Segnali e sistemi

nel dominio del tempo

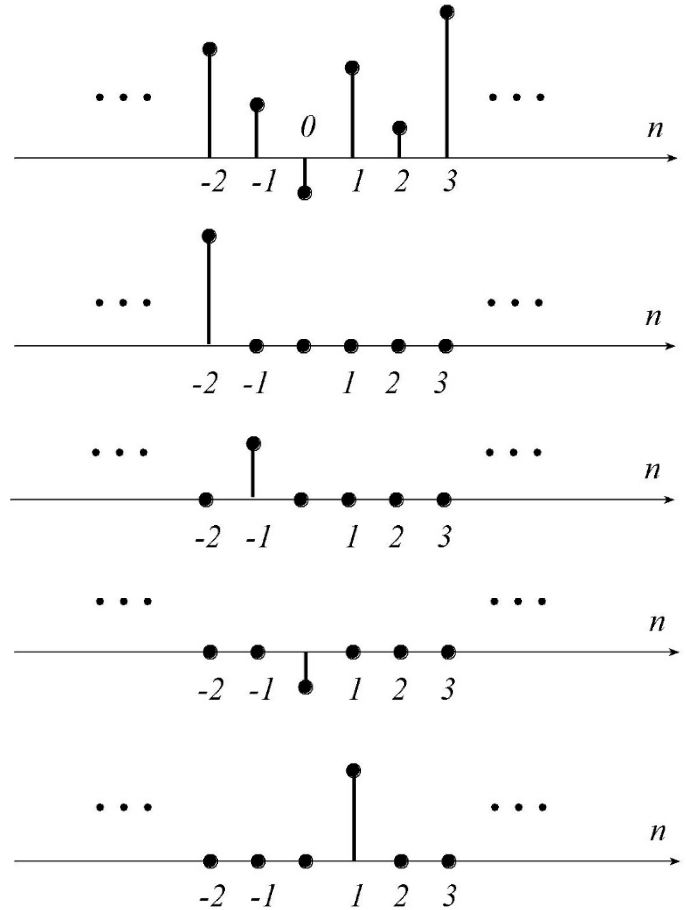
Sommario

- Rappresentazione dei segnali tempo-discreto mediante una combinazione lineare di impulsi traslati
- Risposta impulsiva dei sistemi lineari e dei sistemi lineari tempo invarianti
- Somma di convoluzione

- Rappresentazione dei segnali tempo-continuo mediante una combinazione lineare (integrale) di impulsi ideali traslati
- Risposta impulsiva dei sistemi lineari e dei sistemi lineari tempo invarianti
- Integrale di convoluzione

- Proprietà della somma e dell'integrale di convoluzione

Segnali tempo discreto - approssimazione



$$x[n]$$

$$x[-2]\delta[n+2]$$

$$x[-1]\delta[n+1]$$

$$x[0]\delta[n]$$

$$x[1]\delta[n-1]$$

Pertanto: $$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

Osservazioni

$$\boxed{x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]}$$

a) $x[n]$ ***così scritta risulta combinazione lineari di impulsi traslati negli 'istanti'*** k***, pesati dai valori che*** $x[n]$ ***assume in detti istanti.***

b) Una sommatoria di quel tipo viene denominata somma di convoluzione tra $x[n]$ ***e*** $\delta[n]$.

In generale:

$$y[n]=x_1[n]\otimes x_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

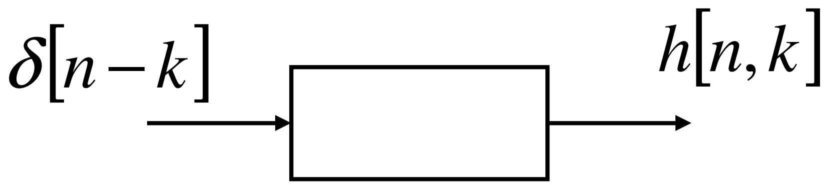
$$(\otimes = simbolo\ di\ convoluzione)$$

Sistemi tempo discreto

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]$$

Iª Ipotesi: sistema <u>lineare</u>

Sia $h[n,k]$ la risposta del sistema all'impulso unitario $\delta[n-k]$



per la linearità del sistema:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n,k]$$

Esempio

Un sistema lineare risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con il segnale $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u[n]$

Ricavare la sua risposta al segnale $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$.

La risposta è calcolabile attraverso la seguente sommatoria:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n,k]=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}u[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u[n]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}u[n]=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

II^a^ Ipotesi: sistema lineare tempo-invariante:

In questo caso:

$$h[n,k] = h[n-k]$$

$h[n] =$ **Riposta impulsiva del sistema: risposta all'impulso** $\delta[n]$

Pertanto:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] \otimes h[n]$$

Somma di convoluzione

Calcolo della somma di convoluzione

Per eseguire correttamente il calcolo della somma di convoluzione,
è **opportuno** procedere attraverso i seguenti passi:

$$y[n] = f_1[n] \otimes f_2[n]$$

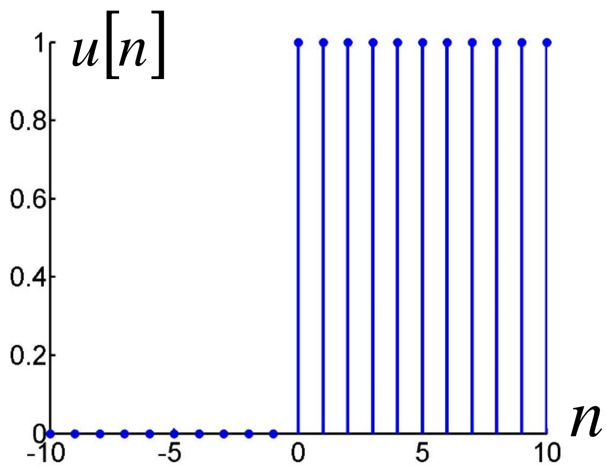
1) Rappresentare graficamente le due funzioni f_1 e f_2 in funzione della variabile k , indice della sommatoria ($f_1[k], f_2[k]$)

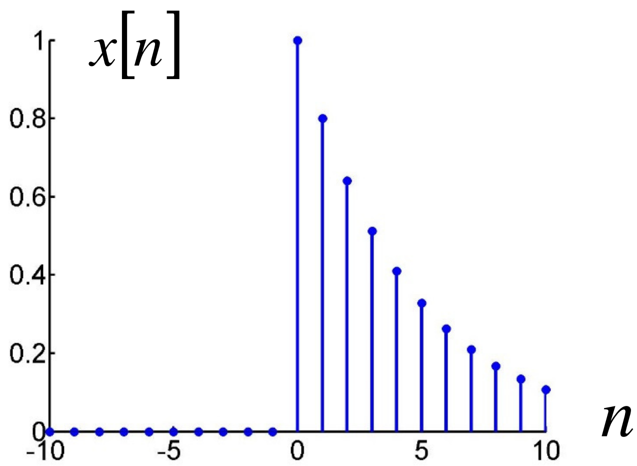
2) Ribaltare una delle due funzioni (ad esempio $f_2[k]$) attorno all'asse delle ordinate, ottenendo così $f_2[-k]$.

