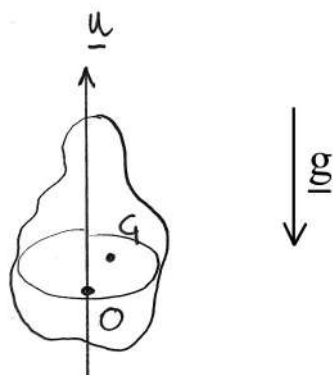


Figura 5.1:

Si costata facilmente che:

-

$$K = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2$$

- l'energia potenziale del peso è costante perchè G ha quota costante

- il momento $-\nu \underline{\omega}$ dà una forza generalizzata

$$-\nu \underline{\omega} \cdot \underline{u} = -\nu \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow p = (\text{momento coniugato a } \varphi) = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = I_O \dot{\varphi} (= \underline{L}(O) \cdot \underline{u})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{p}{I_O} \\ \dot{p} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = (\text{equazioni di Lagrange}) = \frac{\partial K}{\partial \varphi} + Q \\ = Q = \frac{\nu}{I_O} p \text{ (essendo } \dot{\varphi} = \frac{p}{I_O} \text{)} \end{cases}$$

In questo caso è semplice calcolare la soluzione per ogni dato iniziale, precisamente:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad p(0) = p_0$$

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{p_0}{\nu} \left(1 - \exp\left(-\frac{\nu}{I_O} t\right) \right) \\ p(t) = p_0 \exp\left(-\frac{\nu}{I_O} t\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t; \underline{y}_0) = (\varphi(t; \varphi_0; p_0), p(t; \varphi_0; p_0))$$

Ci sono infinite soluzioni di equilibrio,

$$\underline{y}_E = (\varphi_0, 0), \quad \forall \varphi_0 \in \mathfrak{R}$$

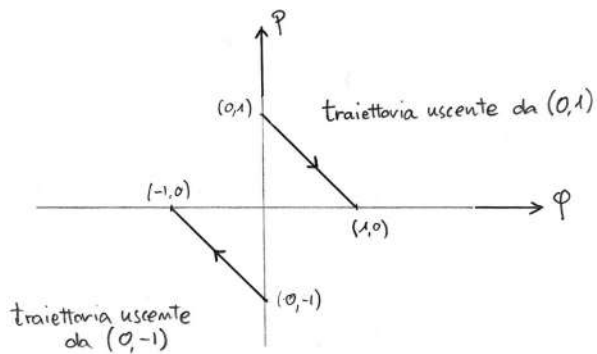
Quindi:

se $p_0 = 0$: la *traiettoria uscente da* $(\varphi_0, 0)$ si riduce al punto $(\varphi_0, 0)$

se $p_0 \neq 0$: per capire come è fatta la *traiettoria* notiamo che

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{\nu}{I_O} t\right) \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \frac{p_0 - p}{\nu} \Rightarrow p - p_0 = -\nu(\varphi - \varphi_0)$$

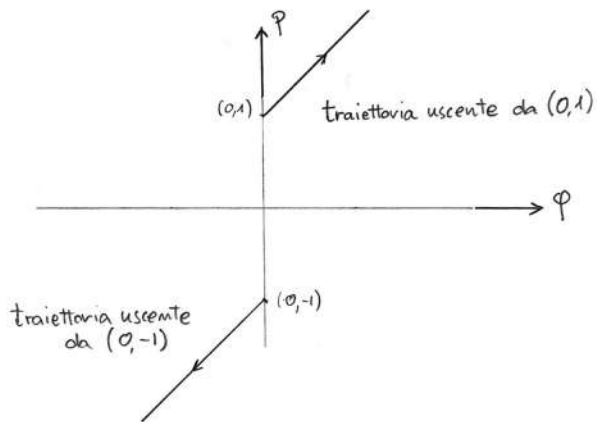
cioè segmenti di retta di pendenza $-\nu$ passanti per (φ_0, p_0)



$$\nu = 1$$

Figura 5.2:

Notare che se invece di supporre $\nu > 0$ (cioè coppia di attrito) supponiamo $\nu < 0$ (coppia motrice di momento $-\nu \underline{\omega}$, $-\nu > 0$) le traiettorie sono semirette di pendenza $-\nu$ uscenti da (φ_0, p_0)



$$\nu = -1$$

Figura 5.3:

In questo esempio le soluzioni sono date esplicitamente, il punto è che in molti casi si hanno informazioni a priori sulle traiettorie senza risolvere prima le equazioni differenziali.

In particolare, consideriamo un sistema meccanico conservativo a vincoli fissi ad l gradi di libertà. L'informazione data dalla conservazione dell'energia, cioè:

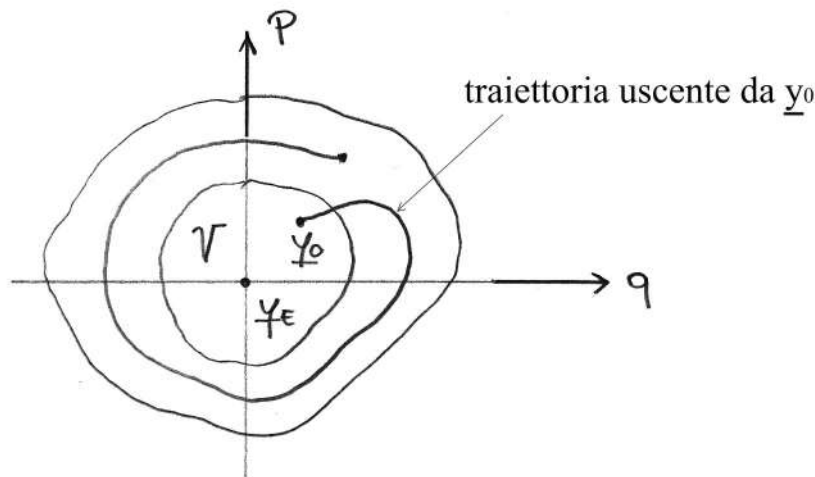
$$\mathcal{H}(\underline{y}(t; \underline{y}_0)) = E = \mathcal{H}(\underline{y}_0) \text{ con } \mathcal{H} = K + V$$

si può interpretare geometricamente, in quanto afferma che la traiettoria uscente dal dato iniziale \underline{y}_0 è sempre contenuta nell'insieme di livello E della funzione $\mathcal{H}(\underline{y})$ cioè

$$\left\{ \underline{y} \in \mathbb{R}^{2l} : \mathcal{H}(\underline{y}) = E = \mathcal{H}(\underline{y}_0) \right\}, \quad \underline{y} = (\underline{q}, \underline{p})$$

Studiando tali insiemi al variare di E si ottengono informazioni qualitative sul moto del sistema sia in generale sia riguardo al problema della stabilità di una data configurazione di equilibrio (cioè al problema a cui siamo ora interessati), per approfondimenti vedi ad esempio [BO]. Passiamo finalmente a dare le definizioni di stabilità (come si dice alla Liapunov), in generale per qualsiasi sistema dinamico.

Definizione 2 Una soluzione di equilibrio \underline{y}_E si dice stabile se per ogni intorno di \mathcal{U} di \underline{y}_E esiste un intorno \mathcal{V} di confinamento di \underline{y}_E tale che per ogni $\underline{y}_0 \in \mathcal{V}$ la traiettoria uscente da \underline{y}_0 è contenuta in \mathcal{U} .



(Ovviamente si possono considerare intorni *sferici* e la definizione di stabilità diventa:

$$\forall \epsilon, \exists \delta : \forall \underline{y}_0 \in B_\delta(\underline{y}_E), \underline{y}(t; \underline{y}_0) \in B_\epsilon(\underline{y}_E), \forall t \in [0, T)$$

)

Nota 5.1 *nel caso dei sistemi olonomi si può semplicemente parlare di stabilità della configurazione di equilibrio \underline{q}_E*

Per non insistere troppo con le definizioni diciamo solo che *l'instabilità* è la *negazione* della stabilità. Nell'esempio 5.1 ogni posizione di equilibrio è stabile se $\nu > 0$ ed instabile se $\nu < 0$. Analoghe definizioni si possono dare per soluzioni qualsiasi del sistema dinamico.

5.2 Criterio di Stabilità a priori

In opportune ipotesi si possono dare criteri di stabilità a priori, senza cioè risolvere le equazioni di moto. Notiamo subito che un altro metodo è quello di linearizzare le equazioni di moto, si parla allora di stabilità lineare, vedi Cap. 6.

Per la meccanica è di notevole importanza il cosiddetto criterio di Dirichlet.

Criterio di stabilità Dirichlet

Preso un sistema olonomo ad l gradi di libertà, regolare, tale che:

1. *i vincoli sono fissi*
2. *sono presenti forze conservative con potenziale $V(\underline{q})$ ed eventualmente forze dissipative, tutte indipendenti esplicitamente da t*
3. *la configurazione di equilibrio \underline{q}_E è un minimo proprio di $V(\underline{q})$*

$$\Rightarrow \underline{q}_E \text{ è stabile .}$$

Il criterio si basa su un teorema più generale che vale per ogni sistema dinamico autonomo:

Teorema 1 (di Liapunov) Consideriamo un sistema dinamico $\underline{y} = \underline{F}(\underline{y})$ tale che:

1. \underline{F} dipende solo da \underline{y} ed è regolare
2. esiste una funzione $\mathcal{H}(\underline{y})$ regolare tale che per ogni soluzione $\underline{y}(t)$ del sistema

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\underline{y}(t)) \leq 0, \quad t \in [0, T)$$

3. $\underline{y}(t) = \underline{y}_E$ è una soluzione stazionaria ed \underline{y}_E è un minimo proprio di $\mathcal{H}(\underline{y})$

$\Rightarrow \underline{y}_E$ è stabile .

Esempio 5.2

Dato il sistema dinamico canonico:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \end{cases}, \quad \mathcal{H} = q^6 + p^4$$

si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt}(q(t), p(t)) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \dot{p} \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = 0, \end{aligned}$$

$\underline{y}_E = (0, 0)$ è soluzione stazionaria ed è un minimo proprio di \mathcal{H} quindi è stabile. \mathcal{H} può essere l'Hamiltoniano di un sistema olonomo ad 1 grado di libertà ?

Dimostrazione del Criterio di Dirichlet

Facciamo vedere che è applicabile il Teoema di Liapunov

- Hp 1 e 2 \Rightarrow

1. equazioni di moto $\dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y})$, $\underline{y} = (\underline{q}, \underline{p})$
- 2.

$$\frac{d}{dt}(K + V) = W_{dissipativa} \leq 0$$

Prendiamo $\mathcal{H} = K + V$

- Hp 3 $\Rightarrow \underline{y}_E = (\underline{q}_E, \underline{0})$ è un minimo proprio di \mathcal{H} , infatti \underline{q}_E è minimo proprio di V e $\underline{p} = \underline{0}$ è minimo proprio di K (che ricordiamo è definita positiva rispetto alle \underline{p})

Valendo il Teorema di Liapunov, segue l'asserto.

Dimostrazione del Teorema di Liapunov

1. Hp 3 \Rightarrow esiste un intorno Ω di \underline{y}_E tale che

$$\mathcal{H}(\underline{y}) > \mathcal{H}(\underline{y}_E), \quad \forall \underline{y} \in \Omega$$

per semplicità di esposizione prendiamo $\mathcal{H}(\underline{y}_E) = 0$

2. Per ogni intorno \mathcal{U} di \underline{y}_E , $\mathcal{U} \subset \Omega$, detto al solito $\partial\mathcal{U}$ il bordo di \mathcal{U} , definiamo $E \in \mathfrak{R}$ tale che

$$E = \min_{\underline{y} \in \partial\mathcal{U}} \mathcal{H}(\underline{y})$$

per il punto (1) $E > 0$

3. (essendo \mathcal{H} regolare)

$$\lim_{\underline{y} \rightarrow \underline{y}_E} \mathcal{H}(\underline{y}) = \mathcal{H}(\underline{y}_E) = 0$$

\Rightarrow esiste un intorno \mathcal{V} di \underline{y}_E tale che

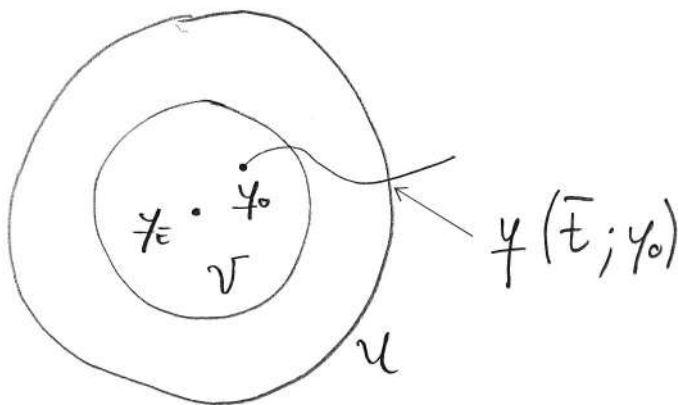
$$\left| \mathcal{H}(\underline{y}) - \mathcal{H}(\underline{y}_E) \right| = \mathcal{H}(\underline{y}) < \frac{E}{2}$$

per ogni $\underline{y} \in \mathcal{V}$

4. dimostriamo che $\forall \underline{y}_0 \in \mathcal{V}$ la traiettoria uscente da \underline{y}_0 è contenuta in \mathcal{U} (\Rightarrow teorema):

Per *assurdo* supponiamo che $\Gamma_{\underline{y}_0}$ esca da \mathcal{U} allora esiste un istante \bar{t} tale che:

$$\underline{y}(\bar{t}; \underline{y}_0) \in \partial\mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{H}(\underline{y}(\bar{t}; \underline{y}_0)) \geq E(\epsilon)$$



D'altra parte, visto che \mathcal{H} non cresce sulla traiettoria $\Gamma_{\underline{y}_0}$ (essendo $\frac{d\mathcal{H}}{dt} \leq 0$) si ha

$$\mathcal{H}(\underline{y}(\bar{t}; \underline{y}_0)) \leq \mathcal{H}(\underline{y}_0) \leq \frac{E}{2}$$

(poichè $\underline{y}_0 \in \mathcal{V}$ vedi punto 3) abbiamo quindi un assurdo.

Esempio 5.3

Rigido in rotazione intorno ad un asse fisso in moto sotto l'azione di un momento $\underline{\nu} = -c \varphi^3 \underline{u}$, \underline{u} versore asse di rotazione, φ angolo di rotazione, c costante positiva. Abbiamo:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2I} + \frac{c}{4}\varphi^4, \quad y_E = (0, 0) .$$

$$Preso: \mathcal{U} = \{(\varphi, p) : |\varphi| < \epsilon, |p| < \epsilon\}$$

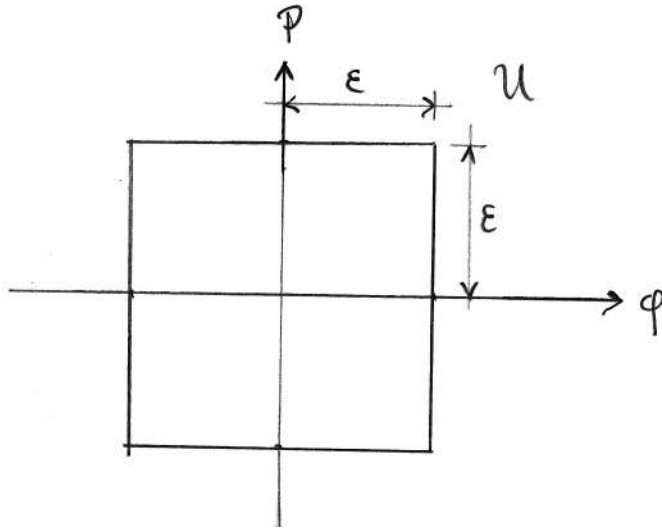


Figura 5.4:

$$\Rightarrow E = \min_{\underline{y} \in \partial \mathcal{U}} \mathcal{H}(\underline{y}) = \min \left(\frac{\epsilon^2}{2I}, \frac{c}{4} \epsilon^4 \right) .$$

Possiamo prendere allora $\mathcal{V} = \{(\varphi, p) : |\varphi| < \delta, |p| < \delta\}$ con $\delta > 0$ tale che:

$$\begin{aligned} \max_{\underline{y} \in \mathcal{V}} \mathcal{H}(\underline{y}) &\leq \frac{\delta^2}{2I} + \frac{c}{4} \delta^4 < \frac{E}{2} \\ \Rightarrow \forall \underline{y}_0 \in \mathcal{V}, \underline{y}(t; \underline{y}_0) &\in \mathcal{U}, \forall t \in [0, T) . \end{aligned}$$

Vi sono anche criteri a priori di instabilità, vedi [FM], ricordiamo solo che, vedi [BO], se l'energia potenziale è una funzione analitica tutte le configurazioni che non sono minimi di V sono instabili.