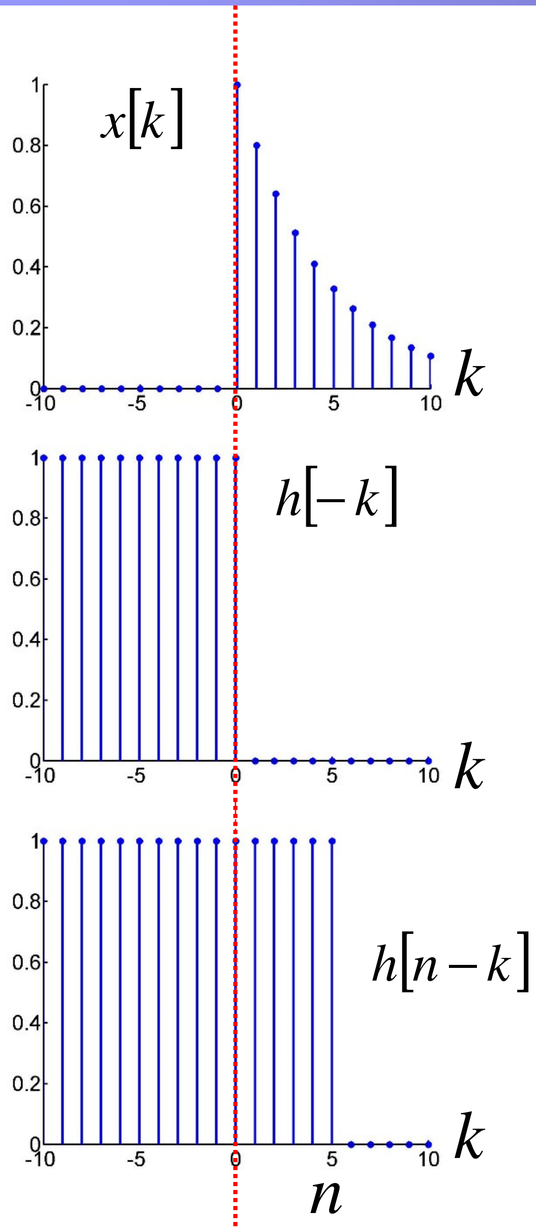
3) Traslare la funzione ribaltata di una quantità n**,** pari cioè al valore in corrispondenza al quale si desidera calcolare $y[n]$. La traslazione è verso destra se $n > 0$, verso sinistra se $n < 0$. In questo modo si ottiene la rappresentazione grafica di $f_2[n-k]$.

4) Per ogni k moltiplicare tra loro i valori delle due funzioni così ottenute ($f_1[k], f_2[n-k]$) e sommare tutti i prodotti. Dai due grafici sarà facile determinare i limiti della sommatoria su k**.**

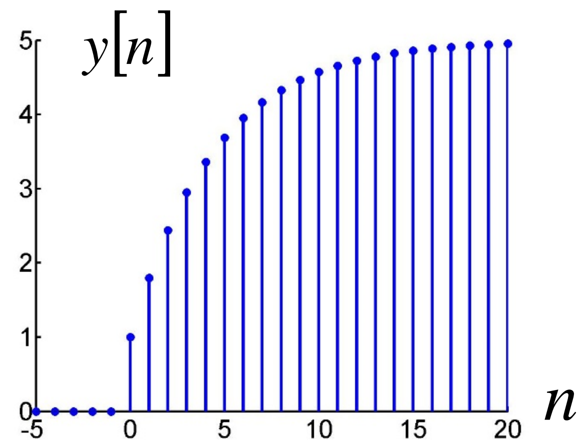
$$Sia \;\; h[n] = u[n] \quad e \;\; x[n] = (0.8)^n u[n]$$



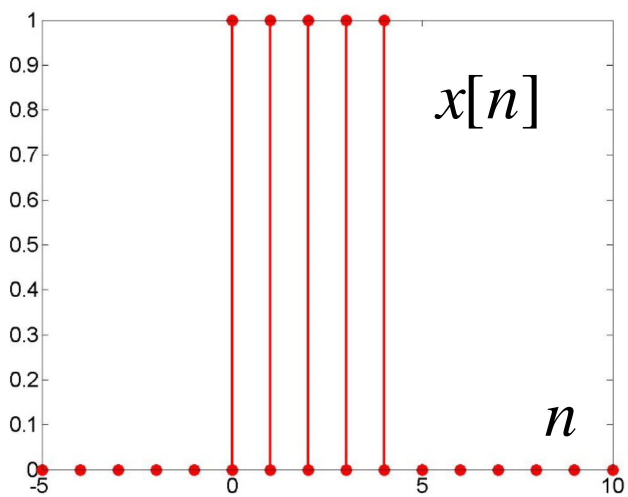


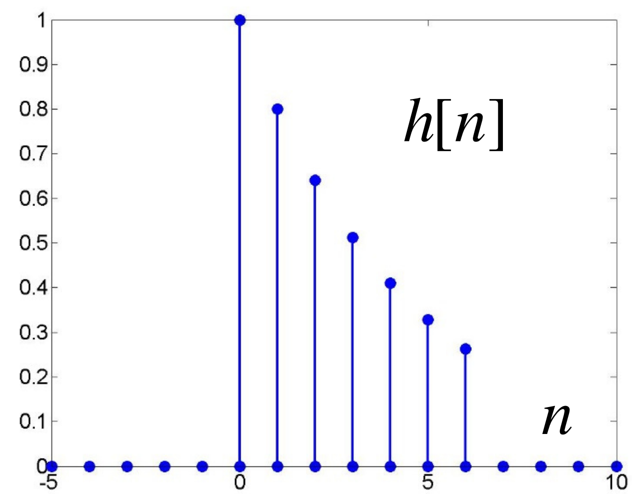


$$y[n]=\begin{cases}0 & per\ \ n<0\\ \sum_{k=0}^{n}0.8^{k}=\dfrac{1-0.8^{(n+1)}}{1-0.8} & per\ n\geq 0\end{cases}$$



Esempio



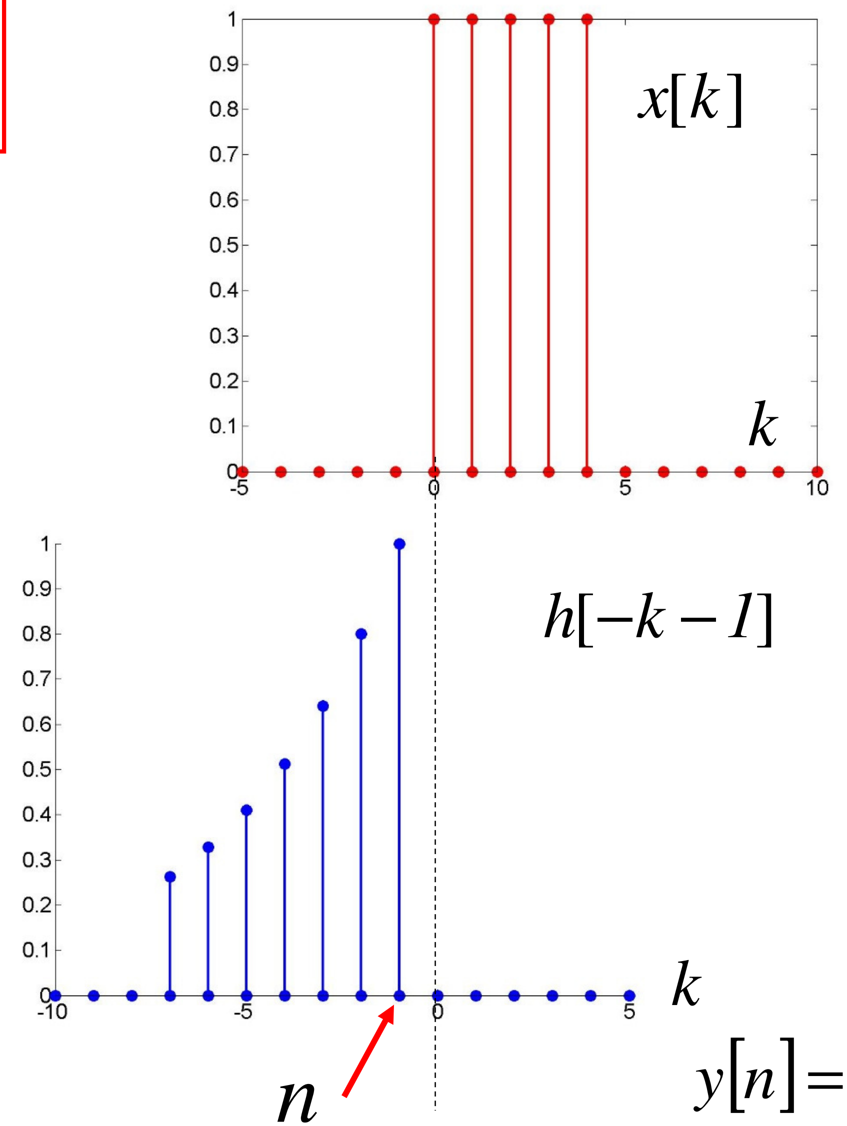


$$x[n] = u[n] - u[n-5]$$

$$h[n] = \alpha^n \{u[n] - u[n-7]\}$$

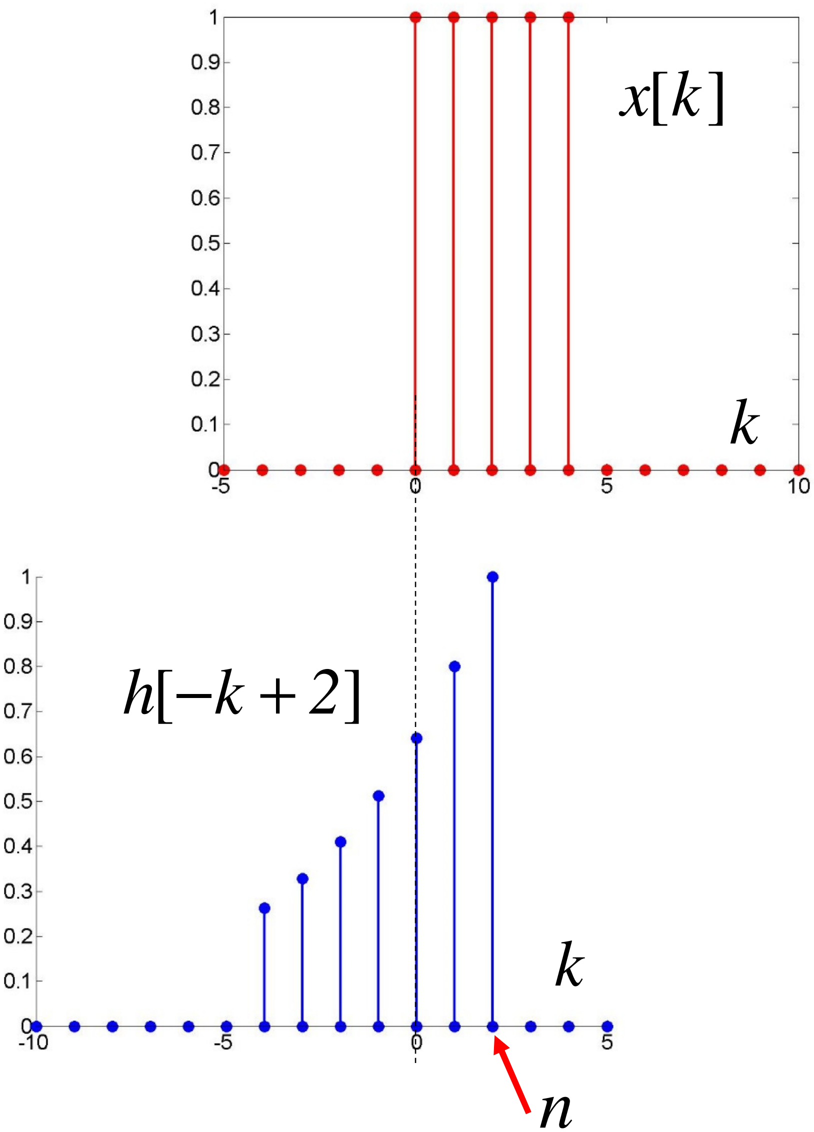
Esempio

$$\boxed{\begin{array}{l} n < 0 \\ (n = -1) \end{array}}$$



$$y[n] = 0$$

Esempio



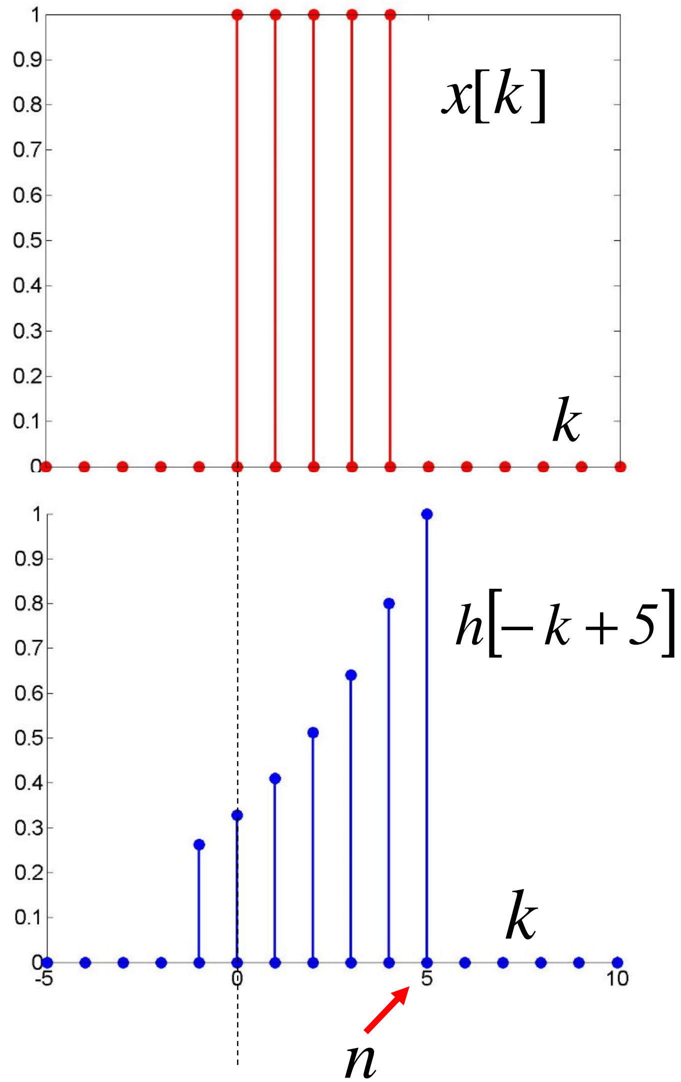
$$0 \le n \le 4$$

$$(n = 2)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{(-k+n)}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \alpha^{m} \qquad (m = n - k)$$