5.3 Criterio *statico* di stabilità

Si può dare una interpretazione più *fisica* del Criterio di Dirichlet, va però ricordato che vale nelle stesse condizioni (si possono mostrare controesempi

per far vedere che non vale in generale se le forze non sono conservative). Consideriamo uno spostamento virtuale dalla configurazione di equilibrio \underline{q}_E ad una configurazione variata \underline{q}^v , parametrizzato dal tempo virtuale $\tau \in [a, b]$ cioè:

$$\underline{q} = \underline{q}(\tau) , \tau \in [a, b] , \underline{q}(a) = \underline{q}_E , \underline{q}(b) = \underline{q}^v$$

Il lavoro virtuale delle forze per andare da \underline{q}_E a \underline{q}^v è dato da:

$$\begin{aligned} L.V. &= \int_a^b \sum_{i=1}^l Q_i \frac{dq_i}{d\tau} d\tau = \left(\text{essendo } Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \\ &= - \int_a^b \sum_{i=1}^l \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\tau} d\tau = - \int_a^b \frac{dV}{d\tau} (\underline{q}(\tau)) d\tau \\ &= - \left(V(\underline{q}^v) - V(\underline{q}_E) \right) . \end{aligned}$$

Quindi le due affermazioni seguenti si equivalgono:

- \underline{q}_E è minimo proprio di V (Criterio di Dirichlet)
- \Leftrightarrow lavoro virtuale per andare da \underline{q}_E a $\underline{q}_E + \delta \underline{q} = \underline{q}^v$ è negativo (Criterio Statico)

5.4 Stabilità delle rotazioni permanenti di un rigido in una precessione per inerzia

Abbiamo visto che le equazioni di Eulero per la precessione per inerzia, ammettono 3 rotazioni permanenti che sono ovviamente le soluzioni con $\underline{\omega}$ costante (stazionarie):

$$\begin{array}{l} \text{rotazioni attorno all'asse prin-} \\ \text{cipale d'inerzia } i\text{-esimo} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \omega_i = \omega_0 , \omega_j = 0 , j \neq i , \\ i, j = 1, 2, 3 \end{array}$$

Per studiare la stabilità delle 3 rotazioni precedenti cerchiamo informazioni dalle traiettorie di fase nello spazio $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Le equazioni di Eulero sono un sistema dinamico nelle incognite $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_1 \omega_3 \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

Ci sono due quantità scalari che si conservano (integrali primi di moto):

- energia cinetica, non essendoci momento di forze esterne: $K = K_0$
- modulo del momento angolare, essendo

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{L}(O)}{dt} = \underline{0} &\Rightarrow \|\underline{L}(O)\|^2 = \text{costante} = L_O^2 \\ \Rightarrow 2K &= J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = 2K_O \\ \|\underline{L}(O)\|^2 &= J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2 = L_O^2 \end{aligned}$$

Le due equazioni rappresentano geometricamente due superfici nello spazio delle fasi ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$).

Le traiettorie del sistema devono appartenere alla loro intersezione (dovendole soddisfare entrambe). Per vedere meglio come sono fatte, moltiplichiamo la prima equazione per $I_O = L_O^2/2K_O$:

$$\begin{aligned} J_1 I_O \omega_1^2 + J_2 I_O \omega_2^2 + J_3 I_O \omega_3^2 &= 2K_O \cdot \frac{L_O^2}{2K_O} = L_O^2 \\ J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2 &= L_O^2 , \end{aligned}$$

\Rightarrow (sottraendo le due equazioni) le traiettorie sono contenute nell'intersezione

$$\begin{cases} 1) & J_1 (J_1 - I_O) \omega_1^2 + J_2 (J_2 - I_O) \omega_2^2 + J_3 (J_3 - I_O) \omega_3^2 = 0 \\ 2) & J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = 2K_O \end{cases}$$

Notiamo che:

- 2) è l'equazione dell'ellissoide d'inerzia relativo ad O $\{\underline{x} \cdot \mathbf{I} \underline{x} = 2K_O\}$, cioè col parametro $\lambda = 2 \cdot$ energia cinetica iniziale.

Studiamo la superficie di equazione (1). Notiamo prima di tutto che:

se ad esempio: $J_1 < J_2 < J_3$

$$\Rightarrow J_1 < I_O < J_3$$

Infatti:

$$\begin{aligned} I_O = \frac{L_O^2}{2K_O} &= \frac{J_1^2 \omega_{1O}^2 + J_2^2 \omega_{2O}^2 + J_3^2 \omega_{3O}^2}{J_1 \omega_{1O}^2 + J_2 \omega_{2O}^2 + J_3 \omega_{3O}^2} \\ &> \frac{J_1^2 \omega_{1O}^2 + J_2 J_1 \omega_{2O}^2 + J_3 J_1 \omega_{3O}^2}{J_1 \omega_{1O}^2 + J_2 \omega_{2O}^2 + J_3 \omega_{3O}^2} = J_1 \end{aligned}$$

e analoga per dimostrare che $I_O < J_3$.

Inoltre:

ω_0 diretto come asse principale i -esimo

$$\rightarrow I_O = \frac{J_i^2 \omega_O^2}{J_i \omega_O^2} = J_i, \quad i = 1, 2, 3$$

• \Rightarrow Se $I_O = J_1$

$$\begin{aligned} \text{equazione (1)} &\Rightarrow J_2 (J_2 - J_1) \omega_2^2 + J_3 (J_3 - J_1) \omega_3^3 = 0 \\ &\Rightarrow (\text{essendo } J_2 - J_1 > 0, J_3 - J_1 > 0) \Rightarrow \omega_2 = \omega_3 = 0 \end{aligned}$$

cioè rappresenta un cono degenero di asse 1

- Se $I_O = J_3$ analogamente (1) è cono degenero di asse 3
- Se $I_O = J_2 \Rightarrow$

$$J_3 (J_3 - J_2) \omega_3^2 = J_1 (J_2 - J_1) \omega_1^2$$

$$\Rightarrow (\text{essendo } J_3 - J_2 > 0 \text{ e } J_2 - J_1 > 0)$$

$$\sqrt{J_3 (J_3 - J_2)} \omega_3 = \pm \sqrt{J_1 (J_2 - J_1)} \omega_1$$

cioè una coppia di piani passante per l'asse 2.

- Per $J_1 < I_O < J_2$

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow & -J_1(I_O - J_1) \omega_1^2 + J_2(J_2 - I_O) \omega_2^2 + J_3(J_3 - I_O) \omega_3^2 = 0 \\ \Rightarrow & J_1(I_O - J_1) \omega_1^2 = J_2(J_2 - I_O) \omega_2^2 + J_3(J_3 - I_O) \omega_3^2 \end{aligned}$$

cioè un cono di asse 1

(le intersezioni con i piani $\omega_1 = \text{costante}$ sono ellissi)

- Per $J_1 < J_2 < I_O < J_3$

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow & J_3(J_3 - I_O) \omega_3^2 = \\ & = J_1(I_O - J_1) \omega_1^2 + J_2(I_O - J_2) \omega_2^2 \end{aligned}$$

cioè un cono di asse 3

(le intersezioni con piani ad $\omega_3 = \text{costante}$ sono ovviamente ancora ellissi).

Dalla figura dettagliata si ricava l'informazione che le rotazioni permanenti intorno agli assi principali 1 e 3 sono stabili mentre quella intorno all'asse intermedio 2 è instabile (nonché informazioni qualitative sul moto generico)

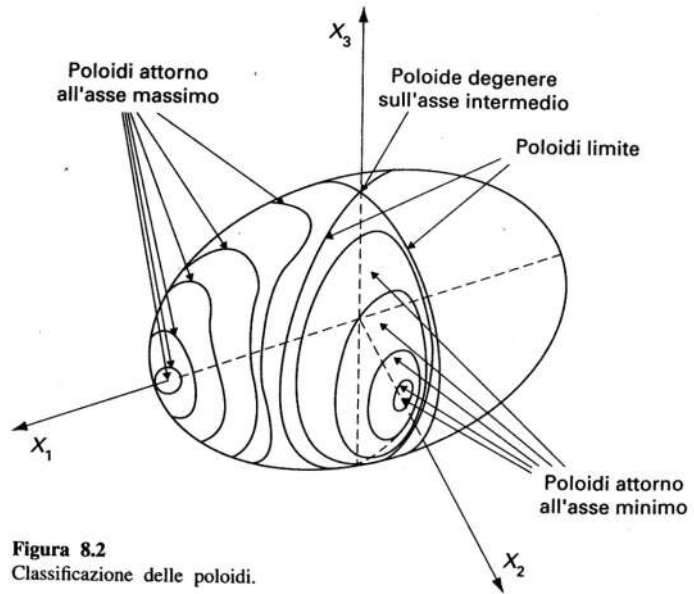


Figura 8.2
Classificazione delle poloidi.

Figura 5.5:

Capitolo 6

Linearizzazione delle Equazioni di moto

6.1 Caso Generale

Consideriamo una qualsiasi equazione differenziale di ordine m (non dipendente esplicitamente da t):

$$B[y] = \mathcal{G}(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, D^m y) = 0$$

e supponiamo di conoscere una sua soluzione stazionaria

$$y(t) = y_E$$

dove y_E è una costante tale che

$$B[y_E] = \mathcal{G}(y_E, 0, \dots, 0) = 0$$

Cambiamo funzione incognita ponendo:

$$y(t) = y_E + \eta z(t)$$

con $\eta \in \Re$ e $z(t)$ una funzione di t

$$\Rightarrow \dot{y} = \eta \dot{z}, \dots, D^m y = \eta D^m z$$

$$\Rightarrow B[y] = B[y_E + \eta z] = \mathcal{G}(y_E + \eta z, \eta \dot{z}, \dots, \eta D^m z)$$

Poniamo:

$$\tilde{\mathcal{G}}(\eta) = \mathcal{G}(y_E + \eta z, \eta \dot{z}, \dots, \eta D^m z)$$

pensiamo cioè che z sia assegnata e guardiamo a $B[y_E + \eta z]$ come ad una funzione solo di η , cioè ad una funzione di una variabile reale. Notiamo che

$$\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}(y_E, 0, \dots, 0) = 0$$

e sviluppiamo in serie $\tilde{\mathcal{G}}$ vicino a $\eta = 0$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{G}}(\eta) &= \tilde{\mathcal{G}}(0) + \eta \mathcal{G}_L + \dots \\ &= \eta \mathcal{G}_L + \dots\end{aligned}$$

Definizione 3

L'equazione differenziale lineare

$$B_L[z] = \mathcal{G}_L(z, \dot{z}, \dots, D^m z) = 0$$

si dice equazione linearizzata vicino a

$$y = y_E$$

Esempio 6.1

Sia data l'equazione differenziale

$$\mathcal{G} = (1 + y^2) \ddot{y} + y \dot{y}^2 - (1 - y^2) \dot{y} + y - 1 = 0$$

e la sua soluzione stazionaria

$$y(t) = 1$$

Poniamo

$$y = 1 + \eta z, \quad \dot{y} = \eta \dot{z}, \quad \ddot{y} = \eta \ddot{z}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{G}}(\eta) &= (1 + (1 + \eta z)^2) \eta \ddot{z} + (1 + \eta z) \eta^2 \dot{z}^2 + \\
&- (1 - (1 + \eta z)^2) \eta \dot{z} + \eta z = \\
&= \eta [\ddot{z} (1 + 1 + 2\eta z + \eta^2 z^2) + \eta \dot{z}^2 (1 + \eta z) + \\
&+ (2\eta z + \eta^2 z^2) \dot{z} + z] \\
&= \eta [2\ddot{z} + z] + \dots
\end{aligned}$$

\Rightarrow l'equazione linearizzata vicino a $y = 1$ è

$$2\ddot{z} + z = 0$$

Il metodo indicato si estende facilmente a sistemi di equazioni differenziali e a linearizzazione intorno a soluzioni non stazionarie.

6.2 Equazioni di Lagrange per Sistemi Olonomi

Per un sistema olonomo a vincoli fissi possiamo scrivere le equazioni di Lagrange come sistema dinamico nelle variabili di fase $\underline{y} = (\underline{q}, \underline{p})$, dove

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot A(\underline{q}) \underline{\dot{q}} \Rightarrow \underline{p} = A(\underline{q}) \underline{\dot{q}} \\
\Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_i &= (A^{-1}(\underline{q}) \underline{p})_i \\ \dot{p}_i &= \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} \right)_{\underline{\dot{q}}=A^{-1}(\underline{p})} + Q_i|_{\underline{\dot{q}}=A^{-1}(\underline{p})} \end{cases} \quad i = 1, \dots, l
\end{aligned}$$

Sia \underline{q}_E una configurazione di equilibrio, poniamo

$$\underline{q} = \underline{q}_E + \eta \underline{x}(t) \Rightarrow \underline{p} = \underline{0} + \eta \underline{v}(t), \quad \underline{\dot{q}} = \underline{0} + \eta \underline{\dot{x}}$$

a) equazioni per $\underline{\dot{q}}$

$$\begin{aligned}
\eta \underline{\dot{x}} - A^{-1}(\underline{q}_E + \eta \underline{x}) \eta \underline{v} &= \eta (\underline{\dot{x}} - A^{-1}(\underline{q}_E) \underline{v}) + \\
&+ \dots \\
\Rightarrow \text{equazioni linearizzate} \quad \underline{\dot{x}} &= A^{-1}(\underline{q}_E) \underline{v}
\end{aligned}$$

b) equazioni per $\underline{\dot{p}}$, vediamo i vari passi

•

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_i} \underline{\dot{q}} = \eta^2 \left(\frac{1}{2} \underline{\dot{x}} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_i} \underline{\dot{x}} \right)$$

questo termine è del secondo ordine quindi *non* compare nell'equazione linearizzata

•

$$Q_i(\underline{q}_E + \eta \underline{x}, \eta \underline{\dot{x}}) = \tilde{Q}_i(\eta) = \tilde{Q}_i(0) + \eta \left. \frac{d\tilde{Q}_i}{d\eta} \right|_{\eta=0} + \dots$$

(essendo \underline{q}_E di equilibrio $\tilde{Q}_i(0) = Q_i(\underline{q}_E, \underline{0}) = 0$)

$$= \eta Q_i^L + \dots$$

$$\left(Q_i^L = \left. \frac{d\tilde{Q}_i}{d\eta} \right|_{\eta=0} \right)$$

•

$$\underline{\dot{p}} = \eta \underline{\dot{v}}$$

\Rightarrow equazioni linearizzate $\dot{v}_i = Q_i^L$

Abbiamo quindi che le equazioni di Lagrange linearizzate vicino a \underline{q}_E sono le equazioni di Lagrange ottenuta a partire da:

$$\tilde{K} = \frac{1}{2} \underline{\dot{x}} \cdot A(\underline{q}_E) \underline{\dot{x}}, \quad \tilde{Q}_i = Q_i^L$$

Si possono quindi scrivere, a seconda delle necessità, come

a)

$$A(\underline{q}_E) \underline{\ddot{x}} = \underline{Q}^L$$

b)

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A^{-1}(\underline{q}_E) \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} = \underline{Q}^L \end{cases}$$

Approfondiamo la forma (a) dell'equazione linearizzata:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i(\eta) &= Q_i(\underline{q}_E + \eta \underline{x}, \eta \dot{\underline{x}}) \\ &= \eta \left[\sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Big|_{(\underline{q}_E, \underline{0})} x_j + \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} \Big|_{(\underline{q}_E, \underline{0})} \dot{x}_j \right] \end{aligned}$$

Possiamo quindi definire \underline{Q}^L nel modo seguente:

$$\Rightarrow \underline{Q}^L = -(C \underline{x} + B \dot{\underline{x}})$$

con B e C matrici costanti $l \times l$ date da:

$$(C)_{ij} = - \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Big|_{(\underline{q}_E, \underline{0})}, \quad (B)_{ij} = - \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} \Big|_{(\underline{q}_E, \underline{0})}$$

$$\Rightarrow A(\underline{q}_E) \ddot{\underline{x}} + B \dot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0}$$

è l'equazione linearizzata.

Nel caso *conservativo*, cioè $Q_i = Q_i(q)$ e

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

si ottiene subito che:

$$B \equiv 0, \quad C = H_V|_{\underline{q}_E} =$$

matrice Hessiana di V calcolata all'equilibrio.

Infatti:

$$C_{ij} = - \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{(\underline{q}_E, \underline{0})}$$

$$\Rightarrow A(\underline{q}_E) \ddot{\underline{x}} + H_V|_{(\underline{q}_E, \underline{0})} \underline{x} = \underline{0}$$

equazione linearizzata nel caso conservativo.

Nota 6.1

l'equazione sopra scritta si può ottenere direttamente dalla Lagrangiana

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{K} - \tilde{V} = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot A(\underline{q}_E) \dot{\underline{x}} - \frac{1}{2} \underline{x} \cdot H_V|_{\underline{q}_E} \underline{x}$$

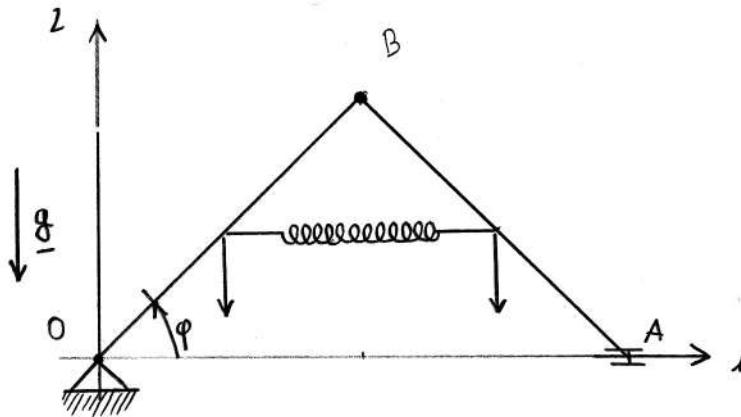
Analogamente dalla Hamiltoniana

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{K} + \tilde{V}$$

si può ottenere direttamente il sistema canonico linearizzato, cioè

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A^{-1}(\underline{q}_E) \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} = -H_V|_{\underline{q}_E} \underline{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial v_i} \\ \dot{v}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x_i} \end{cases}$$

Esempio 6.2



$$\overline{AB} = \overline{OB} = l$$

aste omogenee, uguali di massa m

Abbiamo (vedi anche Cap. 1)

$$K = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{2}{3} + 2 \sin^2 \varphi \right)$$

$$V = mgl \sin \varphi + \frac{c}{2} l^2 \cos^2 \varphi$$

Determiniamo le configurazioni di equilibrio, individuando i punti stazionari di V

$$V' = mgl \cos\varphi - cl^2 \sin\varphi \cos\varphi = cl^2 \cos\varphi \left(\frac{mg}{cl} - \sin\varphi \right)$$

$$\Rightarrow \text{se } \gamma = \frac{mg}{cl} > 1 : \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{se } \gamma = \frac{mg}{cl} < 1 : \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}, \varphi = \arcsin\gamma, \varphi = \pi - \arcsin\gamma.$$

Vediamo la stabilità a priori, determinando i minimi di V

$$V'' = cl^2 (-\gamma \sin\varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$\Rightarrow \text{se } \gamma = \frac{mg}{cl} > 1$	$V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = cl^2(1 - \gamma) < 0$	<i>instabile</i>
	$V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = cl^2(1 + \gamma) > 0$	<i>stabile</i>
$\Rightarrow \text{se } \gamma = \frac{mg}{cl} < 1$	$V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = cl^2(1 - \gamma) > 0$	<i>stabile</i>
	$V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = cl^2(1 + \gamma) > 0$	<i>stabile</i>
	$V''(\arcsin\gamma) = cl^2(-\gamma^2 + \gamma^2 - (1 - \gamma^2)) = -cl^2(1 - \gamma^2) < 0$	<i>instabile</i>
	$V''(\pi - \arcsin\gamma) = V''(\arcsin\gamma) < 0$	<i>instabile</i>

Vogliamo ad esempio linearizzare vicino a $\varphi = \pi/2$, scriviamo $\tilde{\mathcal{L}}$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\pi}{2} + \eta x \quad , \quad \dot{\varphi} = \eta \dot{x} \\ \tilde{K} &= \frac{1}{2} ml^2 \dot{x}^2 \left(\frac{2}{3} + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{x}^2 \frac{8}{3} \\ \tilde{V} &= \frac{1}{2} x^2 V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} cl^2 (1 - \gamma) x^2 \end{aligned}$$

l'equazione di Lagrange con $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{K} - \tilde{V}$ è

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{8}{3} ml^2 \dot{x} \right) - (-cl^2 (1 - \gamma) x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}ml^2\ddot{x} + cl^2(1-\gamma)x = 0$$

Notare che:

Se $\gamma < 1$ le soluzioni sono oscillazioni armoniche di frequenza

$$\sqrt{\frac{3}{8} \frac{c(1-\gamma)}{m}}$$

Se $\gamma > 1$ le soluzioni sono $a_1 e^{-\nu t} + a_2 e^{\nu t}$ con

$$\nu = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{c(1-\gamma)}{m}}$$

Per controllo seguire la via *generale* scrivendo prima le equazioni di Lagrange esatte e poi linearizzando. Scrivere anche le equazioni linearizzate vicino alle altre configurazioni di equilibrio.

Esempio 6.3

Consideriamo lo stesso problema dell'Esempio 6.2 supponendo che sul pattino in A agisca una forza $\underline{F}_A = -\nu \underline{v}_A$ (se $\nu > 0$ è una forza di attrito cioè dissipa energia). Calcoliamo la forza generalizzata dovuta a \underline{F}_A :

$$\begin{aligned} L.V. = \underline{F}_A \cdot \delta \underline{x}_A &= -\nu \dot{x}_A \delta x_A \\ x_A &= 2l \cos \varphi \\ \Rightarrow \delta x_A &= -2l \sin \varphi \delta \varphi \\ \dot{x}_A &= -2l \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \Rightarrow L.V. &= -4\nu l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi} \delta \varphi \Rightarrow Q^A = -4\nu l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi} \end{aligned}$$

Volendo linearizzare l'equazioni di moto vicino a $\varphi = \pi/2$, possiamo usare le espressioni di \tilde{K} e \tilde{V} calcolate precedentemente e limitarci a calcolare in più la parte lineare di Q^A :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \eta \quad x, \quad \dot{\varphi} = \eta \dot{x}$$

$$\begin{aligned}
Q^A(\varphi, \dot{\varphi}) &= Q^A\left(\frac{\pi}{2} + \eta x, \eta \dot{x}\right) = \\
&= -4\nu l^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \eta x\right) \eta \dot{x} = \\
&= \eta \left(-4\nu l^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \dot{x}\right) + \dots \\
\Rightarrow Q^{AL} &= -4\nu l^2 \dot{x}
\end{aligned}$$

L'equazione linearizzata è quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{8}{3} m l^2 \dot{x}\right) &= -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + (-4\nu l^2 \dot{x}) \\
&= -c l^2 (1 - \gamma) x - 4\nu l^2 \dot{x}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} m l^2 \ddot{x} + 4\nu l^2 \dot{x} + c l^2 (1 - \gamma) x = 0$$

Un altro modo di procedere è, al solito, scrivere le equazioni di Lagrange esatte e poi linearizzarle vicino a $\varphi = \pi/2$, come nel paragrafo 1.

Esercizio 6.1

Nel problema dell'esempio 4.1 del Cap. 4, scrivere le equazioni linearizzate vicino alla posizione di equilibrio $x = 0, \varphi = 0$.

Esercizio 6.2 (*Bipendolo*)

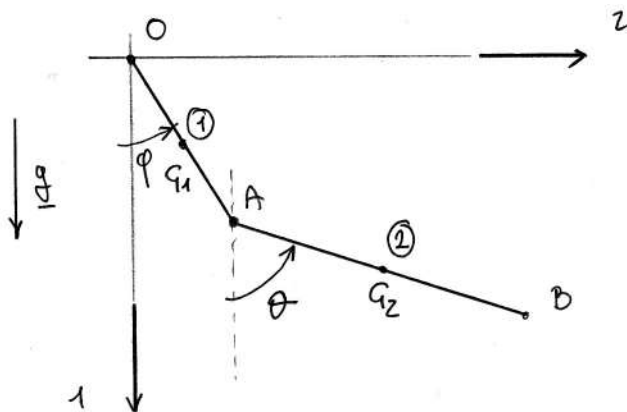


Figura 6.1:

Sono date le due aste OA ed AB vincolate come in figura in un piano *verticale*, aste omogenee

$$\overline{OA} = l, \overline{AB} = 2l$$

1. Scrivere le equazioni di Lagrange.
2. Scrivere le equazioni di Lagrange linearizzate vicino alle due seguenti posizioni di equilibrio

$$\underline{q}_1 = (\varphi = 0, \vartheta = 0) , \underline{q}_2 = (\varphi = 0, \vartheta = \pi)$$

Esempio 6.4

Consideriamo la precessione per inerzia di un rigido e linearizziamo le equazioni di moto (di Eulero) vicino alle soluzioni *rotazioni permanenti*:

rotazioni intorno all'asse principale d'inerzia i -esimo

$$\Leftrightarrow \omega_i = \omega_0, \omega_j = 0 \text{ per } i \neq j, i, j = 1, 2, 3$$

Ricordiamo che le equazioni di Eulero sono:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_1 \omega_3 \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

Consideriamo ad esempio la rotazione permanente intorno all'asse 1, poniamo

$$\omega_1 = \omega_0 + \eta z_1, \quad \omega_2 = \eta z_2, \quad \omega_3 = \eta z_3$$

e sostituiamo nelle equazioni di Eulero:

$$\begin{cases} J_1 \eta \dot{z}_1 = (J_2 - J_3) \eta^2 z_2 z_3 \\ J_2 \eta \dot{z}_2 = (J_3 - J_1) (\omega_0 + \eta z_1) \eta z_3 \\ J_3 \eta \dot{z}_3 = (J_1 - J_2) (\omega_0 + \eta z_1) \eta z_2 \end{cases}$$

\Rightarrow le equazioni linearizzate sono:

$$\begin{cases} J_1 \dot{z}_1 = 0 \\ J_2 \dot{z}_2 = (J_3 - J_1) \omega_0 z_3 \\ J_3 \dot{z}_3 = (J_1 - J_2) \omega_0 z_2 \end{cases}$$

Per capire meglio le due ultime equazioni si può scegliere il metodo già usato per spiegare gli effetti giroscopici elementari, cioè passare ad un'equazione del secondo ordine:

$$J_2 \ddot{z}_2 = (J_3 - J_1) \omega_0 \dot{z}_3 = \frac{(J_3 - J_1)(J_1 - J_2)}{J_3} \omega_0^2 z_2$$

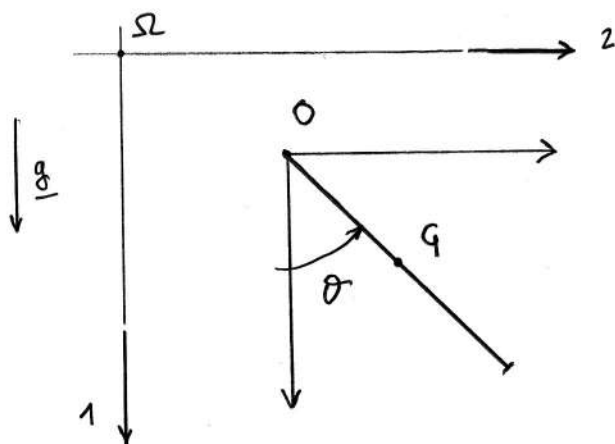
Notiamo che se $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ e

- se $J_1 = \max(J_1, J_2, J_3)$ o $J_1 = \min(J_1, J_2, J_3)$
 $\Rightarrow (J_3 - J_1)(J_1 - J_2) < 0 \Rightarrow$ equazione di moto armonico per z_2 cioè $z_2(t)$ è sinusoidale e quindi anche z_3 lo è e la rotazione è *stabile linearmente*
- altrimenti $(J_3 - J_1)(J_1 - J_2) > 0 \Rightarrow z_2(t)$ è una combinazione di esponenziali reali e la rotazione è *instabile linearmente*.

Otteniamo cioè per l'equazione linearizzata risultati in accordo con le considerazioni di stabilità a priori, vedi Cap. 5 Par 4 (cioè stabilità per gli assi che danno massimo o minimo momento d'inerzia e instabilità per l'asse intermedio). Nel caso stabile otteniamo anche un valore approssimato della frequenza di oscillazione per ω_2 e ω_3 (precisamente $\omega_0^2 (1 - J_1/J_3) (1 - J_1/J_2)$)

Esercizio 6.3

Consideriamo un pendolo il cui punto di sospensione O si muova con legge assegnata



$\underline{x}_O(t)$ assegnato in $\Sigma(\Omega, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$

1. Scrivere l'equazione di moto.
2. Determinare in quali condizioni esistono le soluzioni $\vartheta(t) \equiv 0$, $\vartheta(t) \equiv \pi$.
3. Quando tali soluzioni esistono, linearizzare l'equazione di moto vicino ad esse.

6.3 Alcuni risultati sulla Stabilità Lineare

L'obiettivo che si persegue quando si *linearizza* un'equazione è ovviamente quello di ottenere informazioni approssimate sulle soluzioni del problema di

partenza non lineare. A proposito di stabilità di soluzioni di equilibrio, si usa proprio dire che una soluzione è *stabile linearmente* se la soluzione del problema linearizzato è stabile. Siamo però in generale sicuri che la stabilità lineare implichi la stabilità del problema originario? In generale la risposta è negativa.

Diamo subito un esempio:

Esempio 6.5

$$\dot{y} = y^2$$

La soluzione stazionaria $y = 0$ è instabile, infatti per ogni dato iniziale $y_0 > 0$ si ha che la soluzione

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t} \xrightarrow{t \rightarrow \frac{1}{y_0}} +\infty .$$

Il problema linearizzato vicino a $y = 0$ è

$$\dot{x} = 0$$

che ammette la soluzione $x(t) \equiv 0$ stabile (infatti per ogni dato iniziale $x_0 \neq 0$ si ha $x(t) \equiv x_0$, vicina quanto si vuole a $x = 0$ purchè x_0 sia sufficientemente piccolo).