$$y[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

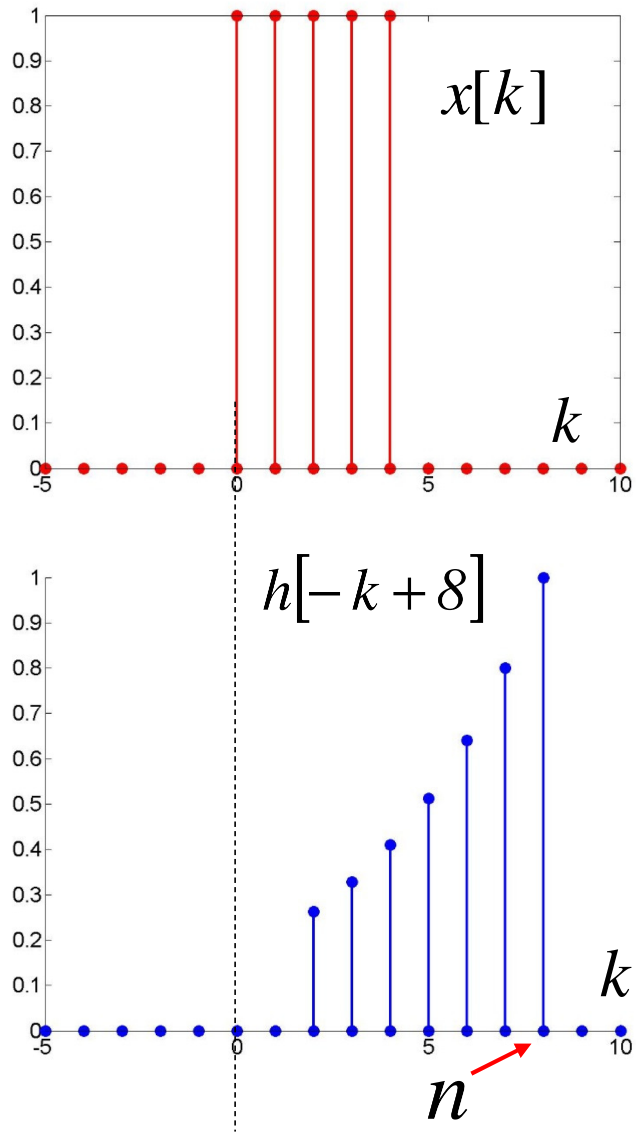


$$4 < n \le 6$$
$$(n = 5)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{(-k+n)}$$

$$= \alpha^n \sum_{k=0}^{4} \alpha^{-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^{4} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k$$

$$y[n] = \alpha^n \frac{1-\alpha^{-5}}{1-\alpha^{-1}}$$



$$6 < n \le 10$$

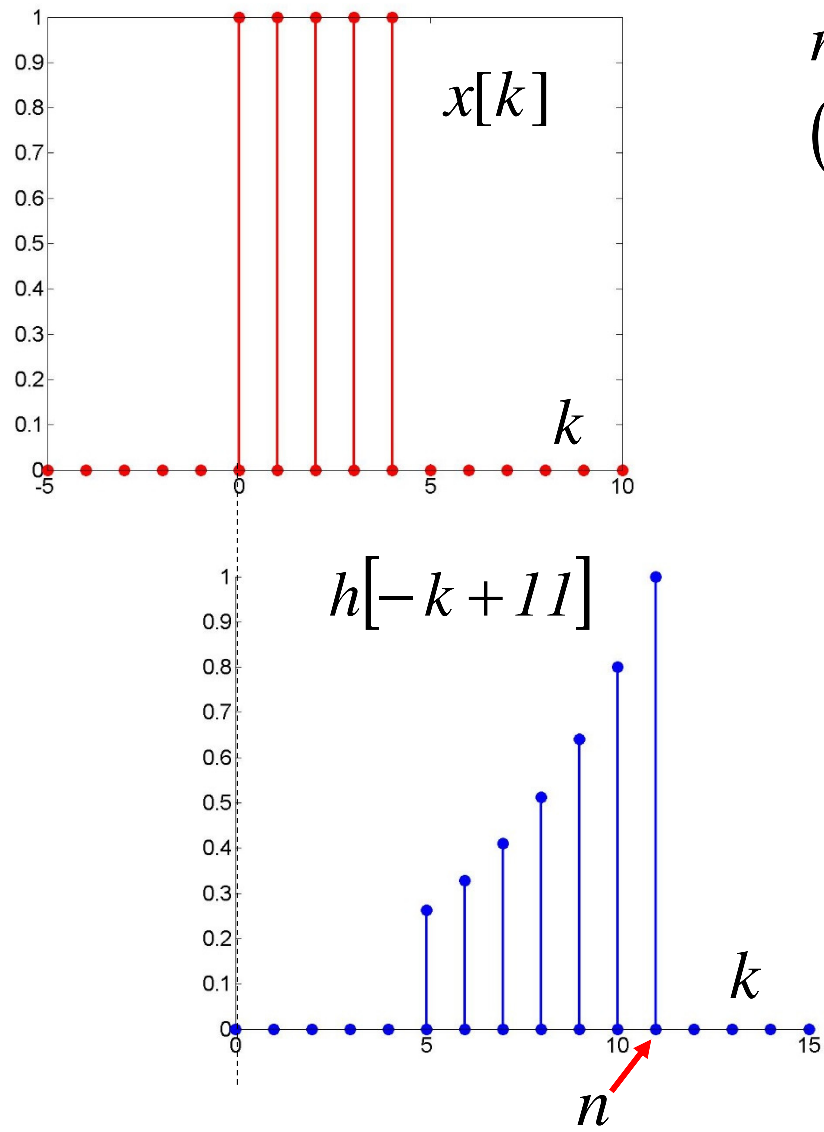
$$(n = 8)$$

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{(-k+n)}$$

$$m = k - n + 6$$

$$= \sum_{m=0}^{10-n} \alpha^{6-m} = \alpha^{6} \sum_{m=0}^{10-n} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m}$$

$$y[n] = \alpha^{6} \frac{1-\alpha^{n-11}}{1-\alpha^{-1}}$$

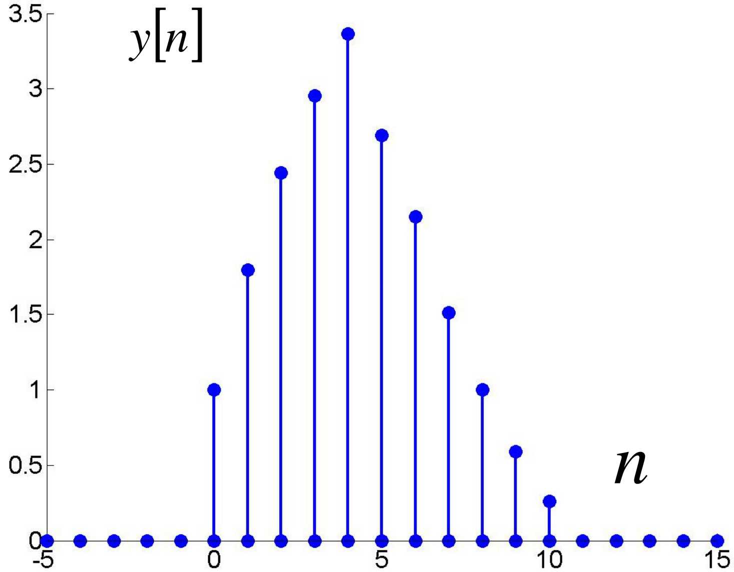


$$n > 10$$
$$(n = 11)$$

$$y[n] = 0$$

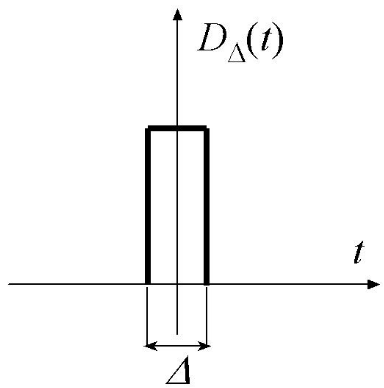
Esempio

$$y[n]=\begin{cases} 0 & n<0 \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0\le n\le 4 \\ \alpha^{n}\dfrac{1-\alpha^{-5}}{1-\alpha^{-1}} & 4<n\le 6 \\ \alpha^{6}\dfrac{1-\alpha^{n-11}}{1-\alpha^{-1}} & 6<n\le 10 \\ 0 & n>10 \end{cases}$$