In vari casi particolari però si può dire qualcosa di positivo. Per precisare il discorso, consideriamo un sistema dinamico autonomo generico

$$\begin{cases} \dot{\underline{y}} &= \underline{F}(\underline{y}) \\ \underline{y}(0) &= \underline{y}_0 \end{cases} , \quad \underline{F}(\underline{y}_E) = \underline{0} , \quad \underline{y} \in \mathfrak{R}^n$$

Facciamo ora un cambio di funzione incognita

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_E + \eta \underline{\xi}(t)$$

e scriviamo il problema dato per la nuova incognita $\underline{\xi}(t)$ nella forma seguente:

$$\begin{aligned}
\underline{\dot{y}} = \underline{F}(\underline{y}) &\Rightarrow \eta \underline{\dot{\xi}} = \underline{F}(\underline{y}_E + \eta \underline{\xi}) \\
& \text{(sviluppando } \underline{F} \text{ in serie di potenze di } \eta \text{)} \\
& \underline{F}(\underline{y}_E) + \eta \underline{F}_L(\underline{\xi}) + \eta^2 \underline{r}(\underline{\xi}, \eta) \\
& \text{(dove } \underline{F}_L(\underline{\xi}) = \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \underline{F}(\underline{y}_E + \eta \underline{\xi}) \right|_{\eta=0} = J_F(\underline{y}_E) \underline{\xi}) \\
\Rightarrow \text{(essendo } \underline{F}(\underline{y}_E) = 0 \text{)} & \\
\underline{\dot{\xi}} = \underline{F}_L(\underline{\xi}) + \eta \underline{r}(\underline{\xi}, \eta) &
\end{aligned}$$

Passiamo al dato iniziale \underline{y}_0 , volendo studiare il problema vicino a \underline{y}_E è naturale considerare dati iniziali vicino a \underline{y}_E cioè del tipo seguente (rescaling):

$$\underline{y}_0 = \underline{y}_E + \eta \underline{a}$$

\underline{a} vettore dato di \mathfrak{R}^n , $\eta \in \mathfrak{R}$ (parametro piccolo)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{y}_0 &= \underline{y}_E + \eta \underline{\xi}(0) = \underline{y}_E + \eta \underline{a} \\
\Rightarrow \underline{\xi}(0) &= \underline{a}
\end{aligned}$$

Otteniamo così il problema (rescaled)

$$S.D. \begin{cases} \underline{\dot{\xi}} &= \underline{F}_L(\underline{\xi}) + \eta \underline{r}(\underline{\xi}, \eta) \\ \underline{\xi}(0) &= \underline{a} \end{cases}$$

Consideriamo ora il problema linearizzato vicino a \underline{y}_E , con lo stesso dato iniziale \underline{a} :

$$S.D.L. \begin{cases} \underline{\dot{z}} &= \underline{F}_L(\underline{z}) \\ \underline{z}(0) &= \underline{a} \end{cases}$$

Per $\underline{a} = \underline{0}$ si ottiene l'originaria soluzione di equilibrio cioè $\underline{y} = \underline{y}_E \Rightarrow \underline{\xi} = \underline{0}$ e $\underline{z} = \underline{0}$. Inizialmente le soluzioni dei due problemi con dato iniziale \underline{a}

$\underline{\xi}(t, \underline{a})$ esatta, soluzione di S.D.
 $\underline{z}(t, \underline{a})$ approssimata, soluzione di S.D.L.

sono vicine perchè partono dallo stesso dato iniziale \underline{a} . È chiaro che se si può controllare per ogni tempo il resto $\underline{r}(\xi, \eta)$, prendendo η sufficientemente piccolo si può continuare a trascurare \underline{r} rispetto ad \underline{F}_L , e quindi usare S.D.L. al posto di S.D., cioè $\underline{z}(t, \underline{a})$ è una buona approssimazione della soluzione esatta $\underline{\xi}(t, \underline{a})$. In generale però, come visto nell'Esempio 6.5, non è facile controllare il resto \underline{r} , perchè questo è in generale non lineare in $\underline{\xi}$ ed η e può quindi crescere molto e diventare il termine dominante del S.D. di partenza, (vedi anche il *metodo delle perturbazioni*).

Restringendoci al problema della stabilità delle soluzioni di equilibrio (o stazionarie), riportiamo i seguenti risultati (per approfondimenti vedi [BO] pagg. 126, 127, [BR] pag. 362):

Teorema 6.1 Se \underline{F} è differenziabile con continuità e la soluzione $\underline{z} = \underline{0}$ del S.D.L. è instabile \Rightarrow la soluzione $\underline{\xi} = \underline{0}$ (cioè $\underline{y} = \underline{y}_E$) del S.D. è instabile.

Il teorema vale per tutti gli esempi fatti finora.

Come mostra l'equazione differenziale $\dot{y} = y^2$ vista nell'Esempio 6.5, dare criteri che assicurino la stabilità una volta nota la stabilità lineare non è altrettanto semplice che dare criteri di instabilità. Vedremo nel successivo capitolo che si può dire qualcosa per i sistemi meccanici conservativi, basandosi sul criterio di Dirichlet.

Nota di Approfondimento

Si possono dare risultati *semplici* analoghi al Teorema 6.1 per la stabilità asintotica.

Definizione

(di Stabilità Asintotica)

Dato il Sistema Dinamico $\dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y})$, $\underline{F}(\underline{y}_E) = \underline{0}$ si dice che \underline{y}_E è A.S. (asintoticamente stabile nel futuro) se esiste un intorno \mathcal{U} di \underline{y}_E tale che per ogni dato iniziale $\underline{y}_0 \in \mathcal{U}$, $\underline{y}(t, \underline{y}_0) \rightarrow \underline{y}_E$ per $t \rightarrow +\infty$.

Esempio tipico è la soluzione di $\dot{y} \equiv 0$ dell'equazione $\dot{y} = -y$; infatti le soluzioni sono $y(t) = y_0 e^{-t}$ che per ogni y_0 tendono a zero per $t \rightarrow +\infty$,

in questo caso l'intorno \mathcal{U} (detto anche regione di attrazione della soluzione $y = 0$) è tutto \mathfrak{R} .

Vale il seguente risultato (vedi [BO] pagg. 126, 127)

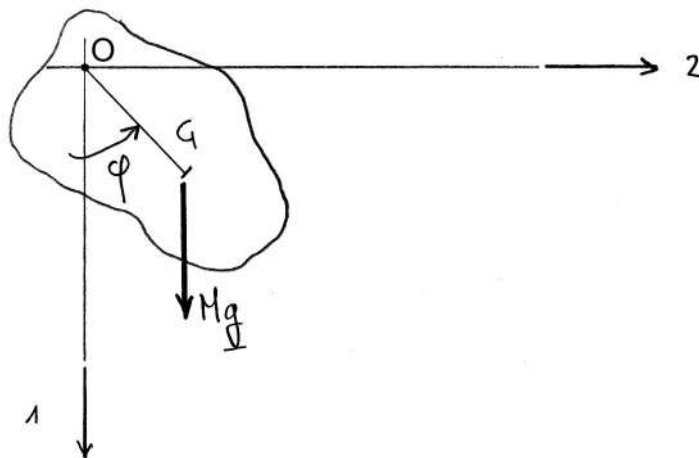
Teorema 6.2 (*Criterio di stabilità asintotica*) Se \underline{F} è \mathcal{C}^1 e

$$\begin{aligned} \underline{z} = \underline{0} & \text{ soluzione del S.D.L. è A.S.} \\ \Rightarrow \underline{\xi} = \underline{0} & \text{ soluzione del S.D. è A.S.} \end{aligned}$$

Questo risultato ha applicazione nei sistemi meccanici con forze dissipative, tipo attrito.

Esempio 6.6

Consideriamo un pendolo con attrito



$$\overline{OG} = d, \quad I_O = I_{33,O}$$

momento di attrito $-\mu \dot{\varphi} \underline{e}_3$, $\mu > 0$

L'equazione di moto esatta è:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -c \sin\varphi - 2\nu \dot{\varphi} \\ c &= Mg d / I_O \\ 2\nu &= \mu / I_O \end{aligned}$$

Consideriamo la posizione di equilibrio $\varphi = 0$, riscaliamo φ ponendo $\varphi = \eta \xi$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \eta \ddot{\xi} &= -c \sin \eta \xi + 2\nu \eta \dot{\xi} \\ \Rightarrow \ddot{\xi} &= -c \xi - 2\nu \dot{\xi} + \eta r(\xi, \eta) \text{ S.D.} \end{aligned}$$

con

$$r(\xi, \eta) = c \frac{\eta \xi - \sin(\eta \xi)}{\eta^2}$$

(volendo vederlo come sistema del prim'ordine poniamo $y_1 = \xi$, $y_2 = \dot{\xi}$)
 \Rightarrow

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -c y_1 - 2\nu y_2 + \eta r(y_1, \eta) \end{cases} \Rightarrow \underline{\dot{y}} = \underline{F}(\underline{y})$$

chiaramente \underline{F} è C^∞ quindi vale il Teorema 6.2).

L'equazione linearizzata vicino a $\varphi = 0$ è (al solito ponendo $\varphi = \eta z$)

$$\ddot{z} = -c z - 2\nu \dot{z}$$

e si vede che per $c > 0$ tutte le soluzioni decadono a zero per $t \rightarrow +\infty$ (controllare !) quindi $z = 0$ è A.S. . Applicando il teorema 6.2 segue che anche la soluzione $\varphi = 0$ del problema esatto è A.S. .

6.4 Risoluzione degli Esercizi

6.4.1 Risoluzione Esercizio 6.1

Notiamo che le equazioni del Modello 3 sono già lineari, quindi non c'è nulla da fare. Per gli altri due modelli la prima equazione, quella per x , è già lineare, la seconda dipende solo da φ , quindi la linearizzazione è semplice. Volendo seguire, per fare esercizio, il metodo generale, poniamo ad esempio

$$\begin{aligned} x &= \eta z_1 \text{ e } \varphi = \eta z_2 \\ \Rightarrow \tilde{K} &= \frac{1}{2} m \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{z}_2^2 \end{aligned}$$

per entrambi i Modelli 1 e 2. Passando all'energia potenziale avremo:

Modello 1

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} (2c z_1^2 + 2clL z_2^2)$$

⇒ le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} m \ddot{z}_1 &= -2c z_1 \\ J_G \ddot{z}_2 &= -2clL z_2 \end{cases}$$

Modello 2

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \frac{1}{2} \left[2c z_1^2 + c (4lL \cos\varphi + 2l^2 \sin^2\varphi - 2l^2 \cos^2\varphi) \Big|_{\varphi=0} z_2^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (2c z_1^2 + 2cl (2L - l) z_2^2) \end{aligned}$$

⇒ le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} m \ddot{z}_1 &= -2c z_1 \\ J_G \ddot{z}_2 &= -2cl (2L - l) z_2 \end{cases}$$

6.4.2 Risoluzione Esercizio 6.2

1.

$$K = K_{OA} + K_{AB}, \text{ detto } m = \rho l$$

$$K_{OA} = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{3} \dot{\varphi}^2$$

$$K_{AB} = \frac{1}{2} 2m \|v_{G_2}\|^2 + \frac{1}{2} 2m \frac{(2l)^2}{12} \dot{\vartheta}^2$$

$$\underline{x}_{G_2} = (l \cos\varphi + l \cos\vartheta) \underline{e}_1 + (l \sin\varphi + l \sin\vartheta) \underline{e}_2$$

$$\Rightarrow \underline{v}_{G_2} = (-l \sin\varphi \dot{\varphi} - l \sin\vartheta \dot{\vartheta}) \underline{e}_1 +$$

$$+ (l \cos\varphi \dot{\varphi} + l \cos\vartheta \dot{\vartheta}) \underline{e}_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|v_{G_2}\|^2 &= l^2 \left[\sin^2\varphi \dot{\varphi}^2 + \sin^2\vartheta \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin\varphi \sin\vartheta + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2\varphi \dot{\varphi}^2 + \cos^2\vartheta \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos\varphi \cos\vartheta \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= l^2 \left[\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 4\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\varphi - \vartheta) \right] \\
\Rightarrow K &= \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{7}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{8}{3}\dot{\vartheta}^2 + 4\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\varphi - \vartheta) \right) \\
V &= -mg\frac{l}{2}\cos\varphi - 2m(l\cos\varphi + l\cos\vartheta)g \\
&= -mgl \left(\frac{5}{2}\cos\varphi + 2\cos\vartheta \right) \\
\Rightarrow \mathcal{L} &= K - V \text{ e le equazioni di Lagrange sono :} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} \left[ml^2 \left(\frac{7}{3}\dot{\varphi} + 2\dot{\vartheta}\cos(\varphi - \vartheta) \right) \right] + \\
&- \left(-ml^2 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sin(\varphi - \vartheta) - \frac{5}{2}mgl\sin\varphi \right) \\
&= ml^2 \left[\frac{7}{3}\ddot{\varphi} + 2\ddot{\vartheta}\cos(\varphi - \vartheta) - 2\dot{\vartheta}\sin(\varphi - \vartheta)(\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}) \right] + \\
&+ 2ml^2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sin(\varphi - \vartheta) + \frac{5}{2}mgl\sin\varphi \\
&= ml^2 \left(\frac{7}{3}\ddot{\varphi} + 2\ddot{\vartheta}\cos(\varphi - \vartheta) \right) + 2ml^2\dot{\vartheta}^2\sin(\varphi - \vartheta) + \\
&+ \frac{5}{2}mgl\sin\varphi = 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} &= \frac{d}{dt} \left[ml^2 \left(\frac{8}{3}\dot{\vartheta} + 2\dot{\varphi}\cos(\varphi - \vartheta) \right) \right] + \\
&- \left(2ml^2\sin(\varphi - \vartheta)\dot{\varphi}\dot{\vartheta} - 2mgl\sin\vartheta \right) \\
&= \left(ml^2 \left(2\ddot{\varphi}\cos(\varphi - \vartheta) + \frac{8}{3}\ddot{\vartheta} \right) + \right. \\
&- 2ml^2\dot{\varphi}\sin(\varphi - \vartheta)(\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}) - 2ml^2\sin(\varphi - \vartheta)\dot{\varphi}\dot{\vartheta} + \\
&+ 2mgl\sin\vartheta = \\
&= ml^2 \left(2\ddot{\varphi}\cos(\varphi - \vartheta) + \frac{8}{3}\ddot{\vartheta} \right) + \\
&- 2ml^2\dot{\varphi}^2\sin(\varphi - \vartheta) + 2mgl\sin\vartheta = 0
\end{aligned}$$

2. Linearizzazione:

- vicino a $\varphi = 0$, $\vartheta = 0$

$$\varphi = \eta z_1 , \vartheta = \eta z_2$$

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{7}{3}\dot{z}_1^2 + \frac{8}{3}\dot{z}_2^2 + 4\dot{z}_1\dot{z}_2 \right)$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale notiamo che l'Hessiano di V è

$$\mathcal{H}_V = \begin{pmatrix} mgl\frac{5}{2}\cos\varphi & 0 \\ 0 & 2mgl\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}mgl \left(\frac{5}{2}z_1^2 + 2z_2^2 \right)$$

\Rightarrow le equazioni linearizzate, cioè le equazioni di Lagrange con $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{K} - \tilde{V}$ sono

$$\begin{cases} ml^2 \left(\frac{7}{3}\ddot{z}_1 + 2\ddot{z}_2 \right) + mgl\frac{5}{2}z_1 = 0 \\ ml^2 \left(2\ddot{z}_1 + \frac{8}{3}\ddot{z}_2 \right) + 2mglz_2 = 0 \end{cases}$$

- vicino a $\varphi = 0$, $\vartheta = \pi$ si ha:

$$\varphi = \eta z_1 , \vartheta = \pi + \eta z_2$$

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{7}{3}\dot{z}_1^2 + \frac{8}{3}\dot{z}_2^2 - 4\dot{z}_1\dot{z}_2 \right)$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}mgl \left(\frac{5}{2}z_1^2 - 2z_2^2 \right)$$