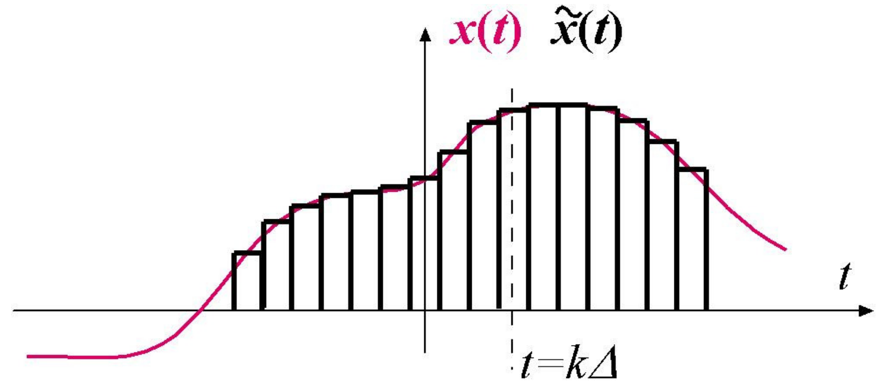


Rappresentazione dei segnali in termini di impulsi

1*) tempo continuo*



Segnale elementare



Approssimazione di $x(t)$

$$x(t) \approx \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) D_{\Delta}(t-k\Delta)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \underbrace{\frac{1}{\Delta} D_{\Delta}(t-k\Delta)}_{\delta_{\Delta}(t-k\Delta)} \Delta$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} D_{\Delta}(t - k\Delta) = \delta(t - \tau) \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \frac{1}{\Delta} D_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \\ \tilde{x}(t) = x(t) \end{cases}$$

Pertanto:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

Osservazioni:

a) $x(t)$ **risulta una combinazione lineare di impulsi traslati negli istanti τ, pesati dai valori assunti in tali istanti da** $x(t)$.

b) **La relazione integrale poteva essere scritta direttamente: essa esprime una delle proprietà della funzione $\delta(t)$.**

c) **Un integrale di quel tipo viene denominato <u>integrale di convoluzione</u> tra $x(t)$ e $\delta(t)$.**

In generale:

$$x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau) x_1(t-\tau)\, d\tau$$

$$(\otimes = simbolo\ di\ convoluzione)$$

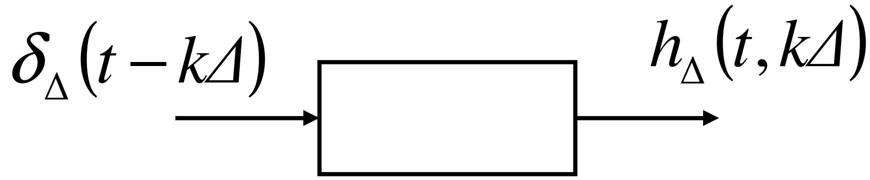
Analisi nel dominio del tempo

Sistemi tempo continuo

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\,\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\,\Delta$$

Iª Ipotesi: sistema <u>lineare</u>

Sia $h_{\Delta}(t, k\Delta)$ **la risposta del sistema al segnale** $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$



Allora, per la linearità del sistema:

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\,h_{\Delta}(t, k\Delta)\,\Delta$$

Limite $\Delta \to 0$

***Eseguendo il limite per $\Delta \to 0$, si ha*:**

$$\lim_{\Delta \to 0} \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta & = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)h_{\Delta}(t,k\Delta)\Delta & = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t,\tau)d\tau = y(t) \end{cases}$$

In conclusione:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t,\tau)d\tau}$$

essendo $h(t,\tau)$ la risposta del sistema all'impulso centrato in $t = \tau$.

Esempio

Un sistema lineare risponde all'impulso $\delta(t-\tau)$ **con il segnale** $\cos(2\pi\tau t)u(t-\tau)$**. Ricavare la sua risposta al gradino unitario** $u(t)$**.**

Per questo sistema:

$$h(t,\tau)=\cos(2\pi\tau t)u(t-\tau)$$

Pertanto $$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)h(t,\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\cos(2\pi\tau t)u(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=\begin{cases} 0 & per\ t<0 \\ \displaystyle\int_0^t \cos(2\pi\tau t)d\tau = \frac{\sin 2\pi t^2}{2\pi t} & per\ t\geq 0 \end{cases}$$

II^a^ Ipotesi: sistema lineare e tempo-invariante

In questo caso

$$h(t,\tau)=h(t-\tau)$$

essendo $h(t)$ la risposta del sistema all'impulso ideale $\delta(t)$

Pertanto

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)\otimes h(t)}$$

Il segnale all'uscita di un sistema LTI è dato dalla convoluzione del segnale di ingresso con la sua risposta impulsiva

Calcolo della convoluzione

Per eseguire correttamente il calcolo della convoluzione,

è **opportuno** procedere attraverso i seguenti passi:

$$y(t) = f_1(t) \otimes f_2(t)$$

1) Rappresentare graficamente le due funzioni $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ in funzione della variabile di integrazione (τ)

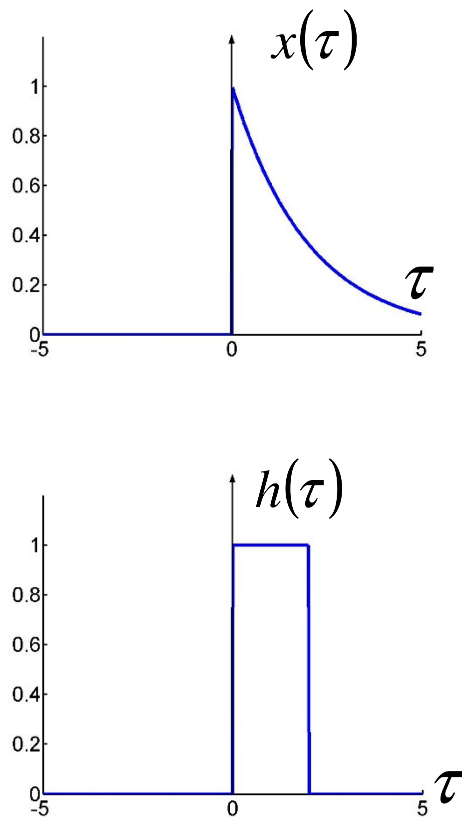
2) Ribaltare una delle due funzioni (ad esempio $f_2(\tau)$)attorno all'asse delle ordinate, ottenendo così $f_2(-\tau)$.

3) Traslare la funzione ribaltata di una quantità t, pari cioè al valore in corrispondenza al quale si desidera calcolare $y(t)$. La traslazione è verso destra se $t > 0$, verso sinistra se $t < 0$. In questo modo si ottiene la rappresentazione grafica di $f_2(t - \tau)$.

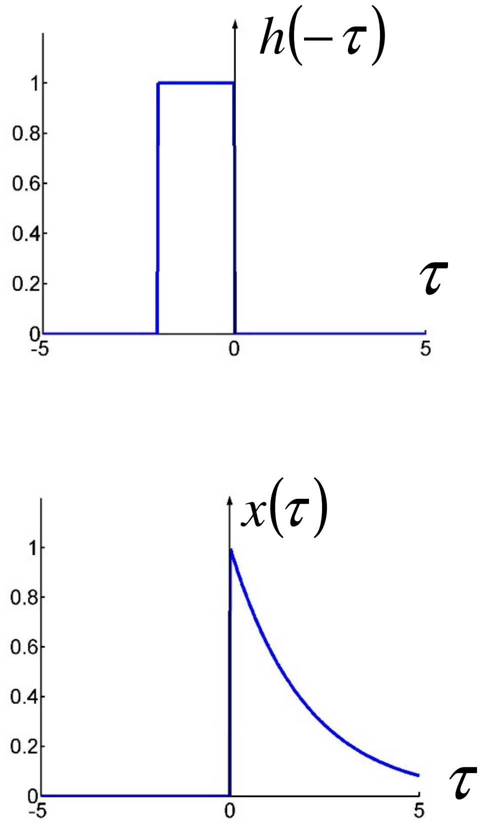
4) Moltiplicare tra loro le due funzioni così ottenute ($f_1(\tau) f_2(t - \tau)$) e integrare la funzione corrispondente a questo prodotto. Dai due grafici sarà facile determinare i limiti di integrazione.