\Rightarrow equazioni linearizzate

$$\begin{cases} ml^2 \left(\frac{7}{3}\ddot{z}_1 - 2\ddot{z}_2 \right) + mgl\frac{5}{2}z_1 = 0 \\ ml^2 \left(-2\ddot{z}_1 + \frac{8}{3}\ddot{z}_2 \right) - 2mglz_2 = 0 \end{cases}$$

6.4.3 Risoluzione Esercizio 6.3

1. Per scrivere l'equazione di moto seguiamo due strade, adottando prima il punto di vista dell'osservatore $\Sigma(\Omega; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ e poi quello dell'osservatore $\hat{\Sigma}(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

- Osservatore $\Sigma(\Omega; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$

Poichè il rigido ruota e trasla si ha

$$K = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_G\dot{\vartheta}^2$$

$$\begin{aligned} \text{in } \Sigma & : \quad \underline{x}_G = \underline{x}_O(t) + (d \cos\vartheta \underline{e}_1 + d \sin\vartheta \underline{e}_2) \\ \text{con } d & = \overline{OG} \\ \Rightarrow \underline{v}_G & = \left(\dot{x}_{O1} - d \sin\vartheta \dot{\vartheta} \right) \underline{e}_1 + \left(\dot{x}_{O2} + d \cos\vartheta \dot{\vartheta} \right) \underline{e}_2 + \frac{1}{2}m \|\dot{\underline{x}}_O\|^2 \end{aligned}$$

Notare che $md^2 + I_G = I_O$ e che K è un polinomio di secondo grado in $\dot{\vartheta}$ con tutti e 3 i termini diversi da zero (vedi Cap. Struttura delle equazioni di Lagrange).

$$V = -mg(x_{O1}(t) + d \cos\vartheta)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = K - V$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} & = \frac{d}{dt} \left(I_O \dot{\vartheta} + md(\dot{x}_{O2} \cos\vartheta - \dot{x}_{O1} \sin\vartheta) \right) + \\ & - md\dot{\vartheta}(-\dot{x}_{O1} \cos\vartheta - \dot{x}_{O2} \sin\vartheta) + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \\ & = I_O \ddot{\vartheta} + md(\ddot{x}_{O2} \cos\vartheta - \ddot{x}_{O1} \sin\vartheta) + mgd \sin\vartheta = 0 \end{aligned}$$

- Osservatore $\hat{\Sigma}(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$

Per questo osservatore O è fisso e oltre al peso bisogna considerare le forze d'inerzia che per ogni punto B del rigido sono $-\rho(B) \ddot{\underline{x}}_O$. Essendo $\ddot{\underline{x}}_O$ indipendente dal punto B , e costante per ogni istante t fissato, possiamo ripetere le considerazioni fatte per la forza peso (notare che le forze d'inerzia sono un *carico distribuito* su tutti

i punti del rigido e sono proporzionali alla densità di massa del rigido stesso) Avremo quindi che il L.V. delle forze d'inerzia è:

$$\begin{aligned}
 L.V. &= -m \ddot{x}_O \cdot \delta \underline{x}_G \\
 &= -m \ddot{x}_O \cdot (-d \sin\vartheta \underline{e}_1 + d \cos\vartheta \underline{e}_2) \delta\vartheta \\
 &= (md \ddot{x}_{O1} \sin\vartheta - md \ddot{x}_{O2} \cos\vartheta) \delta\vartheta \\
 &= Q_{inerzia} \delta\vartheta \\
 V_{peso} &= -mgd \cos\vartheta \\
 K &= \frac{1}{2} I_O \dot{\vartheta}^2
 \end{aligned}$$

⇒ equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial V_{peso}}{\partial \vartheta} + Q_{inerzia}$$

$$\Rightarrow I_O \ddot{\vartheta} = -mgd \sin\vartheta + md(\ddot{x}_{O1} \sin\vartheta - \ddot{x}_{O2} \cos\vartheta)$$

ovviamente coincidente con l'equazione scritta da $\Sigma(\Omega; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

2. Le soluzioni stazionarie $\vartheta \equiv 0$, $\vartheta \equiv \pi$ (cioè equilibrio rispetto a $\hat{\Sigma}(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2)$) esistono se e solo se $\ddot{x}_{O2} \equiv 0$ (cioè moto uniforme in direzione orizzontale)
3. Se $\ddot{x}_{O2} \equiv 0$, riscriviamo l'equazione di moto nel modo seguente:

$$I_O \ddot{\vartheta} = -md \sin\vartheta (g - \ddot{x}_{O1})$$

- linearizziamo vicino a $\vartheta = 0$:

$$\vartheta = \eta x$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I_O \ddot{x} &= -md x (g - \ddot{x}_{O1}) \\
 \Rightarrow \ddot{x} + c(t) x &= 0 \\
 c(t) &= \frac{md}{I_O} (g - \ddot{x}_{O1}(t))
 \end{aligned}$$

- linearizziamo vicino a $\vartheta = \pi$:

$$\vartheta = \pi + \eta z$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_O \ddot{z} &= m dz (g - \ddot{x}_{O1}) \\ \Rightarrow \ddot{z} - c(t) z &= 0 . \end{aligned}$$

Notiamo che:

- se $\ddot{x}_{O1} = \text{costante} = a_0$ si ha che:

se $a_0 < g$ $x = 0$ rimane stabile
 se $a_0 > g$ $x = 0$ diviene instabile

e viceversa per $z = 0$ (cioè $\vartheta = \pi$)

- se $\ddot{x}_{O1} \neq \text{costante}$ l'equazione trovata è interessante, viene chiamata di Hill (vedi [A] pag 114) o Mathieu (vedi [BHA] pag 217 riguardo al moto di rollio di una nave). Se \ddot{x}_{O1} è un'oscillazione, l'equazione è una approssimazione lineare del moto della luna (moto in un campo gravitazionale variabile in modo periodico) e anche di una altalena. Pensando all'altalena si intuisce che si possono avere moti oscillatori la cui ampiezza cresce nel tempo (un effetto noto in gergo come *risonanza parametrica*). Tale effetto è ricercato in una anltalena ma può essere disastroso per il moto di rollio di una nave. Per approfondimenti di tipo ingegneristico vedi [BHA], matematico [A].

Capitolo 7

Sistemi Meccanici Lineari

7.1 Generalità

Ricordiamo brevemente che il metodo generale per risolvere un sistema dinamico lineare omogeneo a coefficienti costanti

$$\dot{\underline{y}} = L \underline{x}, \quad \underline{y} \in \mathfrak{R}^n, \quad L \text{ matrice } n \times n$$

è quello di trovare n soluzioni linearmente indipendenti la cui combinazione dà la soluzione generale e permette quindi di risolvere qualsiasi problema ai dati iniziali. Per trovare le n soluzioni di cui sopra, in analogia col caso $n = 1$, si cercano soluzioni della forma

$$\underline{y} = \underline{u} e^{\lambda t}, \quad \underline{u} \in \mathfrak{R}^n \text{ costante}, \quad \lambda \in \mathfrak{R} \text{ costante}$$

Sostituendo nel sistema dinamico si ha che:

$$L \underline{u} e^{\lambda t} = \lambda \underline{u} e^{\lambda t}, \quad \forall t$$

$$\Rightarrow (\text{essendo } e^{\lambda t} \neq 0) \quad L \underline{u} = \lambda \underline{u}$$

cioè:

$$\lambda = \text{autovalori di } L$$

$$\underline{u} = \text{autovettori di } L$$

(Rimandiamo a [BR] i volonterosi)

Le equazioni di moto di un sistema meccanico lineare (o linearizzato) hanno però una forma *speciale* che analizzeremo in dettaglio, in particolare per i sistemi conservativi, dando per gli altri solo dei cenni. Notiamo che, in opportune condizioni, i risultati che daremo valgono per problemi fisici diversi, tipo circuiti elettrici.

Il caso di sistemi meccanici lineari ad 1 grado di libertà, cioè una equazione lineare del secondo ordine, è chiaramente esposto in molti testi, vedi [BO] Cap. 1, [FDRM].

7.2 Sistemi meccanici conservativi ad l gradi di libertà

Ricordiamo che le equazioni di moto sono le equazioni di Lagrange con $\mathcal{L} = K - V$ e K e V quadratiche, cioè:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot A \dot{\underline{x}} \quad \underline{x} \in \mathfrak{R}^l \quad A \text{ matrice } l \times l \text{ costante simmetrica e def } > 0 \\
 V &= \frac{1}{2} \underline{x} \cdot C \underline{x} \quad C \text{ matrice } l \times l \text{ costante e simmetrica} \\
 &\Rightarrow \\
 A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} &= \underline{0}
 \end{aligned}$$

Notiamo per inciso che ogni sistema differenziale della stessa forma, con A e C *simmetriche* e A definita positiva, qualunque sia la sua provenienza, si tratta nello stesso modo (vedi di nuovo l'esempio classico di circuiti elettrici (I.C. induttanza - capacità) accoppiati tramite le induttanze e senza resistenze, in quel caso \underline{x} è il vettore delle intensità di corrente)

Altri esempi di possono trovare in [BHA], [BLA], per il accoppiato di beccheggio e sussulto di una nave, o per il rollio, oppure nell'uso degli elementi finiti. Per avere in mente qualcosa di preciso si può pensare o ad un esempio di sistema linearizzato visto in Cap. 6, vedi Esercizi 6.1, 6.2, 6.3, oppure agli esempi seguenti, a due gradi di libertà.

Esempio 7.1

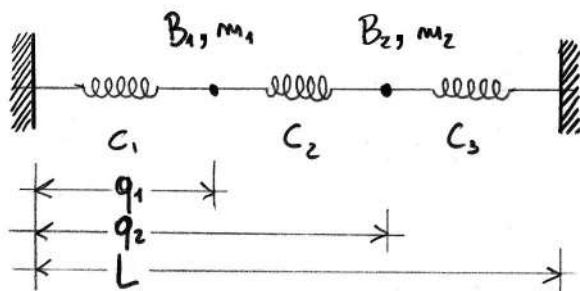


Figura 7.1:

$$K = \frac{1}{2}m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{q}_2^2$$

$$V = \frac{c_1}{2}q_1^2 + \frac{c_2}{2}(q_2 - q_1)^2 + \frac{c_3}{2}(q_2 - L)^2$$

Le equazioni di Lagrange sono, $\mathcal{L} = K - V$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 \dot{q}_1) + \frac{\partial V}{\partial q_1} &= m_1 \ddot{q}_1 + c_1 q_1 - c_2 (q_2 - q_1) \\ &= m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2) q_1 - c_2 q_2 = 0 \\ \frac{d}{dt}(m_2 \dot{q}_2) + \frac{\partial V}{\partial q_2} &= m_2 \ddot{q}_2 + c_2 (q_2 - q_1) + c_3 (q_2 - L) \\ &= m_2 \ddot{q}_2 - c_2 q_1 + (c_1 + c_2) q_2 - c_3 L = 0 \end{aligned}$$

che si possono scrivere in forma compatta come:

$$A\ddot{\underline{q}} + C\underline{q} - \underline{b} = \underline{0}$$

dove $\underline{q} = (q_1, q_2)$

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 L \end{pmatrix}$$

L'unica configurazione di equilibrio, dato al solito dall'annullarsi del gradiente di V , è la soluzione

$$C\underline{q}_E = \underline{b}$$

Prendiamo come nuove incognite le posizioni di B_1, B_2 variate rispetto all'equilibrio, cioè

$$x_1 = q_1 - q_{1E}, \quad x_2 = q_2 - q_{2E} \quad (\Rightarrow \underline{x} = \underline{q} - \underline{q}_E)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\underline{\ddot{q}} + C\underline{q} - \underline{b} &= A\underline{\ddot{x}} + C(\underline{q}_E + \underline{x}) - \underline{b} \\ &= A\underline{\ddot{x}} + C\underline{x} + C\underline{q}_E - \underline{b} = (\textit{essendo } C\underline{q}_E = \underline{b}) \\ &= A\underline{\ddot{x}} + C\underline{x} \end{aligned}$$

cioè la forma data all'inizio del paragrafo, avendo sopra specificato le matrici A e C .

Esempio 7.2 (Casa a due piani)

Modello megasemplificato di casa a due piani, supponendo che i piani possano traslare orizzontalmente (piccoli spostamenti !) ed i pilastri oltre a sostenere i piani esercitino su di essi forze di richiamo elastiche.

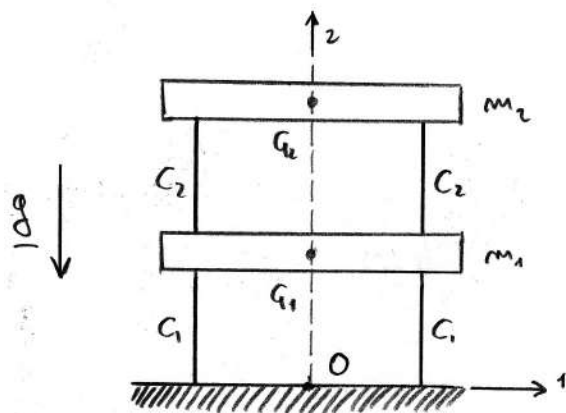


Figura 7.2:

x_1 = spostamento orizzontale di G_1
 x_2 = spostamento orizzontale di G_2

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\
 V &= 2\frac{c_1}{2}x_1^2 + 2\frac{c_2}{2}(x_1 - x_2)^2 \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1) + \frac{\partial V}{\partial x_1} &= m_1\ddot{x}_1 + 2c_1x_1 + 2c_2(x_1 - x_2) \\
 &= m_1\ddot{x}_1 + 2(c_1 + c_2)x_1 - 2c_2x_2 = 0 \\
 \frac{d}{dt}(m_2\dot{x}_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} &= m_2\ddot{x}_2 - 2c_2(x_1 - x_2) \\
 &= m_2\ddot{x}_2 - 2c_2x_1 + 2c_2x_2 = 0 \\
 \Rightarrow A\ddot{x} + Cx &= \underline{0}
 \end{aligned}$$

con

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad C = 2 \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

Ovviamente $\underline{x} = \underline{0}$ è l'unica configurazione di equilibrio. Notare che si ottengono le stesse equazioni di moto per il seguente sistema meccanico:

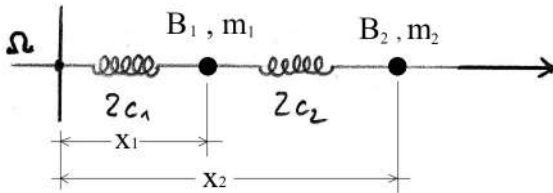


Figura 7.3:

Notiamo inoltre che in entrambi gli esempi 7.1 e 7.2 le posizioni di equilibrio sono stabili essendo minimi per V (ovviamente supponendo che tutte le costanti elastiche siano positive).

Esempio 7.3

Riportiamo le equazioni linearizzate dell'esercizio 6.1, Modello 1

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 + 2cz_1 = 0 \\ J_G\ddot{z}_2 + 2clLz_2 = 0 \end{cases}$$

per notare che diversamente dai due esempi precedenti esse costituiscono un sistema disaccoppiato, cioè ogni equazione dipende da una sola incognita. Un modello meccanico semplice che dà lo stesso sistema è il seguente, con un solo punto materiale B libero su un piano orizzontale e sotto l'azione delle due forze elastiche di figura

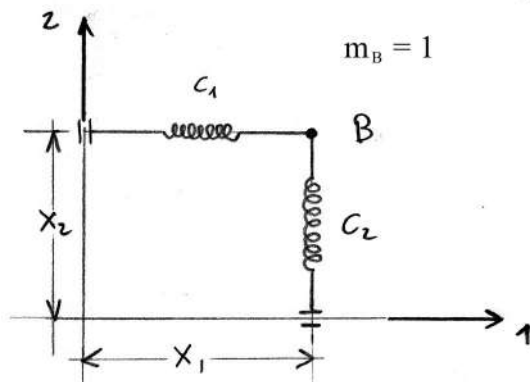


Figura 7.4:

Le equazioni di moto sono identiche alle precedenti, ponendo

$$c_1 = \frac{2c}{m}, \quad c_2 = \frac{2cL}{I_G}$$

Le equazioni hanno la solita forma

$$A\ddot{\underline{x}} + C\underline{\dot{x}} = \underline{0}$$

con

$$A = I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} .$$

Esempio 7.4 (Casa a due piani con terremoto)

Consideriamo il modello dato nell'Esempio 7.2 e supponiamo che le fondamenta si muovano con legge data $x_O(t)$ in un riferimento *fisso*

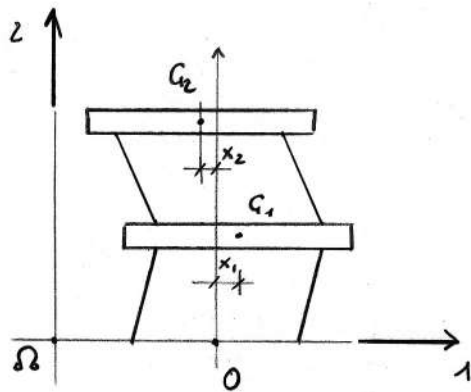


Figura 7.5:

Nel riferimento *mobile* con le fondamenta, cioè con origine in O , bisogna tenere conto delle forze d'inerzia, essendo il moto dei due piani tralatorio le equazioni di moto diventano (con la stessa notazione dell'Esempio 7.2)

$$A\ddot{\underline{x}} + C\underline{x} = \underline{F}(t) , \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} -m_1\ddot{x}_0 \\ -m_2\ddot{x}_0 \end{pmatrix}$$

(Notare che questo esempio *non* è conservativo in generale) Per la risoluzione dei sistemi lineari considerati negli esempi precedenti è importante il seguente risultato, che permette di *disaccoppiare* le equazioni di moto con un cambio di coordinate libere.

Teorema 7.1 (*Coordinate normali*)

Nelle ipotesi

- $K = \frac{1}{2}\dot{\underline{x}} \cdot A\dot{\underline{x}}$, A simmetrica (reale) def > 0
- $V = \frac{1}{2}\underline{x} \cdot C\underline{x}$, C simmetrica (reale)

esiste una trasformazione lineare invertibile (reale) di coordinate:

$$\begin{array}{ccc} \underline{x} & \longrightarrow & \underline{\xi} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{coordinate fisiche} & & \text{coordinate normali} \end{array}$$

tale che, nelle coordinate normali si ha:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \dot{\xi}_i^2 = \frac{1}{2} \underline{\dot{\xi}} \cdot I_d \underline{\dot{\xi}}$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \gamma_i \xi_i^2 = \frac{1}{2} \underline{\xi} \cdot \tilde{C} \underline{\xi}, \quad \tilde{C} \text{ diagonale}$$

Nelle coordinate normali le equazioni di moto sono:

$$\boxed{\ddot{\xi}_i + \gamma_i \xi_i = 0, \quad i = 1, \dots, l}$$

Nota 7.1 *l'esistenza di tale trasformazione è garantita quindi per ogni sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti del tipo:*

$$A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = 0$$

con

- *A* simmetrica e definita positiva
- *C* simmetrica

qualunque sia la sua provenienza.

Dimostrazione del Teorema 7.1

La trasformazione cercata è la composizione delle tre trasformazioni seguenti:

1. la trasformazione ortogonale che diagonalizza *A* (cioè ci si porta nella base ortonormale degli autovettori di *A*), dette \underline{y} le nuove coordinate si avrà, $\underline{x} \rightarrow \underline{y}$:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l m_i \dot{y}_i^2$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l V_{ij} y_i y_j$$

$$\begin{aligned}
A \text{ definita } > 0 &\Rightarrow m_i \in \mathfrak{R}^+, i = 1, \dots, l \\
C \text{ simmetrica} &\Rightarrow V_{ij} = V_{ji}, i, j = 1, \dots, l
\end{aligned}$$

2. *scaling*, definiamo le nuove coordinate \underline{z} nel modo seguente, $\underline{y} \rightarrow \underline{z}$

$$z_i = \sqrt{m_i} y_i, i = 1, \dots, l$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \dot{z}_i^2$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{V_{i,j}}{\sqrt{m_i m_j}} z_i z_j$$

Notare che la matrice $(\hat{C})_{ij} = V_{ij}/\sqrt{m_i m_j}$ è ancora simmetrica

3. la trasformazione ortogonale che diagonalizza \hat{C} , si ha: $\underline{z} \rightarrow \underline{\xi}$ e

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \dot{\xi}_i^2$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \gamma_j \xi_j^2, \gamma_j \in \mathfrak{R}, j = 1, \dots, l$$

Per approfondimenti vedere e.g. [FDRM], [FM], [A].

Osservazione:

Detta S la trasformazione, $x = S \xi$, si ha

$$\begin{aligned}
K = \frac{1}{2} \dot{x}^T A x &= \frac{1}{2} (S \dot{\xi})^T A S \dot{\xi} = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T S^T A S \dot{\xi} \\
&= \frac{1}{2} \dot{\xi}^T \xi \\
\Rightarrow S^T A S &= I_d
\end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{2}x^T Cx = \frac{1}{2}\xi^T S^T C S \xi = \frac{1}{2}\xi^T \tilde{C} \xi$$

$$\Rightarrow S^T C S = \tilde{C} \quad \tilde{C} \text{ diagonale}, \quad (\tilde{C})_{ii} = \gamma_i$$

Conseguenze del teorema 7.1

Nelle coordinate normali le soluzioni *base* (dette *modi normali* o principali) sono:

$$\underline{v}^i e^{\lambda_i t}, \quad \lambda_i^2 + \gamma_i = 0, \quad (v^i)_j = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, l$$

$$(\delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j)$$

Notare che:

- se $\gamma_i > 0$, poniamo $\gamma_i = \omega_i^2, \omega_i > 0$

$$\Rightarrow \lambda_i = \pm i \omega_i$$

$$\Rightarrow e^{\lambda_i t} = e^{\pm i \omega_i t} = \cos \omega_i t \pm i \sin \omega_i t$$

Essendo le equazioni di moto lineari e a coefficienti reali, la parte reale e la parte immaginaria di una soluzione complessa sono soluzioni. Otteniamo quindi 2 soluzioni reali per ogni i

$$\underline{v}^i \sin \omega_i t, \quad \underline{v}^i \cos \omega_i t$$

- se $\gamma_i < 0$, poniamo $\gamma_i = -\nu_i^2, \nu_i > 0$

$$\Rightarrow \lambda_i = \pm \nu_i$$

$$\Rightarrow e^{\lambda_i t} = e^{\pm \nu_i t}$$

Otteniamo quindi le 2 soluzioni:

$$\underline{v}^i e^{\nu_i t}, \quad \underline{v}^i e^{-\nu_i t}$$

- se $\gamma_i = 0 \Rightarrow \ddot{\xi}_i(t) = 0$ (ξ_i varia uniformemente in t)

Otteniamo ancora 2 soluzioni

$$\underline{v}^i, \underline{v}^i t$$

La soluzione generale è combinazione lineare delle $2l$ soluzioni *base* trovate. Riguardo alla *stabilità* della soluzione stazionaria $\underline{\xi} = \underline{0}$ (e quindi anche di $\underline{x} = \underline{0}$) avremo quindi:

Conseguenza 1

1. se tutte $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, l$, $\rightarrow \underline{x} = \underline{0}$ è **stabile**
2. se esiste un $\gamma_i < 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$ è **instabile**

Nota 7.2 Se V come funzione delle variabili fisiche \underline{x} è definita positiva allora tutti i $\gamma_i > 0$. Ritroviamo quindi il risultato ottenuto col Criterio di Dirichlet, perchè V definita positiva implica che $\underline{x} = \underline{0}$ è un minimo di V .

Nel caso lineare, si ha anche (vedi punto ii) che se V cambia di segno, oppure è definita negativa (cioè $\underline{x} = \underline{0}$ è un punto di sella o un massimo dei V) allora $\underline{x} = \underline{0}$ è instabile.

Tornando alle coordinate *fisiche* \underline{x} avremo che:

$$S(\underline{v}^i e^{\lambda_i t}) = e^{\lambda_i t} S(\underline{v}^i) = e^{\lambda_i t} \underline{u}^i \text{ e}$$

$$\lambda_i^2 A \underline{u}^i + C \underline{u}^i = \underline{0}$$

Da quanto detto si ha che:

$$\lambda_i^2 = -\gamma_i \in \Re \quad i = 1, \dots, l \text{ e } \underline{u}^i \in \Re^l \text{ tali che :}$$

$$\underline{u}^i \cdot A \underline{u}^j = \underline{u}^{iT} A \underline{u}^j = \underline{v}^{iT} S^T A S \underline{v}^j$$

$$= (\text{essendo } S^T A S = I_d) \underline{v}^{iT} \underline{v}^j = \delta_{ij}$$

D'altra parte seguendo il metodo generale di soluzione dei sistemi di equazioni lineari, cioè cercando soluzioni del tipo $\underline{x}(t) = \underline{u} e^{\lambda t}$ si arriva comunque all'equazione:

$$\lambda^2 A \underline{u} + C \underline{u} = \underline{0}$$

$\Rightarrow \lambda^2$ è radice dell'equazione algebrica

$$\det(\lambda^2 A + C) = 0$$

\underline{u} è soluzione del sistema omogeneo

$$(\lambda^2 A + C) \underline{u} = \underline{0}$$

con il λ^2 precedente.

Il teorema 7.1 garantisce quindi che:

Conseguenza 2

1. l'equazione algebrica $\det(\lambda^2 A + C) = 0$ ha l radici *reali*
2. il sistema omogeneo $(\lambda^2 A + C) \underline{u} = \underline{0}$ ha almeno l soluzioni *reali* distinte e tali che:

$$\underline{u}^i \cdot A \underline{u}^j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, l$$

(dette ancora condizioni di ortonormalità)

Nota 7.3 La matrice S di trasformazione $\underline{x} = S \underline{\xi}$ è, al solito, $S = (\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^l)$,
(con i vettori \underline{u}^i normalizzati)

Esempio 7.5 (risoluzione di casa a 2 piani)

Nel modello di casa a 2 piani dell'Esempio 7.2, prendiamo per fissare le idee $c_1 = c_2 = c$, $m_1 = 2m$, $m_2 = m$. Riscriviamo le equazioni di moto nella forma seguente

$$\begin{aligned} \frac{m}{2c} 2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2x_1 - x_2 &= 0 \\ \frac{m}{2c} \frac{d^2 x_2}{dt^2} - x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Introduciamo il *tempo adimensionale*

$$\tau = \sqrt{\frac{2c}{m}} t$$

e otteniamo:

$$A \frac{d^2 \underline{x}}{d\tau^2} + C \underline{x} = \underline{0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo soluzioni della forma $\underline{x} = \underline{u} e^{\lambda\tau}$:

$$(\lambda^2 A + C) \underline{u} = \underline{0} \text{ con}$$

$$(\lambda^2 A + C) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 + 2 & -1 \\ -1 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda^2 A + C) = 2(\lambda^2 + 1)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$$

(come deve essere visto che V è definito positivo)

\Rightarrow 2 frequenze di oscillazione

$$\omega_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1/2}$$

In corrispondenza a $\lambda^2 = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = -\omega_1^2$ dalla prima riga del sistema $(\lambda^2 A + C) \underline{u} = \underline{0}$ otteniamo

$$2(\lambda^2 + 1) u_1 - u_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} u_1 - u_2 = 0$$

$$\Rightarrow u_2 = \sqrt{2} u_1$$

$$\Rightarrow \underline{u}^1 = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad b_1 \in \mathfrak{R}$$

Analogamente in corrispondenza a $\lambda^2 = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha

$$\underline{u}^2 = b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad b_2 \in \mathfrak{R}$$

Quindi i modi normali di vibrazione sono:

$$\begin{aligned} \underline{u}^1 \sin \omega_1 \tau &, \quad \underline{u}^1 \cos \omega_1 \tau \\ \underline{u}^2 \sin \omega_2 \tau &, \quad \underline{u}^2 \cos \omega_2 \tau \end{aligned}$$

La soluzione generale del problema è allora:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \underline{u}^1 (k_1 \sin \omega_1 t + k_2 \cos \omega_1 t) + \\ &+ \underline{u}^2 (k_3 \sin \omega_2 t + k_4 \cos \omega_2 t), \quad \text{con } \tau = \sqrt{\frac{2c}{m}} t, \end{aligned}$$

dove le 4 costanti k_1, \dots, k_4 , sono determinate dalla posizione e velocità iniziali ($\underline{x}(0)$ e $\dot{\underline{x}}(0)$). Notare che nel moto (1) i due piani sono in fase mentre nel moto (2) sono in opposizione di fase.

Nota 7.4

Per scrivere la soluzione generale si possono prendere le due costanti b_1 e b_2 uguali ad 1, dovendo comunque moltiplicare i vettori \underline{u}^1 e \underline{u}^2 per le costanti k_1, \dots, k_4 . Le due costanti b_1 e b_2 servono a *normalizzare* i vettori base e quindi a costruire la matrice di trasformazione in coordinate normali, S . Precisamente si ha:

$$\begin{aligned} \underline{u}^1 \cdot A \underline{u}^1 &= b_1^2 (1, \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 4b_1^2 = 1 \\ \Rightarrow b_1 &= \frac{1}{2} \\ \underline{u}^2 \cdot A \underline{u}^2 &= b_2^2 (1, \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 4b_2^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_2 &= \frac{1}{2} \\ \underline{u}^1 \cdot A \underline{u}^2 &= b_1 b_2 (1, \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi_1 - \xi_2) \end{cases}$$

Esercizio 7.1

Con i dati dell'esempio 7.5, determinare la soluzione del problema con i dati iniziali

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7.2

Per il sistema dell'Esempio 7.1, supponiamo che $m_1 = 3m$, $m_2 = 2m$, $c_1 = 2c$, $c_2 = 2c$, $c_3 = c$, determinare:

1. la configurazione di equilibrio \underline{q}_E
2. le due frequenze di oscillazione
3. i due *modi normali*
4. le soluzioni con i dati iniziali $q_1(0) = 0$, $q_2(0) = \frac{L}{2}$, $\dot{q}_1(0) = 0$, $\dot{q}_2(0) = 0$

7.3 Sistemi meccanici conservativi ad l gradi di libertà con termine forzante

Consideriamo le equazioni di moto:

$$A\ddot{\underline{x}} + C\underline{x} = \underline{F}(t) , \underline{x} \in \mathfrak{R}^l$$

A e C come nella sezione precedente. Passando alle coordinate normali $\underline{\xi}$ il sistema si *disaccoppia* e le equazioni di moto diventano

$$\ddot{\xi}_i + \gamma_i \xi_i = f_i(t) , i = 1, \dots, l$$

con i γ_i calcolati per il sistema omogeneo. Si possono quindi applicare i risultati ottenuti per una equazione lineare con termine forzante. Se in particolare $\underline{F}(t)$ è una funzione armonica del tempo con frequenza ω_f si ha:

Conseguenza 3

Se ω_f è *vicina* ad una frequenza propria del sistema $\omega_j = \sqrt{\gamma_j}$, entra in risonanza solo il modo normale j -esimo. Passare alle coordinate normali equivale a cercare una soluzione particolare del sistema non omogeneo nella forma seguente:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^l \underline{u}^i g_i(t) , \underline{u}^i \text{ calcolati con } \underline{F} = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\ddot{\underline{x}} + C\underline{x} &= \sum_{i=1}^l (\ddot{g}_i A\underline{u}^i + g_i C\underline{u}^i) \\ &= (\text{essendo } C\underline{u}^i = -\lambda_i^2 A\underline{u}^i = \gamma_i A\underline{u}^i) \\ &= \sum_{i=1}^l (\ddot{g}_i + \gamma_i g_i) A\underline{u}^i = \underline{F}(t) \end{aligned}$$

moltiplicando scalarmente per \underline{u}^j si ha:

$$\begin{aligned} \underline{u}^j \cdot A\underline{u}^j (\ddot{g}_j + \gamma_j g_j) &+ \sum_{i=1, i \neq j}^l (\ddot{g}_i + \gamma_i g_i) \underline{u}^j \cdot A\underline{u}^i \\ &(\text{essendo } \underline{u}^j \cdot A\underline{u}^i = 0 \text{ per } i \neq j) \\ &= \underline{u}^j \cdot A\underline{u}^j (\ddot{g}_j + \gamma_j g_j) = \underline{F} \cdot \underline{u}^j \end{aligned}$$

$$\ddot{g}_j + \gamma_j g_j = \underline{F}(t) \cdot \frac{\underline{u}^j}{\underline{u}^j \cdot A \underline{u}^j} = f_j(t), \quad j = 1, \dots, l$$

Esercizio 7.3 (*Casa a due piani con terremoto*)

Con gli stessi dati dell'Esempio 7.5, consideriamo il termine forzante proposto nell'Esempio 7.4, con $x_0(t) = a_f \sin \omega_f t$, avremo quindi A e C come nell'Esempio 7.5 ed

$$\underline{F}(T) = \begin{pmatrix} 2ma_f \omega_f^2 \\ ma_f \omega_f^2 \end{pmatrix} \sin \omega_f t$$

Determinare:

1. una soluzione particolare del problema forzato
2. la soluzione generale del problema forzato
3. la soluzione con dati iniziali $\underline{x} = \underline{0}$, $\dot{\underline{x}} = \underline{0}$, in generale e per

$$\omega_f = \left(1 + \sqrt{2}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{2c}{m}}$$

7.4 Sistemi meccanici ad l gradi di libertà, con forze sia conservative che dipendenti da velocità

Le equazioni del moto sono:

$$A \ddot{\underline{x}} + B \dot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \mathfrak{R}^l$$

A e C come nel paragrafo 2.