Esempio I

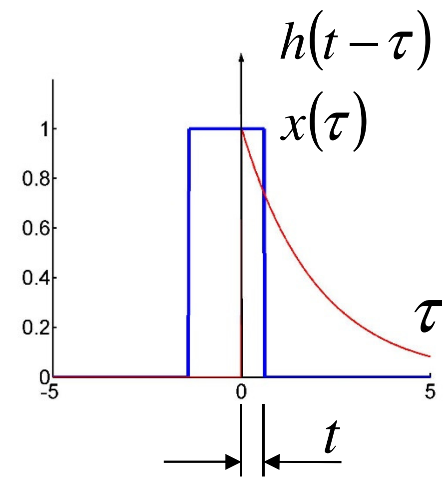
$$Sia\ \ h(t)=rect\left[\frac{t-1}{2}\right]\quad e\ \ x(t)=e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$



Passo 1

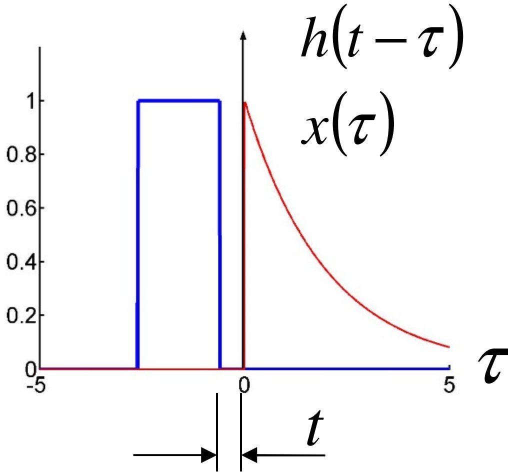


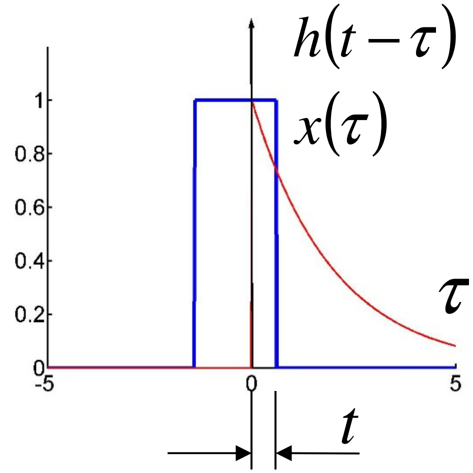
Passo 2

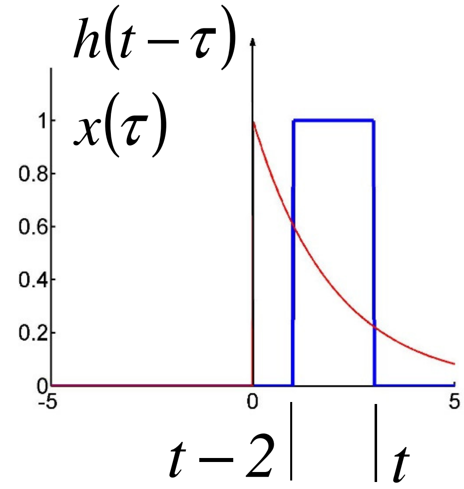


Passo 3

Esempio *(continua)*







$t < 0$

$y(t) = 0$

$0 < t < 2$

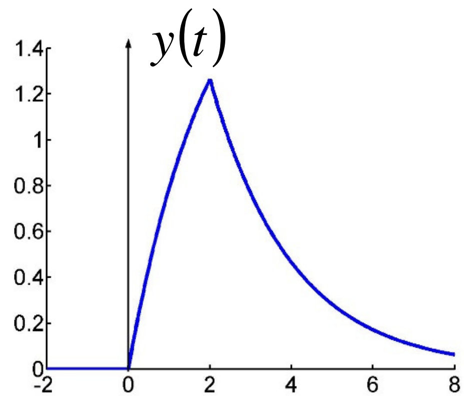
$$y(t) = \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau}\, d\tau$$

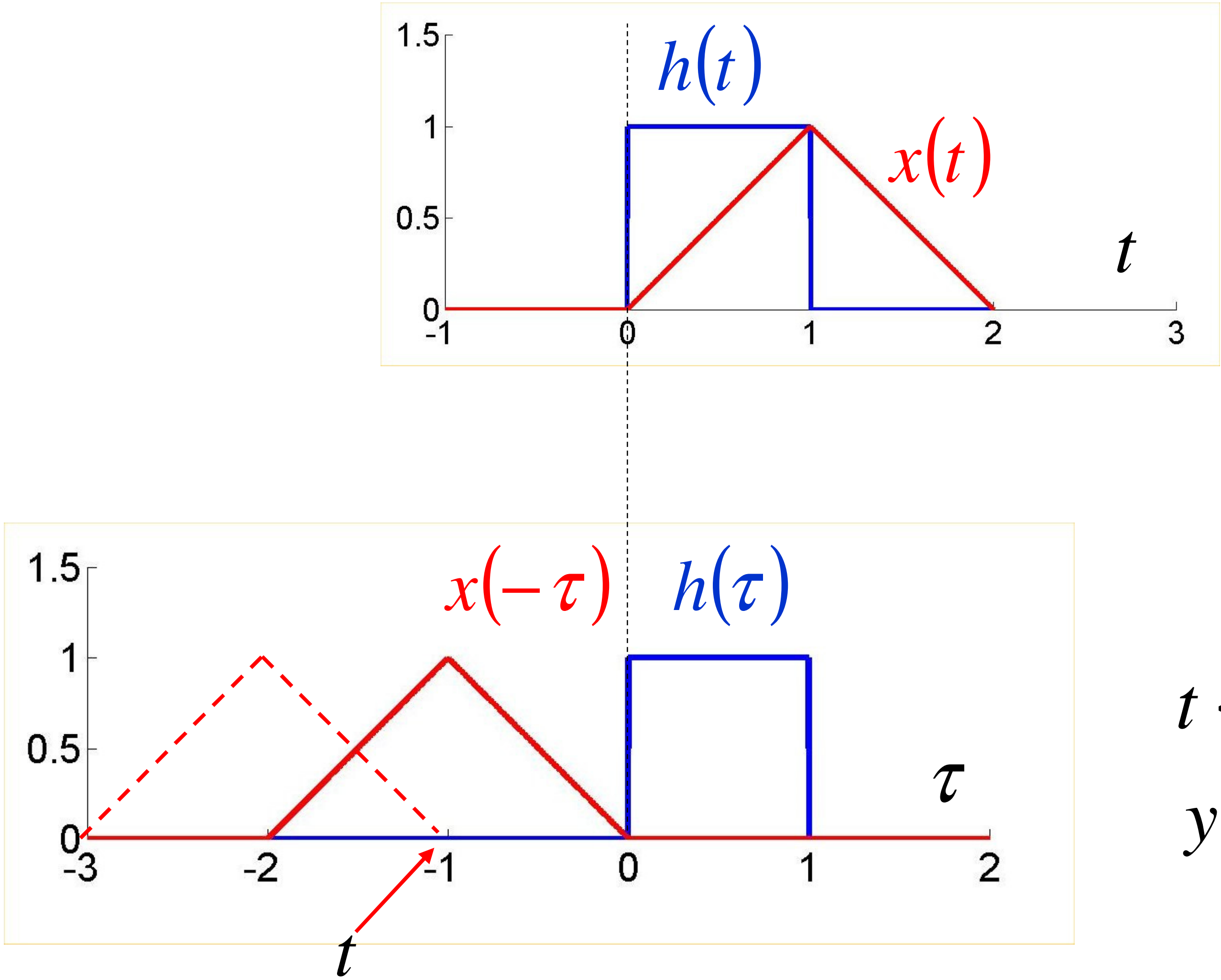
$$= 2\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)$$

$t > 2$

$$y(t) = \int_{t-2}^{t} e^{-\frac{1}{2}\tau}\, d\tau$$

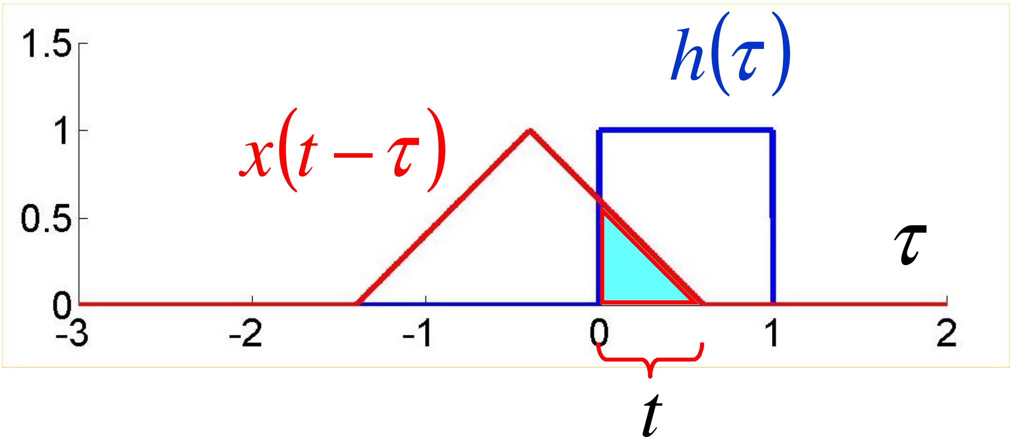
$$= 2e^{-\frac{1}{2}t}(e-1)$$





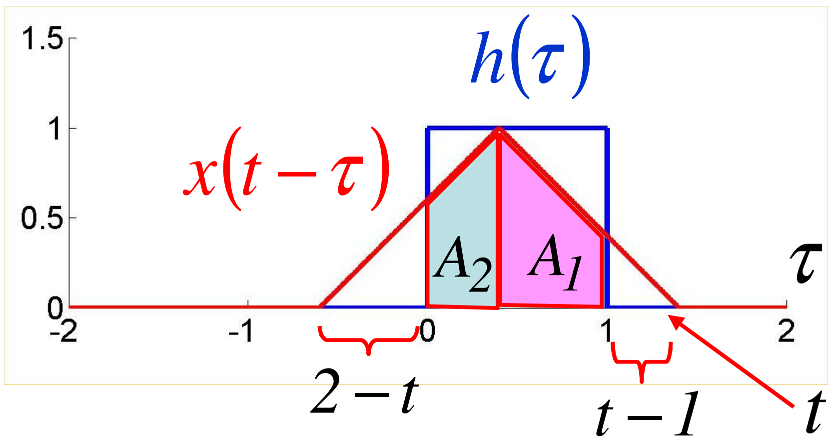
$$t < 0$$

$$y(t) = 0$$



$$0 < t < 1$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2$$



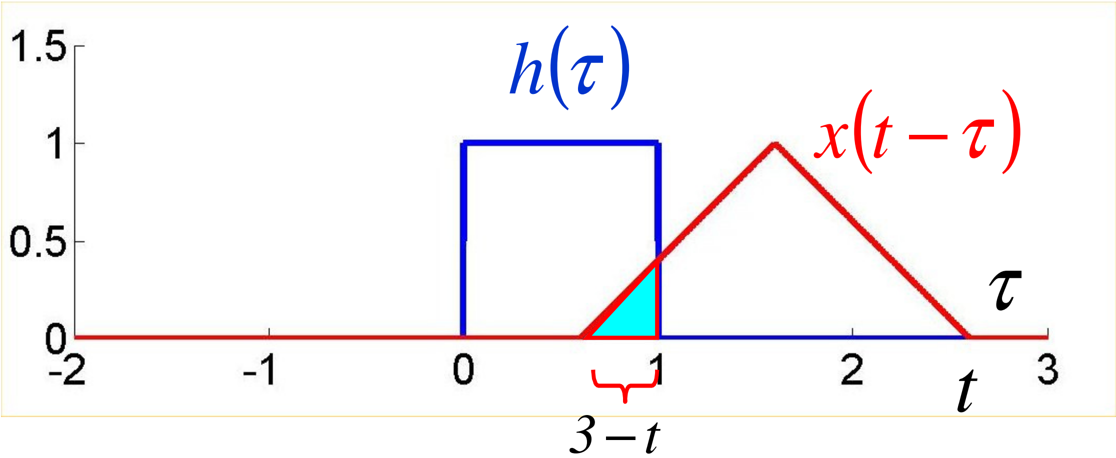
$$1 < t < 2$$

$$y(t) = A_1 + A_2$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t-1)^2\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2-t)^2\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{2}t^2 + t\right) + \left(\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2}t^2 + 2t\right)$$

$$= -t^2 + 3t - \frac{3}{2}$$



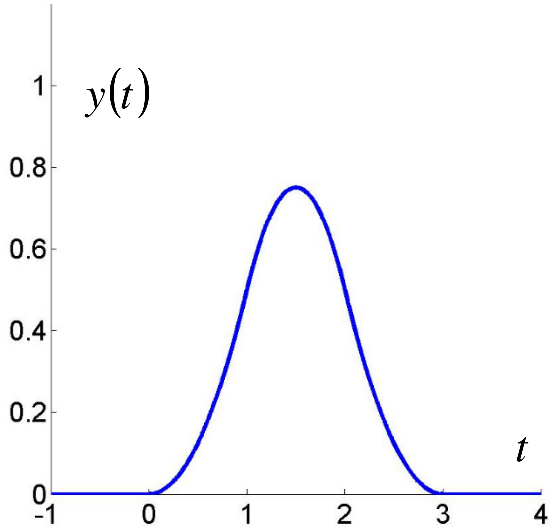
$2<t<3$

$$y(t)=\frac{1}{2}(3-t)^2$$

$t>3$

$$y(t)=0$$

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0<t<1 \\ -t^2+3t-\frac{3}{2} & 1<t<2 \\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & 2<t<3 \\ 0 & t>3 \end{cases}$$

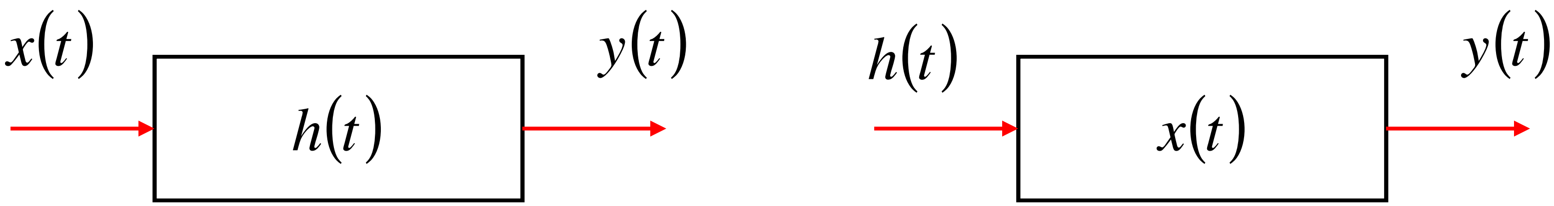


Att.ne! : La somma di convoluzione ha le stesse proprietà dell'integrale di convoluzione

commutativa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad \text{posto} \quad \alpha = t-\tau \qquad \tau = t-\alpha \qquad d\tau = -d\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha \Rightarrow x(t)\otimes h(t) = h(t)\otimes x(t)$$