Passando alle coordinate normali del sistema senza il termine $B \dot{\underline{x}}$, possono accadere 2 cose:

- La matrice B trasformata, cioè $S^T B S$ è diagonale (cioè la trasformazione di coordinate normali diagonalizza oltre A e C anche B)
- $S^T B S$ non è diagonale.

Nel primo caso le equazioni di moto in coordinate normali sono:

$$\ddot{\xi}_i + 2h_i \dot{\xi}_i + \gamma_i \xi_i = 0, \quad i = 1, \dots, l$$

con $2h_i = (S^T B S)_{ii}$.

Si possono quindi in questo caso applicare i risultati ottenuti per una equazione del secondo ordine con termine di resistenza. Notare che la potenza delle forze dipendenti dalla velocità $\underline{\dot{x}}$ è:

$$W = -\underline{\dot{x}} \cdot B \underline{\dot{x}} = -\underline{\dot{\xi}} \cdot (S^T B S) \underline{\dot{\xi}} = -\sum_{i=1}^l 2h_i \cdot \dot{\xi}_i^2$$

Quindi si ha

Conseguenza 4

Se le forze dipendenti dalla velocità sono dissipative, cioè $W = -\underline{\dot{x}} \cdot B \underline{\dot{x}} < 0$, $\forall \underline{\dot{x}} \neq \underline{0}$, si ha $h_i > 0$, $i = 1, \dots, l$.

Passare alle coordinate normali equivale a cercare le soluzioni nella forma seguente:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^l \underline{u}^i g_i(t), \quad \underline{u}^i \text{ calcolata con } B = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A \ddot{\underline{x}} + B \dot{\underline{x}} + C \underline{x} &= \sum_{i=1}^l (\ddot{g}_i A \underline{u}^i + \dot{g}_i B \underline{u}^i + g_i C \underline{u}^i) \\ &= (\text{essendo } C \underline{u}^i = \gamma_i A \underline{u}^i) \\ &= \sum_{i=1}^l [(\ddot{g}_i + \gamma_i \dot{g}_i) A \underline{u}^i + \dot{g}_i B \underline{u}^i] \end{aligned}$$

Moltiplicando scalarmente per \underline{u}^j si ha:

$$\underline{u}^j \cdot A\underline{u}^j (\ddot{g}_j + \gamma_j g_j) + \dot{g}_j \underline{u}^j \cdot B\underline{u}^j + \sum_{i=1, i \neq j}^l \dot{g}_i \underline{u}^j \cdot B\underline{u}^i$$

Quindi la condizione al punto (i) diventa:

$$\boxed{S^T B S \text{ diagonale} \Leftrightarrow \underline{u}^j \cdot B\underline{u}^i = 0, \forall i \neq j}$$

Se vale, si ha il sistema disaccoppiato:

$$\begin{aligned} \underline{u}^j \cdot A\underline{u}^j (\ddot{g}_j + \gamma_j g_j) + \dot{g}_j \underline{u}^j \cdot B\underline{u}^j &= 0, \quad j = 1, \dots, l \\ \Rightarrow \ddot{g}_j + \left(\frac{\underline{u}^j \cdot B\underline{u}^j}{\underline{u}^j \cdot A\underline{u}^j} \right) \dot{g}_j + \gamma_j g_j &= 0, \quad j = 1, \dots, l \end{aligned}$$

(cioè $2h_j = \underline{u}^j \cdot B\underline{u}^j / (\underline{u}^j \cdot A\underline{u}^j)$)

Se *non* vale (punto (ii)) bisogna tornare al metodo generale, cioè cercare la soluzione base nella forma $\underline{x} = \underline{u}e^{\lambda t}$ con \underline{u} e λ tali che $\lambda^2 A\underline{u} + \lambda B\underline{u} + C\underline{u} = \underline{0}$, equazione caratteristica. Si avrà allora che oltre a variare la dipendenza temporale, cioè i λ , varieranno anche i modi normali, cioè gli \underline{u} soluzioni della equazione caratteristica saranno *diversi* dagli \underline{u}^i calcolati con $B = 0$ (mentre nel caso (i) i vettori \underline{u} non variano rispetto al caso $B = 0$, variano solo i λ).

Esercizio 7.4 (Casa a due piani con smorzamento)

Con gli stessi dati dell'Esempio 7.5, considerare anche il termine dipendente dalla velocità:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Determinare le condizioni tali che:

1. $W = -\underline{\dot{x}} \cdot B\underline{\dot{x}} < 0, \forall \underline{\dot{x}} \in \mathfrak{R}^2$, forze dissipative)
2. vale il punto (i), cioè $S^T B S$ è diagonale
3. in tal caso scrivere i modi normali.

7.5 Cenni al problema della corda vibrante finita

Un modello classico che descrive il modo di vibrare di una corda elastica tesa, fissata alle estremità, in assenza di forze e per piccole deformazioni trasversali è il seguente

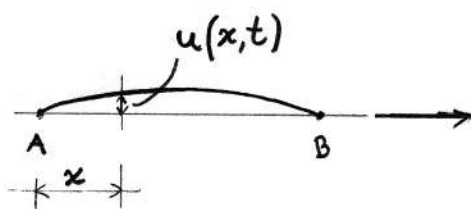


Figura 7.6:

$$\overline{AB} = l$$

Problema 1 : determinare una funzione $u(x, t)$ regolare tale che:

- equazione del moto (detta equazione delle onde)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}$$

(E = modulo di Young della corda, ρ densità di massa, entrambe costanti)

- vincoli in A e B (dette condizioni al contorno)

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0$$

- condizioni iniziali:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, l]$$

In analogia al procedimento seguito per i sistemi lineari ad un numero finito di gradi di libertà, cerchiamo la soluzione nella forma

$$u(x, t) = v(x)e^{\lambda t}$$

(detto anche metodo di separazione delle variabili). Sostituendo nell'equazione di moto, si vede che $u(x, t)$ è soluzione se $v(x)$ e λ risolvono il seguente problema, detto anche problema agli autovalori per l'operatore differenziale lineare

$$L[u] = -c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Problema 2 Determinare λ e $v(x)$ tali che:

$$-c^2 v'' + \lambda^2 v = 0, \text{ per } x \in (0, l), \text{ } v \neq 0, \text{ } v(0) = 0, \text{ } v(l) = 0$$

Per risolvere il problema 2 notiamo che se $\lambda^2 \geq 0$ esiste *solo* la soluzione $v \equiv 0$, cerchiamo allora $\lambda^2 < 0$:

$$\begin{aligned} v'' + \frac{-\lambda^2}{c^2} v &= 0, \quad \frac{-\lambda^2}{c^2} = \omega^2 \\ \Rightarrow v'' + \omega^2 v &= 0 \\ \rightarrow v(x) &= a \sin \omega x + b \cos \omega x \end{aligned}$$

Imponiamo ora le condizioni al bordo

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\Rightarrow b = 0 \\ v(l) = 0 &= a \sin \omega l \end{aligned}$$

\Rightarrow volendo $v \neq 0$ scegliamo $a \neq 0$, ma allora deve essere $\omega l = n\pi$, $n \in \mathbf{N}$

Soluzione al Problema 2 Abbiamo trovato infinite soluzioni:

$$\lambda_n^2 = -c^2 \omega_n^2, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} \text{ (autovalori o armoniche)}$$

$$v_n(x) = a_n \sin \omega_n x, \quad n \in \mathbf{N} \text{ (autovettori)}.$$

Soluzione al Problema 1 Anche qui infinite soluzioni, che si dicono ancora *modi normali della corda* e che si dimostra *sotto opportune ipotesi* sui dati iniziali, costituiscono ancora una base per lo spazio delle soluzioni, nel senso che la soluzione generale del problema 1 è la combinazione lineare (infinita) di tali soluzioni, con coefficienti che vanno determinati in base alle condizioni iniziali $u_0(x)$, $v_0(x)$ (tramite gli sviluppi in serie di Fourier di tali funzioni)

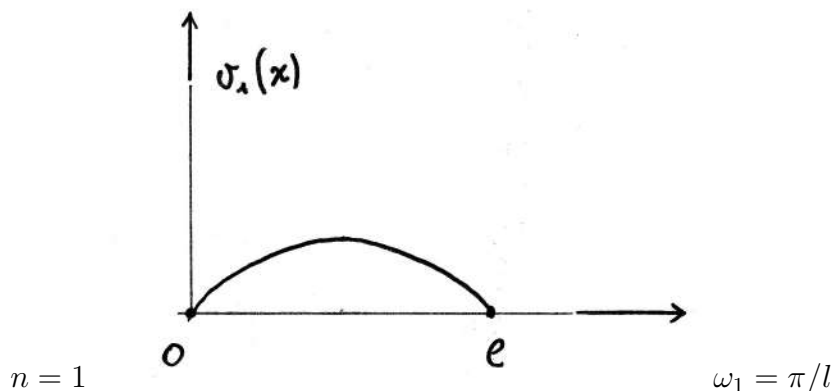
Precisamente avremo

$$\forall n \in N , u_n(x, t) = v_n(x) \left(b_n \operatorname{sinc} \omega_n t + \tilde{b}_n \operatorname{cosc} \omega_n t \right)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x, t)$$

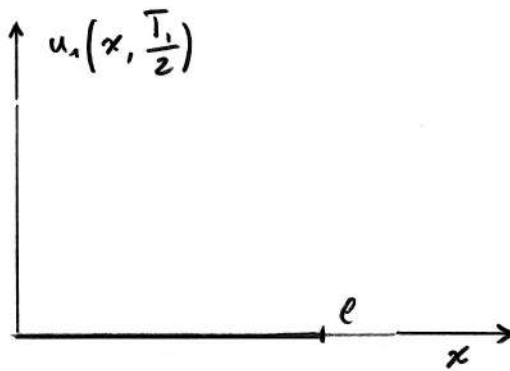
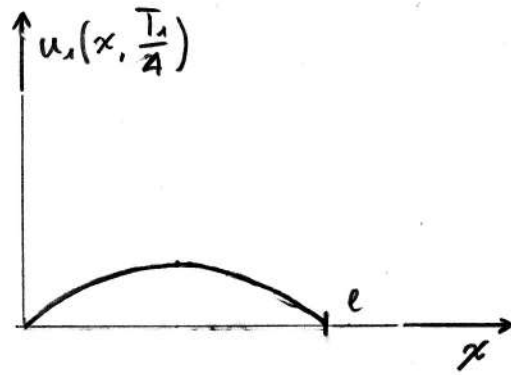
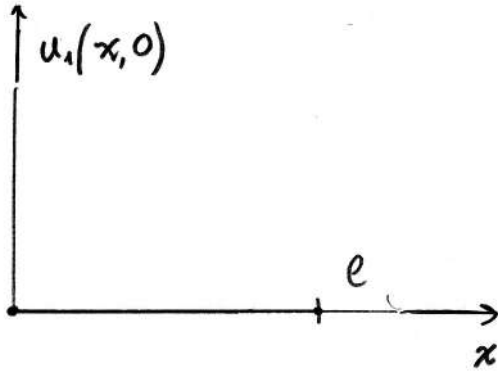
Nota 7.5 In generale il Problema 2 dipende fortemente dalle condizioni al bordo, provare con $v(0) = 0$ (A fisso), $v'(l) = 0$ (B libero).

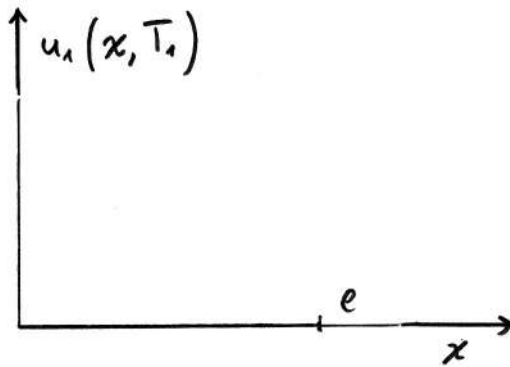
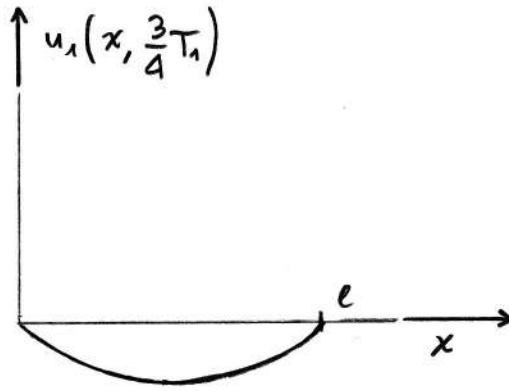
Per visualizzare i modi normali, consideriamo la prima armonica:



$$u(x, t) \text{ ha periodo } T_1 = \frac{2\pi}{c\omega_1} = \frac{2l}{c}$$

come esempio consideriamo $\tilde{b}_1 = 0$, $b_1 = 1$:





7.6 Risoluzione degli Esercizi

7.6.1 Risoluzione Esercizio 7.1

Usiamo le soluzioni trovate nell'Esempio 7.5, ponendo

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_1 \sqrt{\frac{2c}{m}}, \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2 \sqrt{\frac{2c}{m}}$$

avremo:

$$\underline{x}(0) = k_2 \underline{u}^1 + k_4 \underline{u}^2 = \begin{pmatrix} k_2 + k_4 \\ \sqrt{2}k_2 - \sqrt{2}k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k_2 = k_4 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(0) &= k_1 \tilde{\omega}_1 \underline{u}^1 + k_3 \tilde{\omega}_2 \underline{u}^2 = \begin{pmatrix} k_1 \tilde{\omega}_1 + k_3 \tilde{\omega}_3 \\ k_1 \tilde{\omega}_1 \sqrt{2} - k_3 \tilde{\omega}_2 \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow k_1 = k_3 = 0 \\ \Rightarrow \underline{x}(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \underline{u}^1 \cos \tilde{\omega}_1 t + \frac{1}{2} \underline{u}^2 \cos \tilde{\omega}_2 t = \begin{pmatrix} 1/2 (\cos \tilde{\omega}_1 t + \cos \tilde{\omega}_2 t) \\ \sqrt{2}/2 (\cos \tilde{\omega}_1 t - \cos \tilde{\omega}_2 t) \end{pmatrix} \\ &(\text{verificare!}) \end{aligned}$$

7.6.2 Risoluzione Esercizio 7.2

1.

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 4c & -2c \\ -2c & 3c \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ cL \end{pmatrix} \\ C \underline{q}_E &= \underline{b} \Rightarrow \begin{cases} 4q_1 - 2q_2 = 0 \\ -2q_1 + 3q_2 = L \end{cases} \Rightarrow q_{1E} = \frac{L}{4}, \quad q_{2E} = \frac{L}{2} \\ &\Rightarrow x_1 = q_1 - \frac{L}{4}, \quad x_2 = q_2 - \frac{L}{2} \end{aligned}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}$$

e l'equazione del moto è

$$m \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} + c \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

ponendo

$$c = \sqrt{\frac{c}{m}} t \quad e \quad \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = \underline{x}''$$

abbiamo

$$\tilde{A} \underline{x}'' + \tilde{C} \underline{x} = \underline{0} \quad \text{con}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \lambda^2 \tilde{A} + \tilde{C} &= \begin{pmatrix} 3\lambda^2 + 4 & -2 \\ -2 & 2\lambda^2 + 3 \end{pmatrix} \\ \det(\lambda^2 \tilde{A} + \tilde{C}) &= 6\lambda^4 + 17\lambda^2 + 8 = 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 &= \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 24 \cdot 8}}{12} = \frac{-17 \pm \sqrt{97}}{12}\end{aligned}$$

\Rightarrow le due frequenze di oscillazione sono

$$\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{17 - \sqrt{97}}{12}\right) \frac{c}{m}} \cong 1.496 \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{17 + \sqrt{97}}{12}\right) \frac{c}{m}} \cong 0.772 \sqrt{\frac{c}{m}}$$

3. \underline{u}^1 e \underline{u}^2 sono soluzioni di $(\lambda^2 \tilde{A} + \tilde{C}) \underline{u} = \underline{0}$ con i valori trovati sopra per λ^2 , guardando ad esempio la seconda riga si ha

$$\begin{aligned}-2u_1 + \left(2 \cdot \frac{-17 + \sqrt{97}}{12} + 3\right) u_2 &= 0 \\ \Rightarrow \underline{u}^1 &= \left(\frac{1 + \sqrt{97}}{12} b_1, b_1\right) \cong b_1 (0.904, 1)\end{aligned}$$

analogamente

$$\underline{u}^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{97}}{12} b_2, b_2\right) \cong b_2 (-0.737, 1)$$

Quindi i due modi normali sono

$$\begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{97}}{12} \\ 1 \end{pmatrix} \sin \omega_1 t, \cos \omega_1 t; \quad \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{97}}{12} \\ 1 \end{pmatrix} \sin \omega_2 t, \cos \omega_2 t$$

4. Scrivendo come al solito la soluzione generale come combinazione lineare dei modi normali, imponiamo le condizioni iniziali tenendo conto che

$$\underline{x}(0) = \underline{q}(0) - \underline{q}_E = \begin{pmatrix} -\frac{L}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{x}} = \underline{0}, \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_3 = 0 \text{ e}$$

$$\begin{cases} k_2 \frac{1+\sqrt{97}}{12} + k_4 \frac{1-\sqrt{97}}{12} & = -\frac{L}{4} \\ k_2 + k_4 & = 0 \end{cases} \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{2\sqrt{97}}L \cong -0.152L, \quad k_4 = -k_2$$

7.6.3 Risoluzione Esercizio 7.3

1. Usando lo scaling

$$\tau = \sqrt{\frac{2c}{m}} t$$

abbiamo

$$\tilde{\underline{F}}(\tau) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} m a_f \frac{\omega_f^2}{2c} \sin \omega_f \sqrt{\frac{m}{2c}} \tau$$

poniamo

$$\hat{\omega}_f = \omega_f \sqrt{\frac{m}{2c}} \Rightarrow \tilde{\underline{F}}(\tau) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} a_f \hat{\omega}_f^2 \sin \hat{\omega}_f \tau$$

Cerchiamo una soluzione particolare delle equazioni non omogenee

$$A \underline{x}'' + C \underline{x} = \tilde{\underline{F}}(\tau)$$

nella forma

$$\underline{x}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} g_1(\tau) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} g_2(\tau)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A\underline{x}'' + C\underline{x} &= g_1'' A \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + g_1 C \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \\
&+ g_2'' A \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + g_2 C \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \\
&= g_1'' A \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + g_1 \left(- \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) A \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right) + \\
&+ g_2'' A \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + g_2 \left(- \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) A \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) = \\
&= (g_1'' + \omega_1^2 g_1) A \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + (g_2'' + \omega_2^2 g_2) A \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Moltiplicando scalarmente per

$$\underline{u}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
&(g_1'' + \omega_1^2 g_1) (1, \sqrt{2}) A \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= 4 (g_1'' + \omega_1^2 g_1) = (1, \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} a_f \hat{\omega}_f^2 \sin \hat{\omega}_f \tau
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow g_1'' + \omega_1^2 g_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} a_f \hat{\omega}_f^2 \sin \hat{\omega}_f \tau$$

Moltiplicando scalarmente per:

$$\underline{u}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

si ha:

$$4(g_2'' + \omega_2^2 g_2) = (1, -\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} a_f \hat{\omega}_f^2 \sin \hat{\omega}_f \tau$$

$$\Rightarrow g_2'' + \omega_2^2 g_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} a_f \hat{\omega}_f^2 \sin \hat{\omega}_f \tau$$

\Rightarrow due equazioni del tipo $g_i'' + \omega_i^2 g_i = f_i \sin \hat{\omega}_f \tau$,

$$f_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} a_f \hat{\omega}_f^2, \quad f_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} a_f \hat{\omega}_f^2, \quad i = 1, 2$$

(a) se $\hat{\omega}_f \neq \omega_i \quad i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_i(\tau) &= \mathcal{A}_i \sin \hat{\omega}_f \tau \\ \mathcal{A}_i &= \frac{f_i}{(\omega_i^2 - \hat{\omega}_f^2)}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

(b) se $\hat{\omega}_f = \omega_i \quad i = 1 \text{ o } 2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\text{risonanza}) \quad g_i(\tau) &= -\frac{f_j}{2\omega_i} \tau \cos \omega_i \tau \\ e \quad g_j(\tau) &= -\frac{f_i}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \sin \omega_j \tau, \quad i \neq j \end{aligned}$$

2. La soluzione generale è:

$$\begin{aligned} \underline{x}(\tau) &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} (k_1 \sin \omega_1 \tau + k_2 \cos \omega_1 \tau + g_1(\tau)) + \\ &+ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} (k_3 \sin \omega_2 \tau + k_4 \cos \omega_2 \tau + g_2(\tau)) \end{aligned}$$

3.

$$\underline{x}(0) = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_2 = k_4 = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(0) &= (k_1\omega_1 + \dot{g}_1(0)) \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + (k_3\omega_2 + \dot{g}_2(0)) \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow k_1 &= -\frac{1}{\omega_1} \dot{g}_1(0), \quad k_3 = -\frac{1}{\omega_2} \dot{g}_2(0) \end{aligned}$$

Concludendo:

(a) se $\hat{\omega}_f \neq \omega_i$, $i = 1, 2$

$$k_1 = -\frac{\mathcal{A}_1}{\omega_1} \hat{\omega}_f, \quad k_3 = -\frac{\mathcal{A}_2}{\omega_2} \hat{\omega}_f$$

(b) se $\hat{\omega}_f = \omega_2 \neq \omega_1$

$$k_1 = -\frac{\mathcal{A}_1}{\omega_1} \omega_2, \quad k_3 = +\frac{f_2}{2\omega_2^2}$$

7.6.4 Risoluzione Esercizio 7.4

1. $W = -\underline{\dot{x}} \cdot B \underline{\dot{x}} < 0 \Leftrightarrow b_{11} > 0, \det(B) > 0$

2. $S^T B S$ è diagonale $\Leftrightarrow \underline{u}^1 \cdot B \underline{u}^2 = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1, \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1, \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} - \sqrt{2} b_{12} \\ b_{21} - \sqrt{2} b_{22} \end{pmatrix} \\ = & b_{11} - \sqrt{2} b_{12} + \sqrt{2} b_{21} - 2b_{22} = 0 \end{aligned}$$

3. Cercando soluzioni base della forma: $\underline{x} = \underline{u}^1 g_1 + \underline{u}^2 g_2$ si arriva alle 2 equazioni:

$$\ddot{g}_i + 2h_i \dot{g}_i + \omega_i^2 g_i = 0, \quad i = 1, 2$$

dove:

$$\begin{aligned}2h_1 &= \frac{\underline{u}^1 \cdot B\underline{u}^1}{\underline{u}^1 \cdot A\underline{u}^1} = \frac{1}{4} \left(b_{11} + 2b_{22} + \sqrt{2} (b_{12} + b_{21}) \right) = \\ &= \left(\text{essendo per p.to (2) } 2b_{22} = b_{11} + \sqrt{2} (b_{21} - b_{12}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(b_{11} + \sqrt{2} b_{21} \right) \\ 2h_2 &= \frac{\underline{u}^2 \cdot B\underline{u}^2}{\underline{u}^2 \cdot A\underline{u}^2} = \frac{1}{4} \left(b_{11} + 2b_{22} - \sqrt{2} (b_{12} + b_{21}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(b_{11} - \sqrt{2} b_{12} \right)\end{aligned}$$

Si avrà quindi che

$$\begin{aligned}g_i &= k e^{\lambda_i t} && \text{con } \lambda_i \text{ soluzione di} \\ \lambda_i^2 + 2h_i \lambda_i + \omega_i^2 &= 0, \quad i = 1, 2 \\ \Rightarrow \lambda_i &= \frac{-h_i \pm \sqrt{h_i^2 - \omega_i^2}}{2}\end{aligned}$$

\Rightarrow oscillazioni smorzate se $|h_i| < \omega_i$

(vedi [BO] oppure [FDRM]).

Indice

1	Equazioni della Dinamica	1
1.1	Introduzione, Principio di D'Alembert	1
1.2	Sistemi olonomi conservativi	2
1.3	Sistemi olonomi generali	3
1.4	Equazioni Cardinali della Dinamica	6
1.5	Energia cinetica e momento angolare per i rigidi	8
1.6	Applicazioni	16
1.7	Risoluzione degli Esercizi	26
1.7.1	Risoluzione Esercizio 1.1	26
1.7.2	Risoluzione Esercizio 1.2	30
1.7.3	Risoluzione Esercizio 1.3	32
2	Rigido con Asse Fisso, esempi	35
2.1	Esempi	35
2.2	Risoluzione Esercizi	45
2.2.1	Risoluzione Esercizio 2.1	45
2.2.2	Risoluzione Esercizio 2.2	46
2.2.3	Risoluzione Esercizio 2.3	48
3	Precessioni e moto libero di un rigido	50
3.1	Introduzione	50
3.2	Equazioni di Eulero per i rigidi	53
3.3	Precessioni per Inerzia	55
3.4	Fenomeni giroscopici elementari	59
3.5	Risoluzione Esercizi	64
3.5.1	Risoluzione Esercizio 3.1	64

4	Struttura delle Equazioni di Langrange	66
4.1	Struttura dell'energia cinetica per i sistemi olonomi	66
4.2	Struttura delle equazioni di Lagrange	69
4.3	Caso conservativo, sistema canonico	72
4.4	Risoluzione degli Esercizi	81
4.4.1	Risoluzione Esercizio 4.1	81
4.4.2	Risoluzione Esercizio 4.2	81
4.4.3	Risoluzione Esercizio 4.3	83
5	Stabilità	86
5.1	Introduzione e Definizioni	86
5.2	Criterio di Stabilità a priori	91
5.3	Criterio <i>statico</i> di stabilità	95
5.4	Stabilità delle rotazioni permanenti di un rigido in una pre- cessione per inerzia	96
6	Linearizzazione delle Equazioni di moto	101
6.1	Caso Generale	101
6.2	Equazioni di Lagrange per Sistemi Olonomi	103
6.3	Alcuni risultati sulla Stabilità Lineare	112
6.4	Risoluzione degli Esercizi	117
6.4.1	Risoluzione Esercizio 6.1	117
6.4.2	Risoluzione Esercizio 6.2	118
6.4.3	Risoluzione Esercizio 6.3	120
7	Sistemi Meccanici Lineari	124
7.1	Generalità	124
7.2	Sistemi meccanici conservativi ad l gradi di libertà	125
7.3	Sistemi meccanici conservativi ad l gradi di libertà con termine forzante	139
7.4	Sistemi meccanici ad l gradi di libertà, con forze sia conserv- ative che dipendenti da velocità	141
7.5	Cenni al problema della corda vibrante finita	144
7.6	Risoluzione degli Esercizi	148
7.6.1	Risoluzione Esercizio 7.1	148
7.6.2	Risoluzione Esercizio 7.2	149
7.6.3	Risoluzione Esercizio 7.3	151
7.6.4	Risoluzione Esercizio 7.4	154

Bibliografia

- [A] Arnold V.I.: “Mathematical Methods of classical mechanics”, Springer Grad Texts in Math v.60, 1978
- [ABM] E.Alberti, G.Belli, C.Morosi: “Meccanica Razionale, Esercizi”, 2 ed., Masson (Milano), 1989
- [BO] G.Borgioli: “Modelli Matematici di evoluzione ed equazioni differenziali”, CELID, 1996
- [BHA] R.Bhattacharyya: “Dynamics of Marine Vehicles”, J.Wiley and sons ed. (New York), 1978
- [BLA] S.N.Blagoveshchensky: “Theory of ship motions”, Dover ed. (New York), 1962
- [BPS] M.Bramanti, C.D.Pagani, S.Salsa: “Matematica, calcolo infinitesimale e algebra lineare”, Zanichelli ed, 2000
- [BR] M.Braun: “Differential equations and their applications”, Springer - Verlag, 1975
- [BU] E.Butkov: “Mathematical physics”, Addison - Wesley pub.co, 1968
- [CP] R.W.Clough, J.Penzien: “Dynamics of structures”, McGraw-Hill ed. (New York), 1993
- [E] L.C. Evans: “Partial Differential Equations”, AMS (Providence), 1998
- [FDRM] A.Fasano, V.deRienzo, A.Messina: “Corso di Meccanica Razionale”, Laterza (Bari), 1986

- [FM] A.Fasano, S.Marmi: “Meccanica Analitica”, Boll. Boringhieri, 1994
- [FU] B.Finzi, P.Udeschini: “Esercizi di Meccanica Razionale”, ed. Masson (Milano), 1989
- [GI] E.Giusti: “Analisi Matematica 1, 2”, Bollati Boringhieri Ed, 1983
- [GO] H.Goldstein: “Meccanica classica”, ed1 Zanichelli, 1971, ed2 (in inglese, aggiornata e molto ampliata) A. Wesley Pab. Co. 1980
- [LCA] T.Levi-Civita, U.Amaldi: “Lezioni di meccanica razionale”, Zanichelli, 1984
- [PS] C.D.Pagani, S.Salsa: “Analisi Matematica 1, 2”, Masson Ed., 1994
- [TB] J.M.T.Thompson, S.R.Bishop: “Nonlinearity and chaos in engineering dynamics”, Wiley ed., 1994
- [TH] W.T.Thompson: “Vibrazioni meccaniche, teoria ed applicazioni”, Tamburini ed. (Milano), 1973
- [T] E.Tonti: “Esercizi di Meccanica Razionale”, ed. CittaStudi, 1991

Note: testi di riferimento per la teoria: [FDRM], [LCA]; per gli esercizi [ABM], [FU]