La risposta a $x(t)$ di un sistema con risposta impulsiva $h(t)$

è uguale a quella che un sistema, avente risposta impulsiva $x(t)$,

dà quando al suo ingresso c'è un segnale pari a $h(t)$.

associativa

$$\underbrace{[x(t)\otimes h_1(t)]}_{g(t)}\otimes h_2(t) = x(t)\otimes\underbrace{[h_1(t)\otimes h_2(t)]}_{p(t)}$$

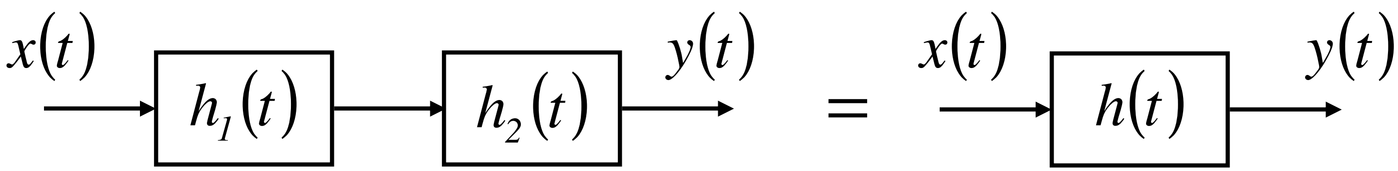
$$\underbrace{[x(t)\otimes h_1(t)]}_{g(t)}\otimes h_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)h_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)h_1(\tau-\alpha)d\alpha\right)h_2(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h_1\overbrace{\boxed{(\tau-\alpha)}}^{\beta}h_2(t-\tau)d\tau\right)d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\beta)h_2(t-\alpha-\beta)d\beta\right)}_{p(t-\alpha)}d\alpha = x(t)\otimes[h_1(t)\otimes h_2(t)]$$

$$[x(t)\otimes h_1(t)]\otimes h_2(t)=x(t)\otimes[h_1(t)\otimes h_2(t)]$$

Due sistemi LTI in cascata...

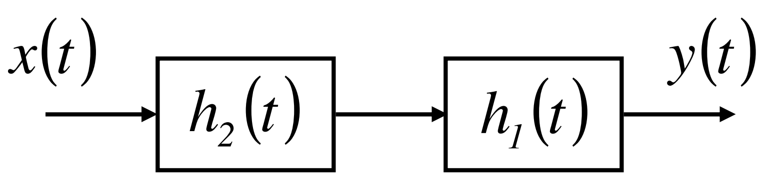


$$h(t)=h_1(t)\otimes h_2(t)$$

...equivalgono ad un sistema LTI con risposta impulsiva pari alla convoluzione delle risposte impulsive dei due sistemi

Per la proprietà commutativa

$$h(t)=h_1(t)\otimes h_2(t)=h_2(t)\otimes h_1(t)$$



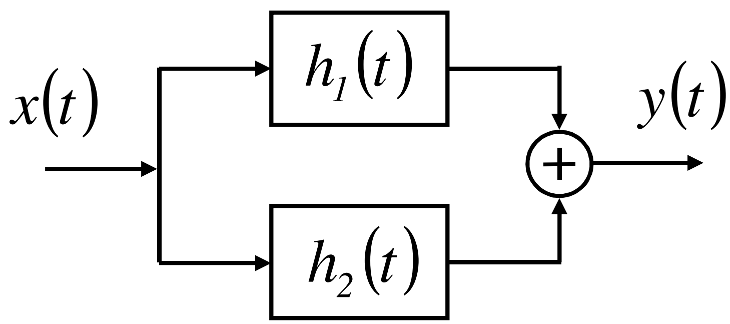
In una cascata di sistemi LTI l'ordine dei sistemi non influenza l'uscita del sistema complessivo

distributiva

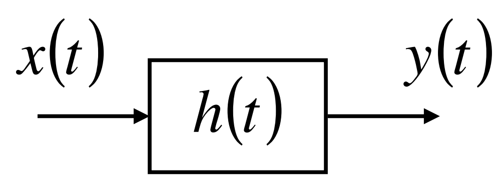
$$x(t)\otimes\left[h_1(t)+h_2(t)\right]=\left[x(t)\otimes h_1(t)\right]+\left[x(t)\otimes h_2(t)\right]$$

Dimostrazione ovvia ***(deriva dalla linearità dell'integrale)***

Significato fisico



=



$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$$

Due sistemi LTI in parallelo equivalgono ad un unico sistema LTI, con risposta impulsiva pari alla somma delle risposte impulsive dei due sistemi

1) Assenza di memoria

Dovrà essere:

$$\left.\begin{aligned} h(t)=0 \quad & per\ \ t \neq 0 \\ h[n]=0 \quad & per\ \ n \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} h(t) &= K\delta(t) \\ h[n] &= K\delta[n] \end{aligned}\right.$$

2) Causalità

$$h(t)=0 \quad \text{per} \quad t<0$$

$$h[n]=0 \quad \text{per} \quad n<0$$

Se all'ingresso c'è il segnale $x(t) \quad (x[n])$:

$$\left\{\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] \end{aligned}\right.$$

3) Stabilità

sia $|x[n]| < B$

allora

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\right|$$

$$|y[n]| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]||x[n-k]|$$

$$\le B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \quad \forall n$$

$$quindi \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < Q \quad (cond.\, suff.)$$

sia $|x(t)| < B$

allora

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right|$$

$$|y(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau$$

$$\le B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau \quad \forall t$$

$$quindi \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau < Q \quad (cond.\, suff.)$$

3) Stabilità

La condizione vista è anche necessaria:

sia $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty$ Si scelga $x[n]$ nel seguente modo:

$$x[n] = \begin{cases} 0 & se \quad h[-n] = 0 \\ \dfrac{h[-n]}{|h[-n]|} & se \quad h[-n] \neq 0 \end{cases}$$

$|x[n]| \leq 1 \quad \forall n$ *(segnale limitato)*

$$|y[0]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[0-k] \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \frac{h[k]}{|h[k]|} \right| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty$$

Pertanto:

Se $h[n]$ non è di modulo sommabile, la risposta a un segnale di ampiezza limitata può essere illimitata.

Analogamente nel caso di segnali e sistemi tempo continuo.

Riassunto

- sistemi tempo-discreto lineari : $h[n,k]=$ risposta all'impulso centrato in $n = k$

Risposta a $x[n]$: $$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n,k]$$

- sistemi tempo-discreto LTI: $h[n]=$ risposta all'impulso centrato in $n = 0$

Risposta a $x[n]$: $$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$ Somma di convoluzione

- sistemi tempo-continuo lineari : $h(t,\tau)=$ risposta all'impulso centrato in $t = \tau$

Risposta a $x(t)$: $$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

- sistemi tempo-continuo LTI: $h(t)=$ risposta all'impulso centrato in $t = 0$

Risposta a $x(t)$: $$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$ Integrale di convoluzione

Riassunto

Proprietà della somma e dell'integrale di convoluzione:

- commutativa
- associativa
- distributiva

Dalla risposta impulsiva di un sistema LTI si possono riconoscere le proprietà di:

- assenza di memoria
- causalità
- stabilità